# 稳操胜券

## 上

通俗数学名著译丛

埃尔温·伯莱坎普
约翰·康威
理查德·盖伊 著
谈祥柏 译



上海教育出版社
SHANGHAI JIAOYU CHUBANSHE

*Elwyn R. Berlekamp*
*John Conway*
*Richard Guy*
**Winning Ways**
**for your mathematical plays (I)**
Academic Press


根据学术出版社 1982 年第 1 版译出
本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

**图书在版编目(CIP)数据**

稳操胜券．上册／（英）伯莱坎普等著；谈祥柏译．
上海：上海教育出版社，2003.12
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-9136-8

Ⅰ.稳…　Ⅱ.①伯…②谈…　Ⅲ.对策(数学)
通俗读物　Ⅳ.0225　49

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第122131号

通俗数学名著译丛
**稳操胜券**
上　册
埃尔温　伯莱坎普　等著
谈祥柏　译
上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行
易文网：www.ewen.cc
(上海永福路 123 号　邮政编码：200031)
各地新华书店经销　昆山市亭林印刷有限责任公司印刷
开本 850×1156　1/16　印张 31　字数 661,000
2003 年 12 月第 1 版　2003 年 12 月第 1 次印刷
印　数 1-5,100 本
ISBN 7-5320-9136-8/O·0013　定　价：65.00 元

# 作者小传



埃尔温·伯莱坎普(Elwyn Berlekamp),1940年9月6日生于美国俄亥俄州多佛市. 在伯克莱加利福尼亚大学当了两年助教授并在贝尔电话实验室工作了五年之后,他在1971年当上了该校数学、电机工程与计算机科学的教授.

他的著作《代数编码理论》曾荣获美国电子学会信息论组的最佳科研著作奖. 埃塔·卡帕·纽学会授予他1971年度美国优秀青年电机工程师称号,并当选为美国电子学会信息论分会的理事长. 1977年他又被选为美国国家工程院院士.



约翰·康威(John Conway),1937年12月26日生于英格兰利物浦市,曾任贡维尔·凯伊斯学院及西德尼·苏萨克斯学院评议员,剑桥大学纯数学高级讲师. 他还是好几所大学的访问学者(教授衔),并在许多数学领域中作出过突出贡献,其中尤为重要的是超穷数算术、纽结理论、多维几何以及对称理论(群论)等方面.

在此之前他曾出过两本书《正则代数与有限自动机》以及《数与游戏》. 近来他已成为英国皇家学会会员. *



理查德·盖伊(Richard Guy),1916年9月30日生于英格兰纽尼顿. 他曾在许多国家(英国、新加坡、印度、加拿大)讲授过各种程度的数学课程. 1965年以来他就任卡尔加莱大学的数学教授,还是美国数学会的理事会成员.

他是《美国数学月刊》的"问题征解"专栏编辑,曾为"直观数学中的未解决问题"丛书写过数论方面的一册,还准备编写其他方面的几本,其内容涉及组合数学、图论与博弈论. 他是加拿大登山俱乐部的一名活跃成员.

* 译者注:自1990年代中期迄今,康威在美国普林斯顿大学任教授.

# 序

一本书是否一定需要一篇序言？尤其是，经过十五年辛勤劳动之后，三位有才能的作者还有什么话要追加？

我们想告诉前往书店淘书的读者："是啊，这正是你想要买的一本书！"

我们可以指点你，如果你希望迅速了解书中的内容，那么就请你翻到前言部分的最后一页，并进一步参看 1,255,427 及 695 页.

书评者将要苦苦地钻研将近一千页满载信息的大书，我们将向他们提供一些精练而能阐明文章内容的众多标题，这是本书向前推进的一条主线．然而本书并不是一本游戏百科全书，它虽然具有百科全书的性质，但还不是十分完备，仍有许多游戏遗漏在外．本书并非一本专讲游戏数学的书，因为其中含有太多的严肃数学成分．另一方面，按照我们的观点，也正如我们的前辈露斯鲍尔(Rouse Ball)，杜登尼(Dudeney)，马丁・加德纳(Martin Gardner)，克雷契克(Kraitchik)，山姆・洛伊德(Sam Loyd)，刘卡(Lucas)，汤姆・奥贝奈(Tom O'Beirne)以及弗莱特・席罕(Fred. Schuh)* 等名家的看法，数学的本质就是一种游戏．它不是一本大学生的教科书，因为其中的练习并未按照通常方式来编排：先易后难．另外，书中还有我们故意放在里面的 163 处错误，可以为读者提供充分余地，让他们积极参与．所以你们不要只是作为旁观者，站在一旁空口叫好，尽管它的确是一本很有艺术性的佳作．它也不是一本大学毕业生的教材，因为它代价高昂，包含了过多的材料，远远轶出任何大学毕业生要攻读的内容．但本书确实能把你带到组合博弈理论的研究前沿，为数众多的悬而未决问题将能刺激你们进一步研究.

我们要感谢帕特里克・勃朗奈(Patrick Browne)为我们建议书名．这个问题确实困扰我们相当时间．一天早晨，在赴校途中，约翰与理查德的脑海里突然闪现出"谁的游戏?"这一书名，可是他们意识到这个书名也许镇不住(因为它在英语里头至少就有三种不同意思，甚至还有其他歧义)**，终于把它改作本书正文第 1 章的章节名称，成为书中的一个笑料．对于书中的各种笑料，这里没有

* 译者注：这些人都是古今有名的数学游戏大师，但没有提到中、日、俄、印度等国的学者.

** 译者注：原文为"Whose Game?" 有"谁占优势?"、"谁的游戏?"、"谁的猎物?"等意思，还有其他歧义.

篇幅去解释,即使连59个带有个人隐私性质的笑话也是如此(我们三个人的生日在书中出现过不止一次).

对于勤奋的读者来说,开始时的笑料后来就产生了物质力量,成为扑克牌中的老K了.露易丝·盖伊也帮助校阅书中的证明,但她更大的贡献是殷勤好客,使我们三人经常有机会在一起共同工作.在卡伦·麦克德密与贝蒂·楞莱完成了许多草稿之后,露易丝作出了技术性的打字.

我们竭诚感谢为本书作出贡献的大批促成者.其人数之众多,不难在索引的姓氏栏中约略窥见.如果想做到真正的公平,保证一个不漏,势将花费太多的篇幅.以下只能提供极少数人名:理查德·奥斯丁,克立佛·巴赫,约翰·贝斯莱,阿维兹列·弗兰凯尔,戴维·弗兰姆林,所罗门·果隆姆,斯丹佛·格兰亨,密克·盖伊,迪安·希克逊,亨德列克·伦斯特拉,理查德·诺伐柯夫斯基,安妮·司各特,戴维·希尔,约翰·赛弗利奇,塞德列克·史密斯与斯丹佛·哲向茨.

本书之获得成功,尤应感谢学识渊博,消息灵通的伦·赛杰尔卡的悉心指导以及学术出版社与派奇兄弟公司的大力襄助.他们迁就了作者们的一些怪癖:这些家伙不放过一切机会大肆篡改语法语义,曲解原文,滥用标点,修改单词拼法,插入许多异想天开的双关语,加进不少内部笑料.

我们也应当感谢艾萨克·瓦尔顿·开勒姆基金会提供经济资助,使理查德就任卡尔加莱大学的常驻研究员,以完成本书的定稿.也要感谢加拿大国家科学技术研究院批准一笔拨款,使埃尔温与约翰得以同盖伊常来常往,经常切磋,而按照这些作者们的通常习性,犹如闲云野鹤,是难得会聚在一起的.

我们要谢谢您的保祐,圣西门!*

加利福尼亚大学,伯克莱,CA 91720 埃尔温·伯莱坎普
剑桥大学,英格兰,CB2 1SB 约翰·康威
卡尔加莱大学,加拿大,T2N 1N4 理查德·盖伊

---

* 译者注:圣西门,即圣彼得,耶稣十二门徒之一,在皈依耶稣之前,原为渔夫.俄罗斯第二大城市列宁格勒已恢复原名圣彼得堡,足见其在西方人心目中的重要性!

现在你
在这里

如果你想了解本书的概貌，请翻到书中四大篇的首页，那里有着简单的注释：

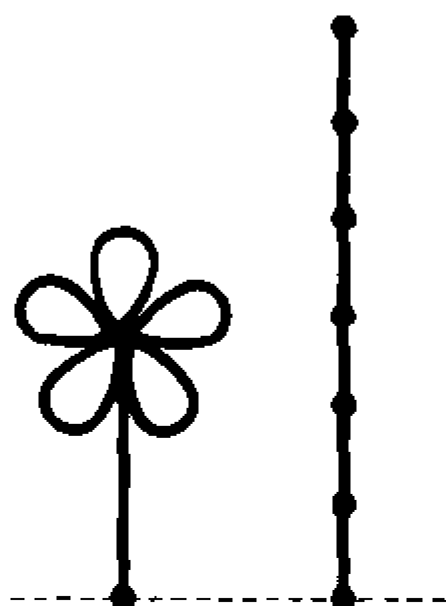


在本书各章节之间还有着一些其他重要联系：

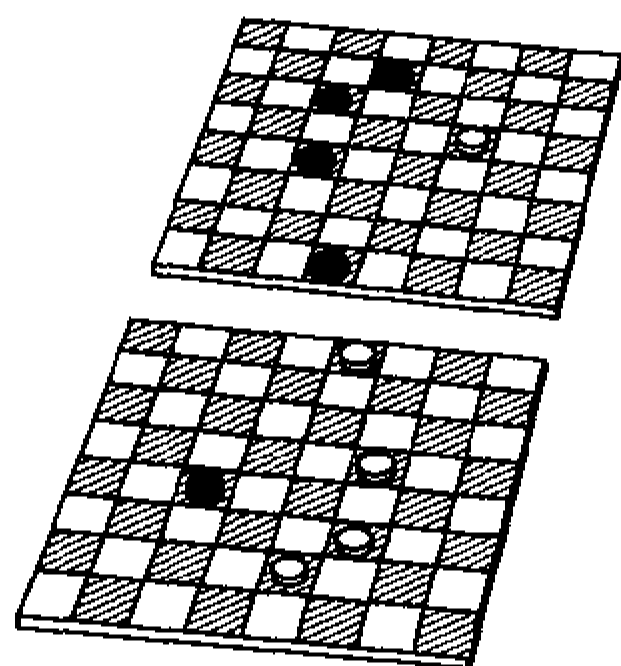


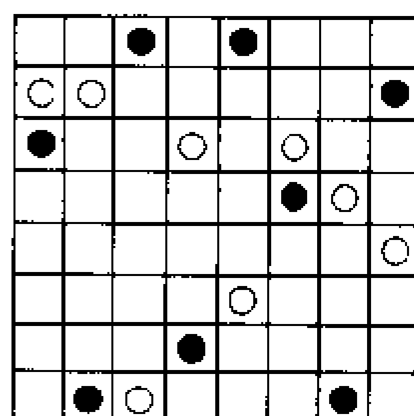
除了在本书开头部分所讲到的基本概念之外，你可以随便挑出书中的任何一章来读，而不需要多少预备知识。

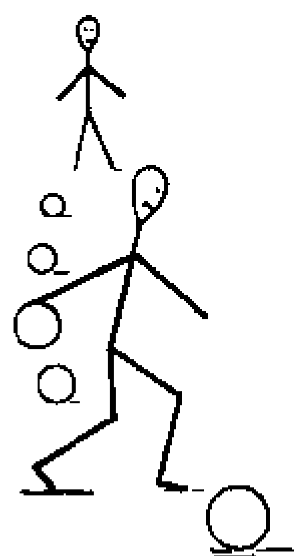
# 目录





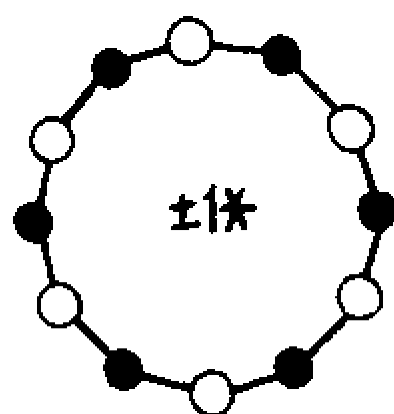


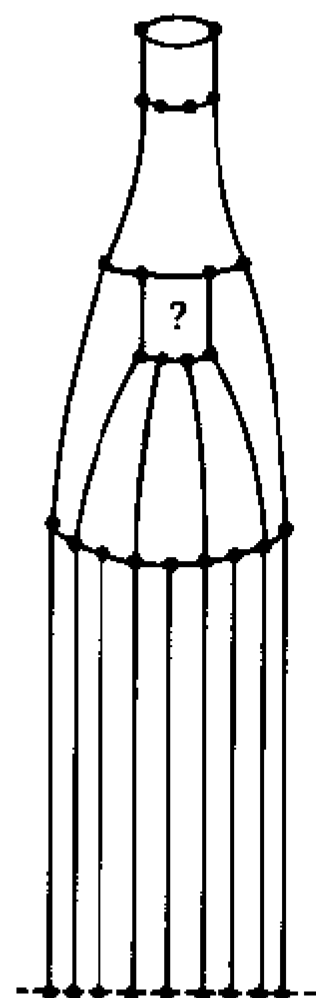




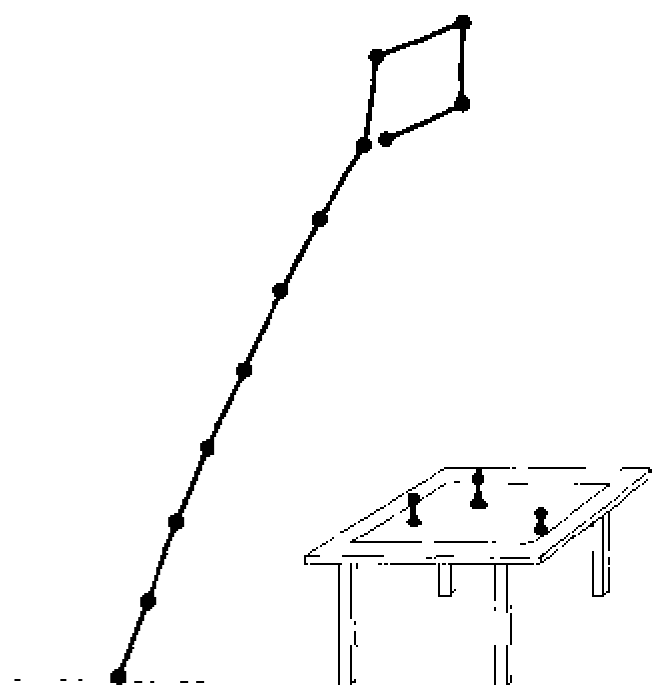


增 补






增　补





增 补



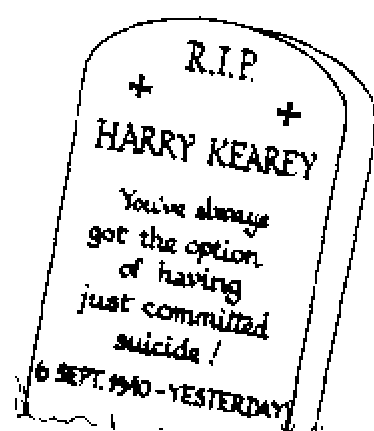
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| – | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | • | • | • |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | • | • | • | • |
| – | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | • | • | • |

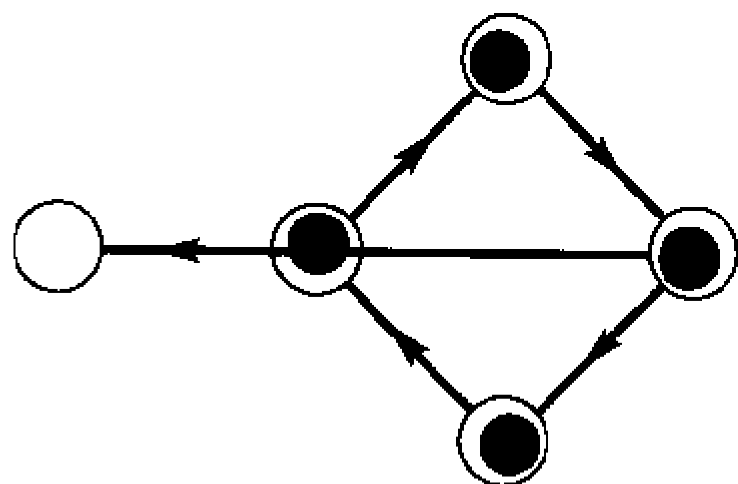
♥

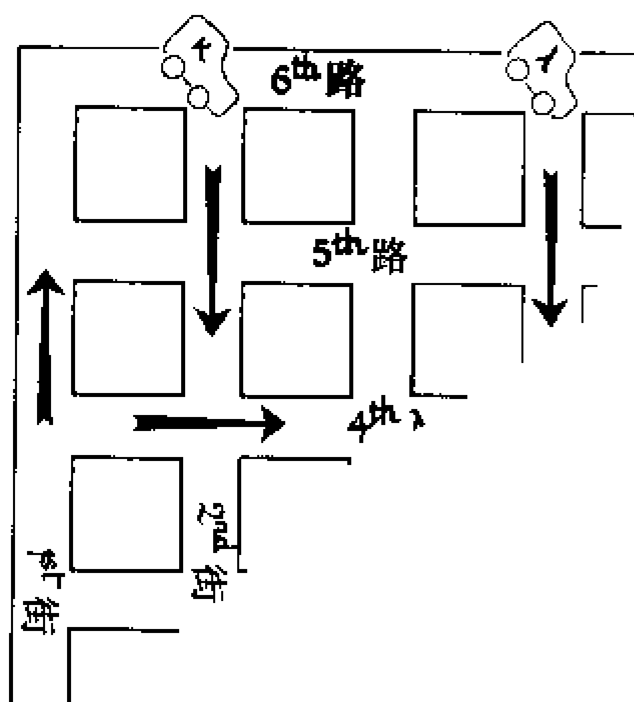
# 转 入 鸡 心!






R.I.P.
HARRY KEAREY
You've always got the option of having just committed suicide !
6 SEPT. 1940 - YESTERDAY



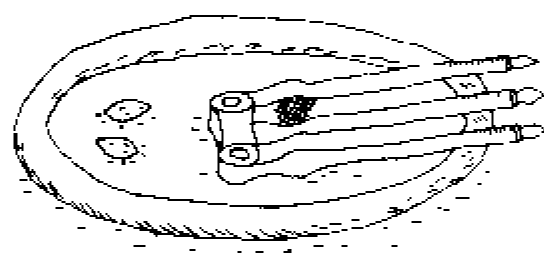


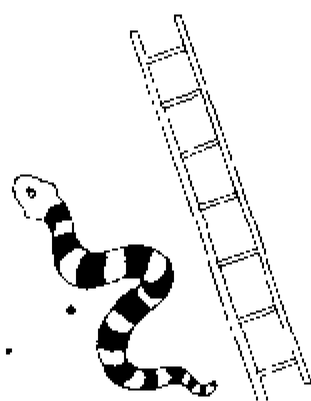



增 补

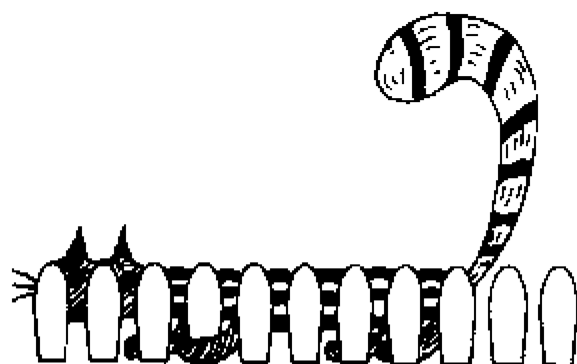
## 第 12 章 永恒的博弈与有后继要求的博弈 399

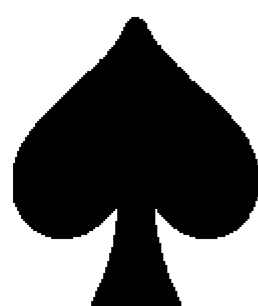






增 补





# 基础篇

## (艰苦的铲土活!)

她说,让黑桃做王牌吧! 果然,它们做了王牌.

亚历山大·波普,《金丝发的遭劫》,c,iii,Ⅰ,46 页

西西里:当我看到一把铁锹时,我就说它是铁锹.

温多伦:我乐于告诉你,我可从未看到过一把铁锹.`

-奥斯加·王尔德,《诚实的重要性》,Ⅱ.

我们在前面几章中为其他各章节奠定了基础工作,告诉读者怎样进行博弈的相加,如何求出它们的值.

在第 1 章与第 2 章中引进了这些概念,并通过简单例子来说明有些博弈的值是通常的数,而有些却不是.

在第 3 章中你们将看到一些名为拧数的特殊值,那是在尼姆游戏中出现,而对一切无偏博

---

* 译者注:正如一位作者在序言中所指出的,本书经常使用双关语句及单词.这里的“spadc”一词有铁锹及黑桃两种意思.

弈都能派上用场. 第 4 章中讨论了一些实例.

第 5 章中有着一些极小的博弈. 另一些博弈则由于它们既大(不像拧数)又热(不同于普通的数),确实需要第 6 章的理论加以对付.

最后,在本篇的第 7 章论述了在一、二个原子中的极小博弈. 而在第 8 章中显示了在伐木游戏中这样一些数值同通常的数一起出现时所发生的一些情况.

# 第1章

# 谁占优势?

"在应该开始的地方开始",国王严肃地说,"继续进行下去直至终局,然后停下来."

——刘易士·卡洛尔,《爱丽丝漫游奇境记》,第12章

在这种石南丛生的荒地,我只能做一些游戏来打发时光.

——威廉·赫兹列特,《旅途》

在下面非常简单的纸与笔游戏(也可用粉笔写在黑板上)中,哪一方占优势?

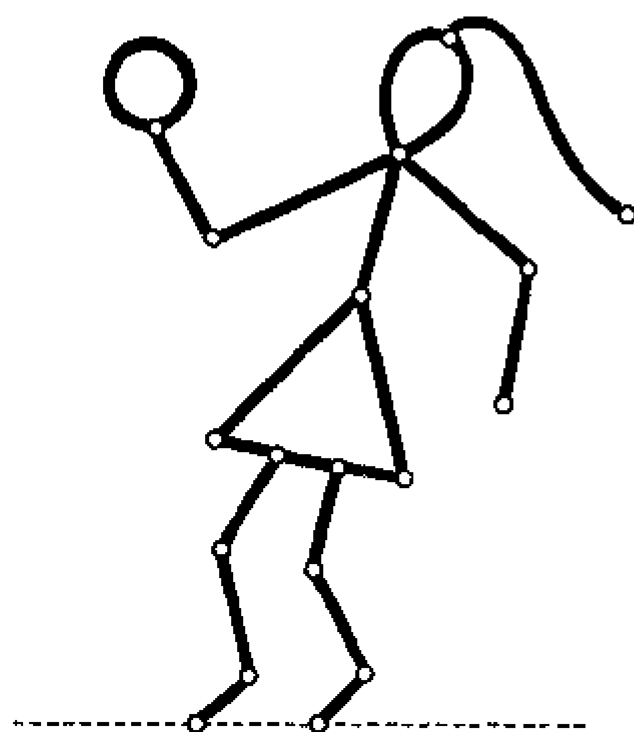


图1. 一位小姑娘(蓝—红伐木游戏的一幅插图).

# 蓝—红伐木游戏

这是一种在图形上(如图1)进行的游戏，又名红—蓝伐木游戏. 两位局中人分别称为**左方**与**右方**. 左方的走法是可以在图形中删去任意一条蓝色的边，此时，不再与地面(图上以虚线表示)相连接的任何边亦将视为同时消失，右方的走法与此类似，但他删去的应是任一条红色的边. (这游戏最好是在黑板上做，因为擦拭比较方便). 用不了很久，一位局中人就会发现他已无路可走，因为残余图形中属于他那种颜色的边已经没有了. 首先陷于此种局面的便是输家. 你必须确保，此种恶运不会降临到你头上!

那么，你能干啥呢? 首先，你应当坐下来仔细观察一下，在同行家里手对局之前彻底理解游戏规则. 为此，让我们看一看简单的几步所导致的后果. 左方先走，他的第一步可以抹去图上小姑娘的左足. 这将使她左腿的其余部分像跛足残疾人一般摇来晃去，但实际上却并无所失，因为小姑娘的每一条边都能通过其右足而与地面相连接. 现在轮到右方走棋了，如果他愿意的话，只要抹去小姑娘的右足，即可使小姑娘轰然倒地，全部完蛋. 左方的第一步也可以不这样走，改为删去小姑娘的上臂，此时手臂的剩余部分与手中所拿的苹果也要消失. ……如今你真的理解游戏规则了，即可进行对局. 也许，图1对你来说还是稍为复杂了一点. 那就让我们来看看图2，此时红、蓝两色都已经分开，双方互不干扰. 小姑娘属于左方，男孩属于右方，两位局中人各走各的. 图上，小姑娘的边数较多，所以不论哪方先走，左方的存活时间肯定要比右方要长，所以左方必胜. 事实上，从图上看来，小姑娘有14条边，小男孩只有11条边，左方至少可多走 $14-11=3$ 步. 当然，他必须自上而下地逐步砍伐灌木，右方也与此相似.

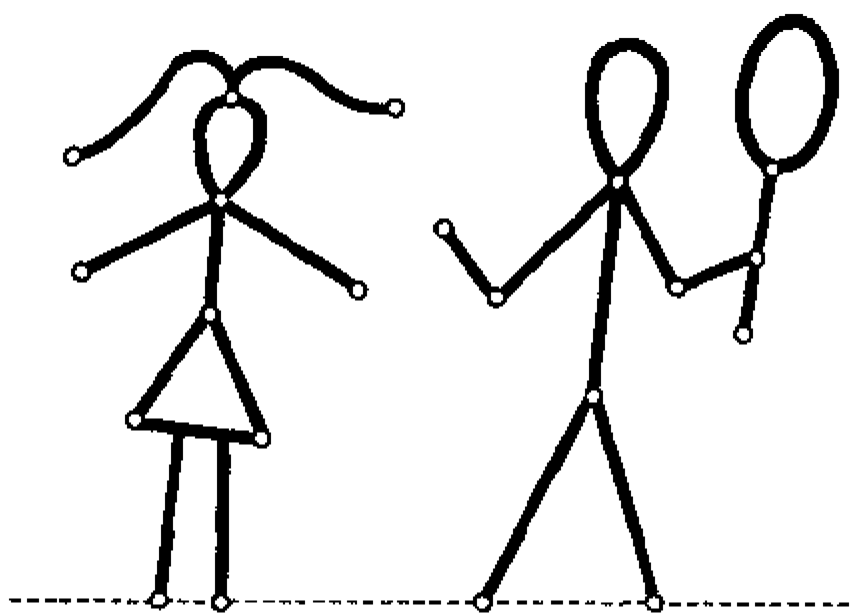


图2. 青梅竹马喜相逢.

图3中的特威德勒哥与特威德勒弟*的边数完全一模一样，所以左方毫无优势，$19-19=0$. 这究竟意味着什么呢? 如果左方先走，双方都采取合理的自上而下砍法，这样左，右，左、

* 译者注：数学家、儿童文学作家刘易士·卡洛尔的名著《爱丽丝漫游奇境记》中的童话人物，他们是一对淘气可爱的双胞胎兄弟.

右,……地各走了 19 步之后,轮到左方走时,图上已经空无所有了. 所以若左方先走,则左方必输;与此类似,若右方先走,则右方也必输无疑. 这样的状态称为零位,谁先走就谁倒霉.

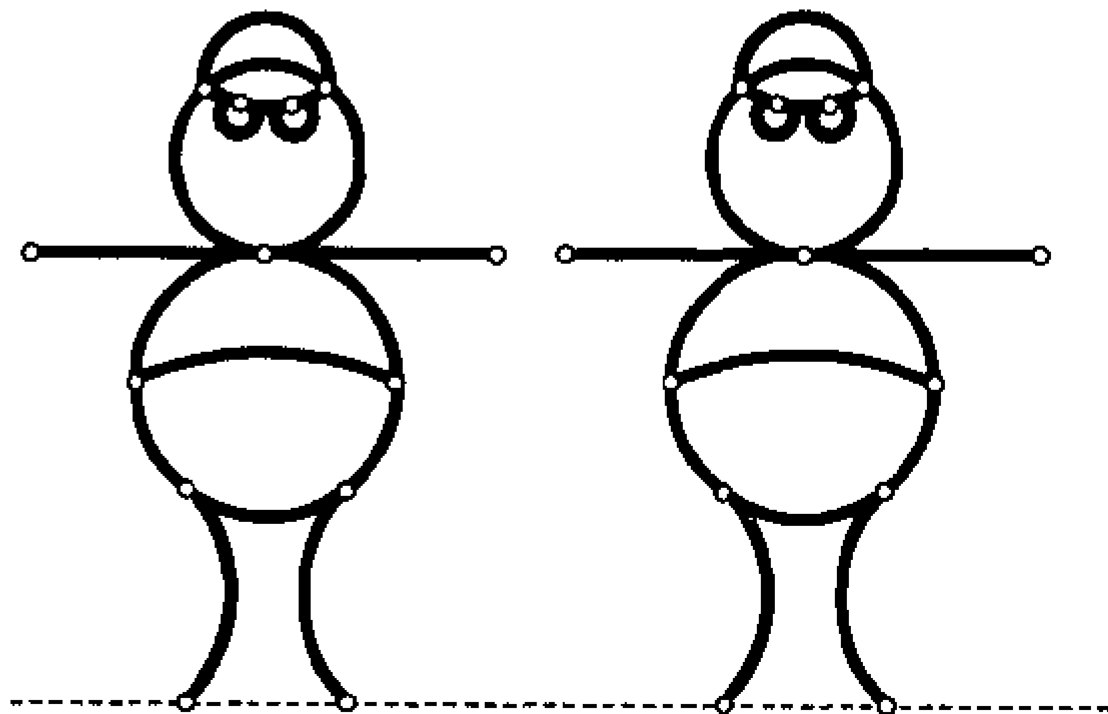


**图 3.** 双胞胎兄弟即将开始战斗.

## 双胞胎论证

现在让我们来调换几条边,使图 4 中的两位双胞胎兄弟都兼有两种颜色的边. 但由于边的调换是完全对等的,看来任何一方都捞不到什么好处. 图 4 是不是仍处于零位,先走先输呢? 是

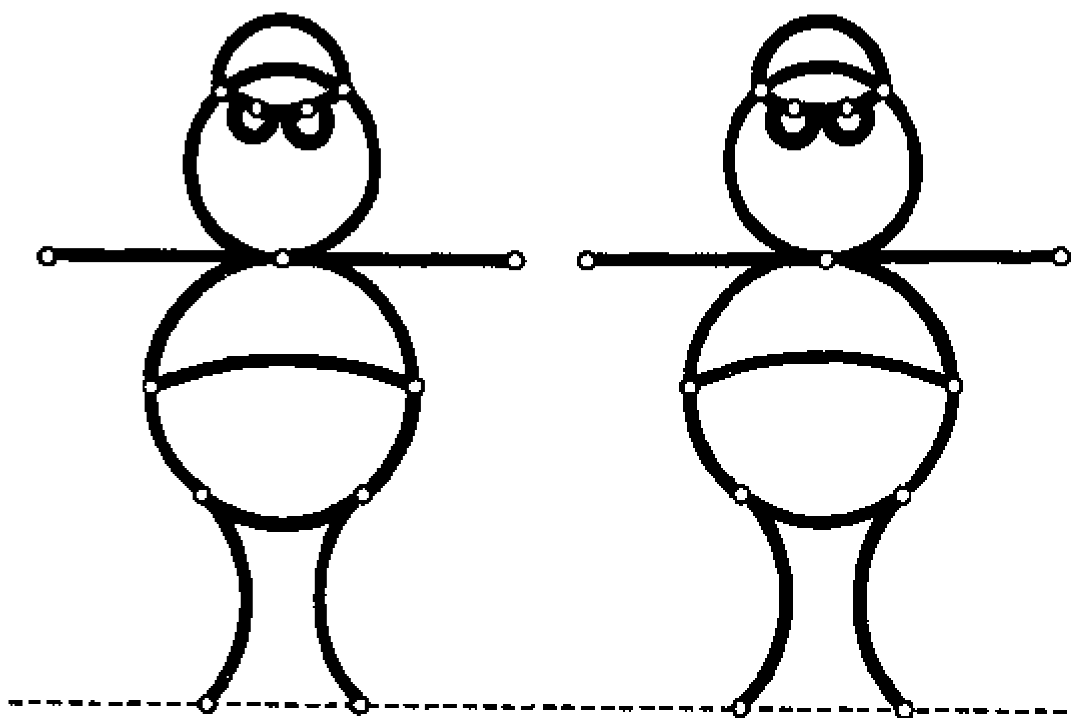


**图 4.** 他们打了第一仗以后,打算继续对抗下去.



的，确实如此，因为后走的一方可以"依样画葫芦"，照抄其对手的走法，砍掉其双生兄弟所对应的一边．只要他自始至终地按此方式做下去，他肯定可以稳操胜券，因为只要对方能走，他也必然能走．我们以后将会碰到一些博弈游戏，其中的一位局中人可以采取此种策略．从现在开始，我们将把它称为"双胞胎论证"或"东施效颦策略"．

在做蓝一红伐木游戏时，主要的困难在于你的对手力图通过某种手段，一下子"抢劫"掉属于你那种颜色的许多条边．但存在着一些情况，即使图形看上去非常复杂，你仍有充分把握肯定对方无所施其技．图5即是一个简单的例子．在这一只小狗图形中，每位局中人的任一条边都是通过自家颜色的另一边来连通到地面的．所以他只要进行合理的砍伐，每位局中人都完全有把握走完属于他的颜色的各条边，当然他也不能指望有额外的好处．于是，图5可以再次通过计算边数来求值，对左方来说，有着9－7＝2步的优势．对这类图形而言，正确的砍伐步骤当然应该是首先去掉通过己方颜色的其他边连通大地而边数是最多的，这样一来，你就不愁其他的边由于失去支撑而陷于孤立．就图5而言，左方若先砍掉小狗的前腿是极其愚蠢的走法，因为那样一来，狗的头与颈就处于摇摇欲坠的地步，右方只要再走2步，即可使5条蓝边完全消亡．

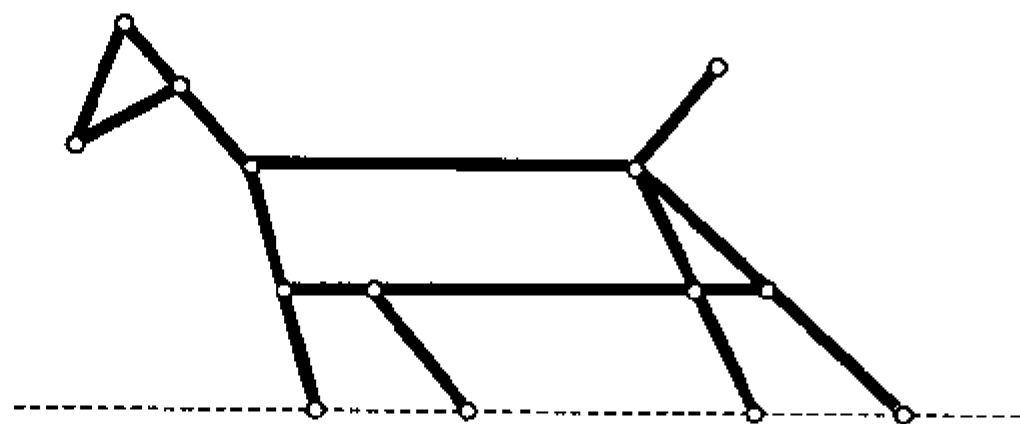


图5. 一条"左倾"的狗.

## 怎样取得半步的优势？

以上这些简单论证对一切伐木游戏的状态、位置是远远不够的．论证失败的最简单事例或许是图6(a)中的两条边的图形．容易看出，若左方先走，他可以取走底下的一条边而一举获胜．但若右方先走，他只能取走上面的一边，左方仍然可以拿走底下的一边而取胜．所以不论何方先走，左方总是能赢．此种状态显然对左方有利．那么，能否说此种优势正好值1步呢？对此，让我

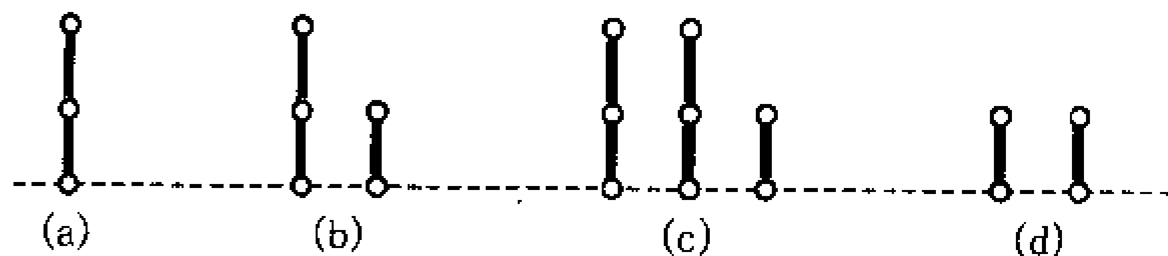



图6. 所谓半步优势，究竟意味着什么？

们来作一个检验,在它的旁边,放上一条外加的接地红边(这意味着右方的1步优势),见图6(b),那么,双方的优势能否互相抵销?现在究竟谁赢?

若右方先走,他无疑应取走两条红边中的较高者,因为这条边明显处于危境,接着是左方取走他唯一的蓝边,而右方仍然能走并获胜.若左方先走,他的唯一走法仍然留下一条自由边给右方,所以右方还是可以取胜.所以不论谁先谁后,右方总是能赢.于是,我们可以看到,形势逆转,图6(a)的左方优势被加上一条自由边的右方压倒了.因此,我们可以说,图6(a)的左方优势是值不到1步的.那么,它会不会值半步呢?

我们用图6(c)的办法来测试.把图6(a)复制成一式二份,再加上右方的一条自由边.这是因为:左方的$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$正好与右方的1步互相平衡.现在,对图6(c)来说,究竟谁赢呢?此时,左方实际上只有一种类型的走法,并导致图6(b)的结果,而我们已知,这是右方取胜的局势.另一方面,若右方先走,他的合理走法,是在两条受威胁的边中取走其一,接着,左方将走到图6(d)的状态并在右方再走一步后获胜.若右方先用掉他的一条自由边,则左方的回应将导致图6(a),而这是一种他可以取胜的状态.

如上所述,我们已作了充分论证:左方先走则右方可赢,右方先走则左方可赢,所以图6(c)是一个零位游戏.这就表明,图6(a)的两个复制品,其性能恰似左方自由的一步,而与右方的自由一步正好抵消,所以,把图6(a)视为左方的半步优势,的确是相当合理的.

把右方的红边置于左方控制之下,使图6(a)比图6(d)对右方更为不利.那么,对右方来说,图7(a)是否比图7(b)(其时右方的边仅受到一条左方的边的威胁)更为不利呢?

我们现在来看,图7(a)对左方来说,是不是像图7(b)那样,正好值$1\frac{1}{2}$步?对此,我们可以外加右方的$1\frac{1}{2}$自由步来进行测试.由于图7(c)是图7(b)的对立面,把它与图7(a)并列起来,就

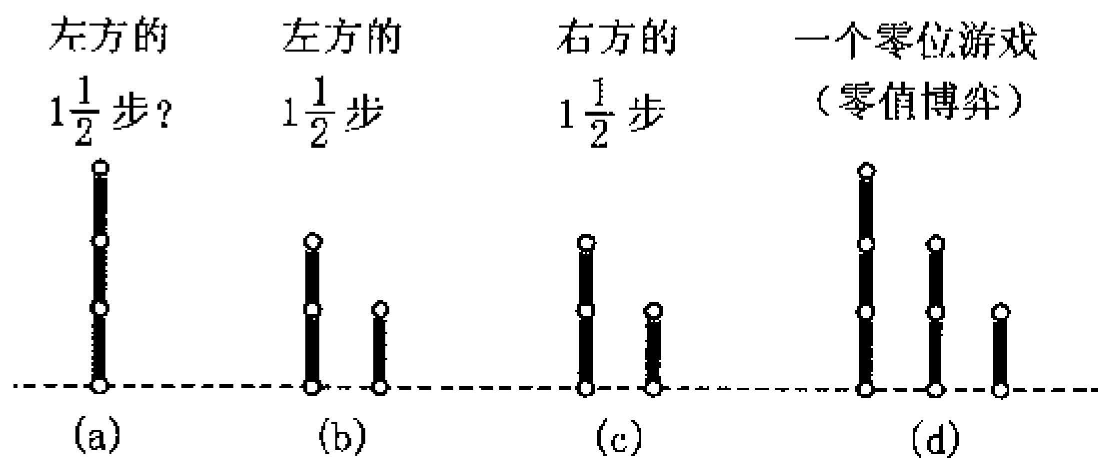



**图7.** 右方的边是否更多地受到左方的控制?

得出图 7(d).

在略显复杂的这一小小模式中,究竟谁赢?这时,双方各有一条边受到威胁,处于其对手的控制之下.如果一位局中人拿走他受到威胁的一边,而其对手也拿掉受威胁的另一边,此时双方就将剩下不受威胁的两步.如果他取走的是紧靠在其对手受到威胁边的下方的那条边,而其对手也照此行事的话,则双方将各剩下自由的一步.左方所剩下的另一种开局法显然是笨拙的,因为它将只留下接地的红边,而使右方多出一步,从而可以稳操胜券.

那么,右方的其他走法又将如何呢?如果取走的是最右面的红边,那显然是笨拙的办法,因为他可以干得更好一点,先取走中间的那条红边而使一条蓝边消亡.这时,左方的合理回应是砍掉三边成一链的中间那条蓝边,这种办法对他的获胜是足够了.于是我们通过上述分析,可以看到谁先走谁就会输.我们再次遇上了零位游戏(零值博弈)的情况.而这似乎与我们一开始的直观猜测有些儿矛盾.其实,图 7(a)与图 7(b)对左方来说是等价的,优势都是 $1\frac{1}{2}$步.

## ……有没有$\frac{1}{4}$步的优势呢?

对图 8(a)来说,右方最高的一边部分地处于左方的控制下,但同样也部分地处于右方的控制下,那么,对右方来说,它是否要比中间的那条红边价值更高一些?我们已经知道,中间的那条红边对右方值半步,那么,右方的一对红边合起来算,是不是至少值一个整步,压倒左方的一条边.这样说,此图是不是右方占优势呢?

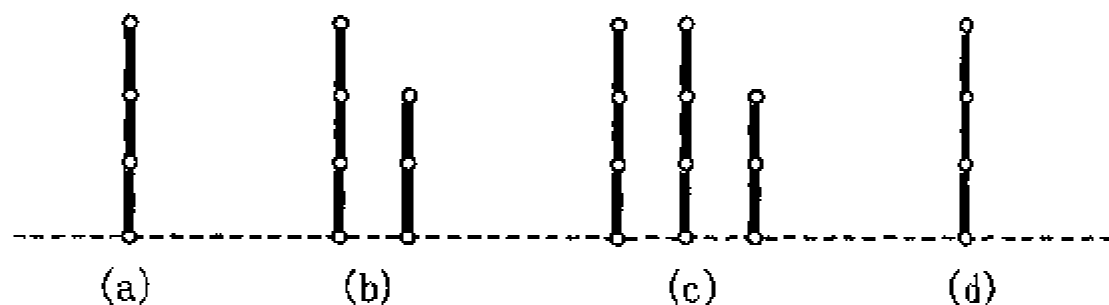



图 8. 右方的边是否比左方的边值得更多?

一旦游戏进行,此种直观看法即被排斥.左方一旦行动时,他只要走一步就赢了,这表明图 8(a)肯定有利于左方.但若我们把对右方有利的半步与之并列,像图 8(b)那样.这时可以看到,右方先走时可赢,因为他只要取走位置最高的那条红边;右方后走时仍然可赢,因他可以取走剩下来的最高红边.由此可见,图 8(a)虽然对左方有利,但其价值竟不值半步.这样说,由于整条链

有三节高度，莫非是值$\frac{1}{3}$步？不！决非如此. 我们留给读者自己去证明，图8(a)的两个复本正好与右方的半步优势相互抵销. 证明并不困难，你只要证明，对图8(c)来说，后走者肯定能赢就行了. 由此可见，图8(a)对左方来说，仅仅是$\frac{1}{4}$步的优势.

试问：图8(d)的价值是多少？

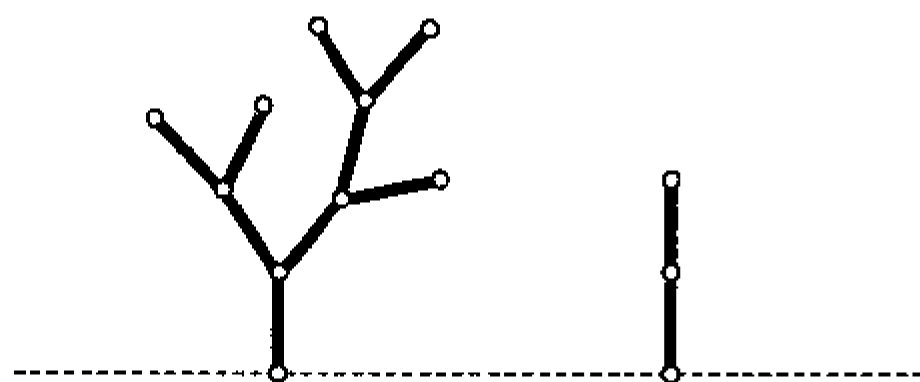


**图9.** 值为$9\frac{1}{2}$的一个伐木游戏.

图9是一个值为$9\frac{1}{2}$的伐木游戏，左边的小树之值等于9，而右边剩余部分之值为$\frac{1}{2}$. 两位局中人的走法如何呢？右方只有唯一的一条红边，他只有一种走法. 其结果将导致值为$9+1=10$的状态，但左方则既可以砍掉最上面的树枝，使值为$8\frac{1}{2}$，或者干脆去掉右边的$\frac{1}{2}$，而使值变成9. 显然后面一种走法更好. 由于左方的最佳走法使值为9，而右方的走法使值为10，我们可以用下列记法加以表述：

$$\{9|10\}=9\frac{1}{2}.\left(\text{念作“}9\text{ 竖 }10\text{ 等于 }9\frac{1}{2}\text{”}\right)$$

类似地，更一般的记法为

$$\{n|n+1\}=n+\frac{1}{2}.$$

其中，最简单的情况是

$$\{0|1\}=\frac{1}{2}.$$

即我们开始时引用的例子. 我们也有更简单的记号

$$\{n|\ \}=n+1.$$

此处$n=0,1,2,\cdots$左方有$n+1$种自由走法，所以他走过之后，还留下$n$种自由走法，而右方则根本动不了. 此种类型的最简记号是

$$\{\ |\ \}=0.$$

这意味着，如果双方都已没有符合游戏规则的走法，则博弈之值为零.

## 初学者的滑雪跳跃游戏

图 10 中有几个分别代表左、右方的滑雪者正在做下面的游戏. 左方每次可以移动他的任何一个滑雪者向东走一格，右方则向西走一格，如果途中没有其他滑雪者挡路的话. 在作这样移动

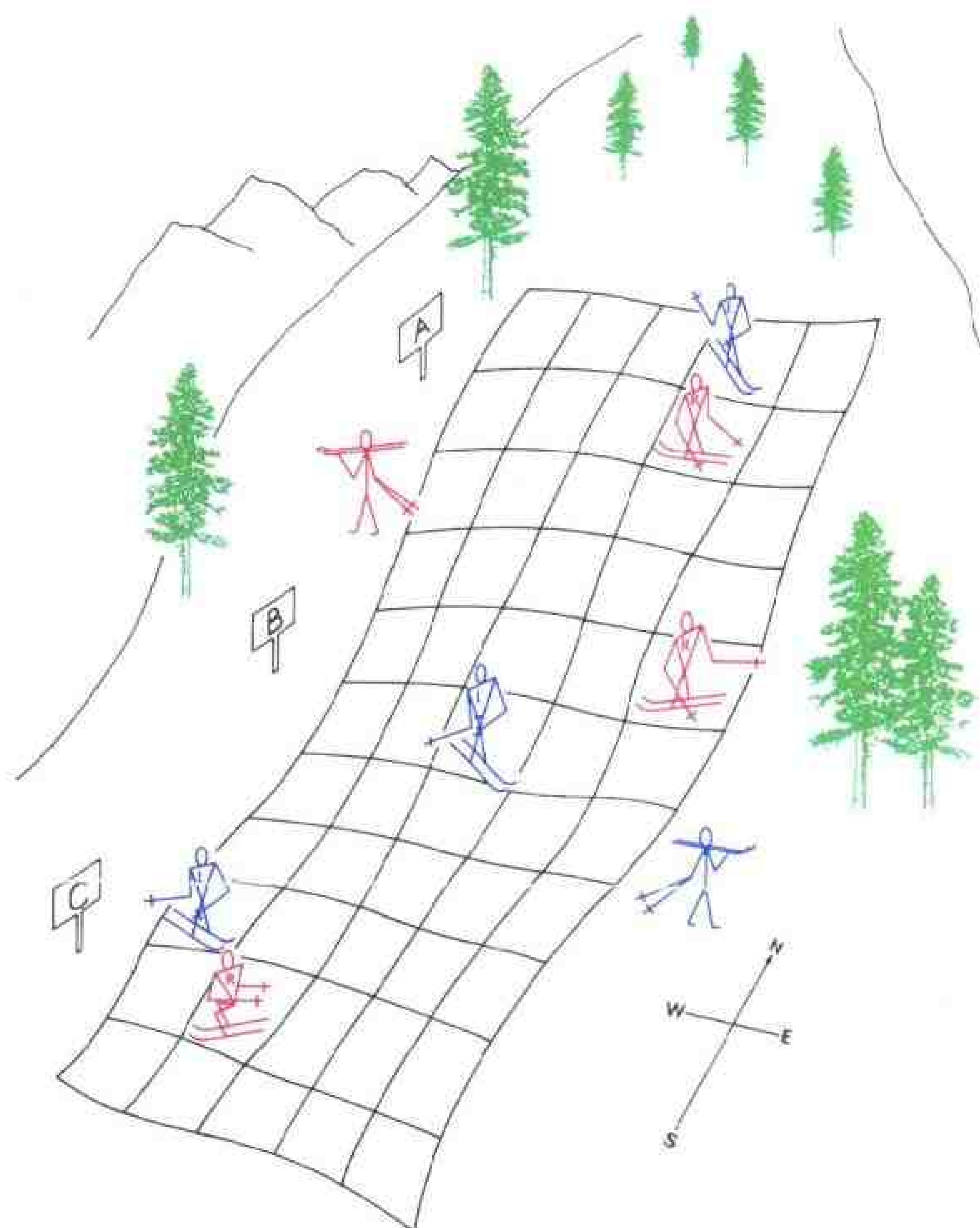



图 10. 一种滑雪跳跃游戏.

时有可能使滑雪者离开斜坡，以后他就不再参与这个游戏了．任何两个滑雪者都不能占据同一方格．如有一个滑雪者正好位于对方一个滑雪者所占方格的上面，他就可以一跃而过，跳到下面的方格（如它是空格的话）中去．被跳过者则认为是受到羞辱，从此失去了“跳”的权利——实际上他受到了降级处理，从跳跃者降为一个普通的滑雪者！

在此游戏中，此外并无其他走法，当一位局中人所拥有的全部滑雪者都已离开滑雪斜坡，轮到他走而无法走动时，就算他输了．现在让我们来看一看几个简单例子．在图11(a)中，左方的唯一滑雪者已处于右方滑雪员之东，所以不再有跳跃的可能．由于左方的人员可以走5次而右方只有3次，所以博弈的值为 $5-3=2$，有利于左方．

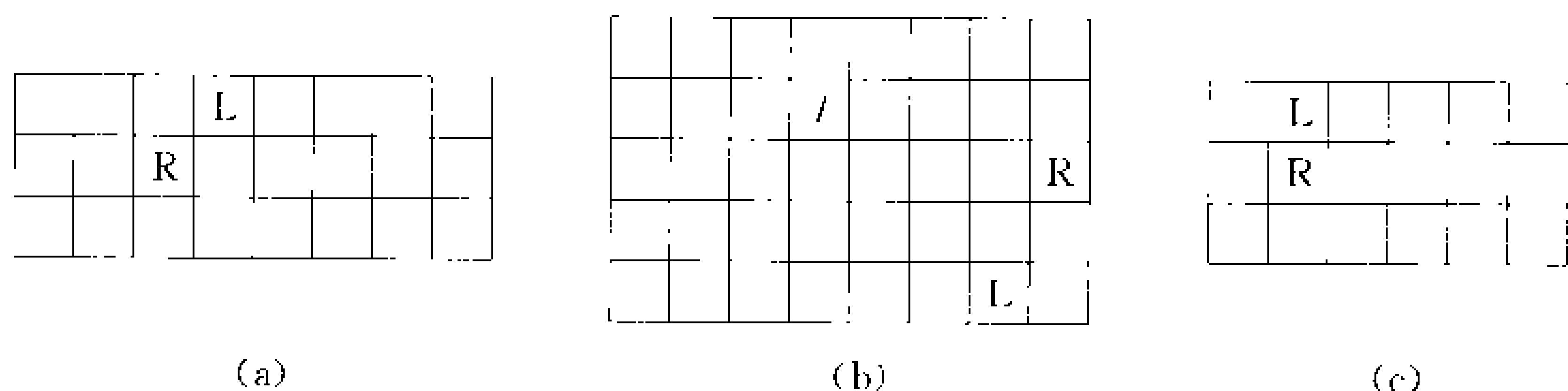



**图11.** 几个滑雪跳跃例子．

我们也可以类似地计算其他不能跳跃的情况．在图11(b)中，左方只有一个人员处在右方的上一行，另一人则在下面，但仍然不能跳跃，因为左方的那个位于上一行的滑雪者已经降了级（图上用小写字母 $l$ 来表示），而另一人则在右方人员的下面两行，受不到什么威胁．左方的两名滑雪员合计可走7步，而右方却有8步可走，所以博弈之值为

$$2+5-8=-1.$$

或者说，右方有1步之利（左方为-1步）．

现在来看图11(c)，此时左方的滑雪者可以跳越右方人员．这样做时，博弈之值将是 $4-2=2$，显然优于他向东滑行一格时所得之值 $3-2=1$．另一方面，右方的走法只能是到达一个值为 $4-1=3$ 的位置．由此可见，这一局势的博弈值是

$$\{2\mid 3\}=2\frac{1}{2}.$$

一般地说，如果左方在场上只有一名滑雪员，其前面有 $a$ 个空格（从而有 $a+1$ 步可走），右方的一名滑雪员前有 $b$ 个空格，而两名滑雪员中的一个正处于跳越对方之位置，则根据跳越者是左方还是右方，博弈值将分别为

$$a = b - \frac{1}{2} \quad 或 \quad a = b + \frac{1}{2}.$$

我们可以认为，迫在眉睫的一步跳跃对作出跳跃的局中人来说，可值半步.

图 12 给出了 3×5 场地上只有两名滑雪员，而左方可以或先或后地跳过右方人员的各种局势的博弈值：

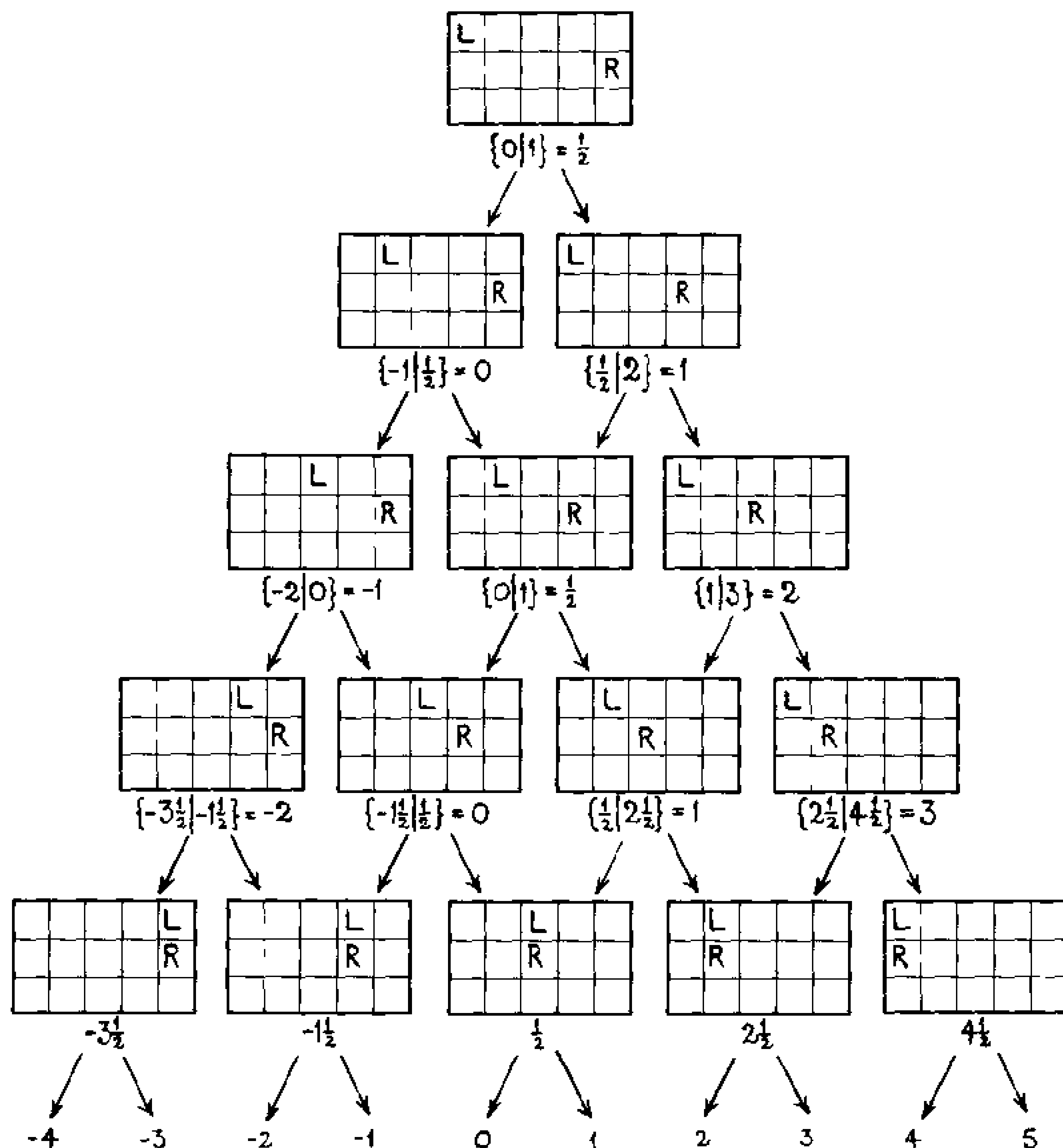



图 12. 在 3×5 场地上的各种滑雪跳跃局势.

$\{2\frac{1}{2}|4\frac{1}{2}\}$局势中添加一个右方正好走3步的情形，并由此验证先走者是要输的．我们现在对图12加以总结，如果马上可以跳跃或者两局中人与棋盘上的中线等距，则一个潜在的跳跃可值半步；如跳越者比被跳越者更靠近中线，那跳跃就值一步（就像是一桩唾手可得之事）；在其他情形，跳跃就一文不值（见图13）．

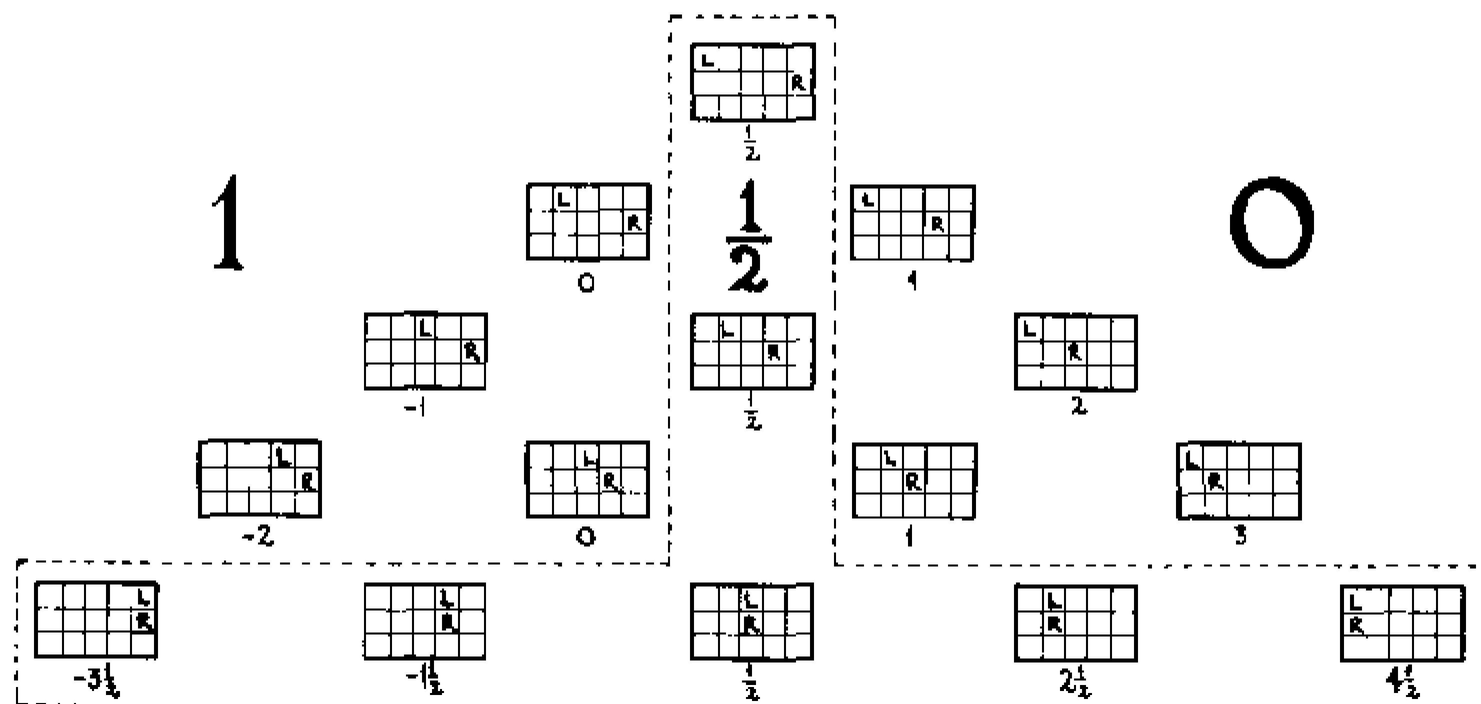
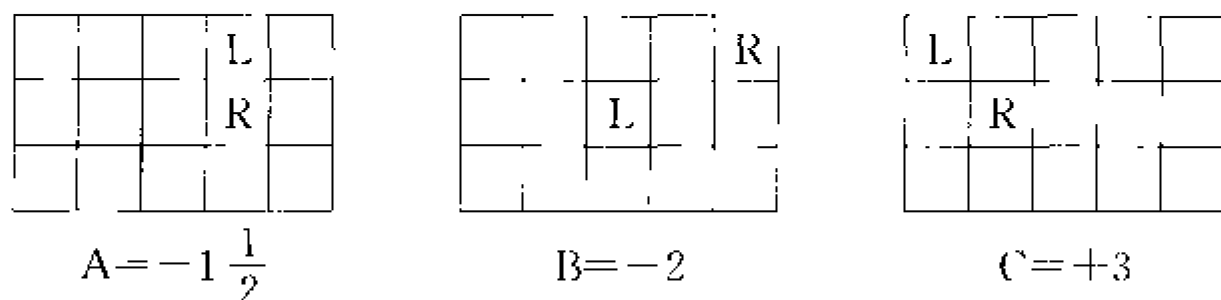



图 13．潜在的跳跃之值为 $1,\frac{1}{2}$ 或 0．

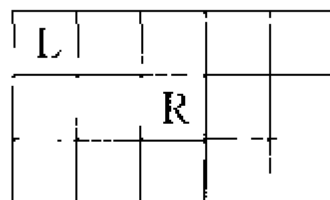
我们现在已能作出预测，在图10那样的复杂滑雪跳跃局势中谁将会取胜．由于A，B，C三对离得甚远，彼此行动不受影响，所以我们只要把三对（见图14的A，B，C）博弈值相加就行．




$A=-1\frac{1}{2}$　　$B=-2$　　$C=+3$

图 14．图10中滑雪跳跃局势的博弈值．

由图12可直接读出A，C之值分别为$-1\frac{1}{2}$与+3，对B来说，显然它与




（值为2）相似，仅仅是L与R的角色逆转，所以其值为－2．因此，三个值之和是

$$-1\frac{1}{2}-2+3=-\frac{1}{2},$$

于是可知右方领先半步，不论谁先走，右方总是可赢的. 较费思索的是他先走的情况. 他究竟应该如何动作呢? 有三种可能选择:

$$-1\frac{1}{2} \text{至} -1(\text{局势 A}),\quad -2 \text{至} -1(\text{局势 B}),\quad 3 \text{至} 4\frac{1}{2}(\text{局势 C})$$

这些走法将分别使他损失 $\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$ 步. 所以唯一能使他保持优势的办法是走 A，以避免左方的跳跃.

## 癞蛤蟆与青蛙

左方训练了一些癞蛤蟆(又名蟾蜍，拉丁文学名 Bufo vulgaris)，右方训练了一些青蛙(拉丁文学名 Rana pipiens)，来玩下列游戏：每位局中人可驱使他的一个动物向前方行进一个方格，或者跳过对方的一个动物，进入前面的空格中去. 癞蛤蟆只能向东，青蛙只能向西(癞蛤蟆向前，青蛙向后行动). 本游戏遵循一般常规：谁不能动时，他就算输. 请读者对图 16 中各局势的值加以验证. 对图 15 来说，谁是赢家? 赢多少?

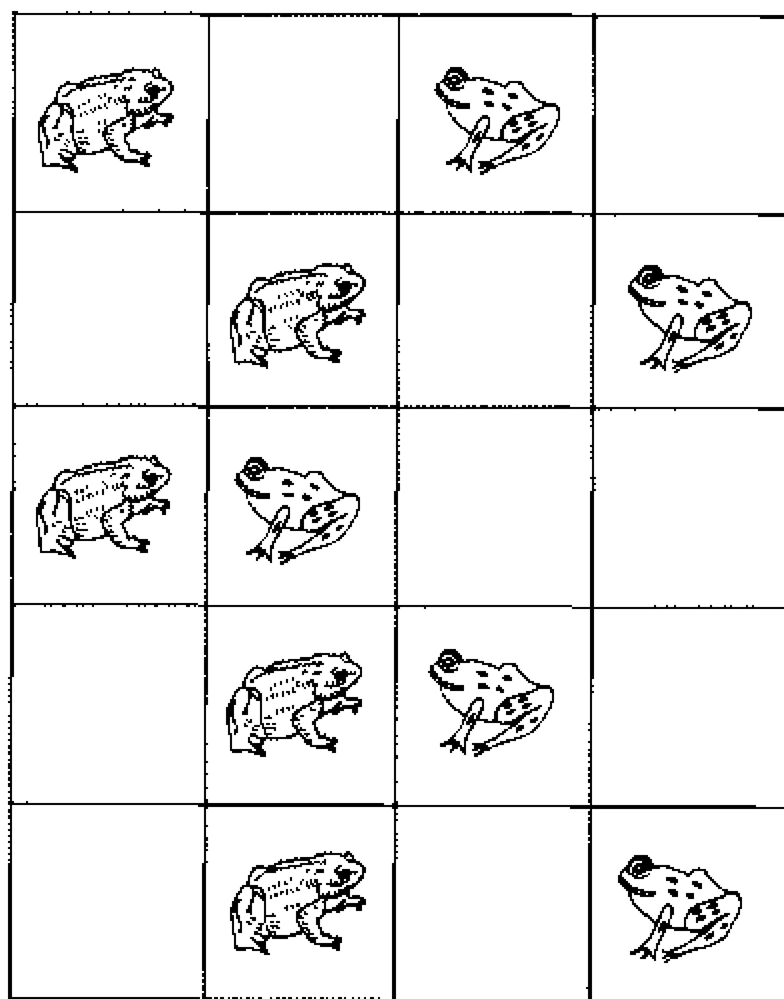


图 15. 癞蛤蟆与青蛙的较量.

图 16. 四格癞蛤蟆与青蛙游戏中各种局势的值.

## 咱们的办法管用吗?

讲到这里,读者们的心头难免要产生几个问题. 在计算各种局势之值时,真的可以相加吗? 如果它们是分数,也能这样做吗? 把先走先输的局势认作零值,这样的做法可取吗? 以上两个问题的答案都为"是". 常言道:要知道布丁的滋味,你最好自己尝一口,对实用主义的读者来说,他最好亲自动手试一试,如果他能算出某种局势的值,无疑他肯定会选取能赢的一方. 而那些数学上的怀疑论者只能耐心听取我们的继续解释.

# 增　　补

在这一标题下我们将时而插入一些附加的细节与例子，有些读者会感兴趣，但或许会稍稍打断其他读者的一般思路.

## 博弈(游戏)是什么?

伐木游戏与滑雪—跳跃游戏在这本《稳操胜券》的第一部分所提到的几乎一切游戏中具有代表性：

1. 有两位局中人，称为左方与右方.

2. 存在着几种，一般是有限多种**局势**，通常有一个特殊的**开局状态**.

3. 具有明确的**规则**来安排每一步**走法**，以使任一局中人从某一局势转移到他所**选择**的下一局势.

4. 左方与右方在游戏进行的全过程中都应交替地行动.

5. 按**正常规定**，不能行动的局中人就是**输家**.

6. 游戏规则的安排将使一个局中人无法行动，此时博弈即告结束. 这称为**终止条件**. 因此，不允许反复走动而打成平局.

7. 两位局中人完全了解进行中的一切情况，即博弈具有**完全信息**.

8. 不存在**随机行动**，例如抛掷骰子或洗牌等.

读者应当检查一下他自己喜爱的博弈游戏能满足多少条上述条件. 从下文注释中他也将看到，本书后面章节中所讨论的一些博弈并不完全满足上述条件. 但是，我们要讲到的博弈统统都能满足条件7与8.

**吃井字(O与X)**不满足条件5，因为在此种游戏中，双方打成平局是可能的，不能行动的一方未必就是输家. 我们将在第22章中进行全面分析，并将讨论它的各种推广，*例如***五子棋**.

**象棋*** 也不满足条件5. 其中有的局势是由于王棋不断被"将"而打成平局(此时最后一个走棋者不算赢家);也有的局势是长捉成和,不断照将是其中的一个特例). 象棋的全面分析将留待今后的专著.

"tied"与"drawn"两个单词通常认作同义词,可以随便互换,其意思都是指双方打成平局.但在大西洋两岸,**用法略有差异. 现在我们建议把"drawn"称为"**和棋**",即进行无休无止的长捉而形成拉锯战;另一方面,建议把"tied"称为"不分胜负",此时局势已经了结,但根据下棋规则,没有一方能够取胜.

**勒多,蝰蛇与扶梯,十五子游戏**都具有完全信息,但由于使用了抛掷骰子的办法,因而存在着随机性走法.

**战船,指战,三指莫拉**与**剪一纸一石**,这些博弈里头没有随机性走法,但对方如何处理其道具或手指,其情况是若明若暗的. 因为在手指博弈游戏中,规定双方要同时出示其手势,而不是交替式的一先一后.

**垄断独占**有几个条件不能满足,像**勒多**一样,它具有随机性走法,局中人也有可能超过两人. 对手们对扑克牌的配置不具备完全信息,从而原则上可以把游戏一直玩下去.

**独粒钻石**(消磨时光)是用扑克牌玩的游戏,**短木栓**(第23章)是单人游戏,在前一种场合,牌的配置由机会决定.

我们将在第25章中讨论的**生命游戏**,是一种既无局中人,而且永不休止的博弈!

**扑克**牌游戏的主要兴趣在于信息的不完整,随机性走法,以及有三个以上局中人时**结盟**的可能性.

**桥牌**的特点是有两个局中人,而每方又有两名成员,局中人即使对"他"自己手中的牌也不具备完整信息.

**网球,曲棍球,棒球,板球,长曲棍球,篮球**等都是两个局中人的游戏,但很难对"局势"与"打法"下正确定义.

**尼姆**(第2章),**惠德霍夫游戏**(第3章),**格隆第博弈**(第4章)除满足以上全部条件以外,还得外加一项:从任何一个局势出发,双方都能采取同样行动. 此种博弈称为**无偏袒的**. 两位局中人有不同选择时的博弈叫做**有偏袒的**. 红一蓝伐木游戏是一种有偏袒的博弈,因为左方只能抹掉蓝边,右方只能抹掉红边. 滑雪一跳跃游戏也类似,因为不同的局中人只能控制不同的滑雪者.

---

* 译者注:本书中所谓的象棋,是指国际象棋而言.

** 译者注:指英、美两国,他们是同文同种的. 但英国英语与美国英语也存在着不少差异.

**点与盒(造房子)**通常可由拥有较大盒子数者取胜,所以它不满足正常规定.但是,我们将在第16章中看到,实际上几乎总是可以将它改造成为一个无偏袒的博弈以满足正常游戏规定.此种博弈的理论,部分与**开勒司**,**道森开勒司**游戏(见第1章)有密切联系.

第18章中将要论述的**西尔维钱币**游戏,是一种不合常规的无偏袒博弈,因为它规定最后一个能走的人是*输家*.我们将在第13章中说明,怎样来玩此种**反常规**的无偏博弈的"和博弈".

**狐与鹅**是一种不满足终止条件的追赶博弈,但在第20章中,我们将把它的值同其他能满足条件的有偏博弈的值加以比较.按第11章中的概念来说,它是一种有圈游戏.

**法军狩猎**与其他有偏袒的追赶博弈将在本书第21章中论述.

本书不拟对**围棋**进行分析,但它确是一种非常"热门"的有偏袒博弈.围棋玩家也许会发现本书第6章中所讲的热图解析技术对他们有用.*

## 什么样的走法算是好的?

我们通常把一种走法说成是"好"的,如果它能使你获胜的话;若它不能,那就是"坏"的.在本书的绝大部分,我们致力于寻找好的走法,或者证明不存在好的走法时,这样的说法显然已经足够.

但在实际生活中所遇到的博弈游戏时,你在作出行动抉择时,往往还有其他准则.如果你是输家,那么按照上述意义,你的所有选择都将是坏的,但实际上它们并不完全等价,你也许会挑选一种使局势过于复杂,对手无力分析的走法(**长绳原理**)**.

甚至在某些局势中你宁愿使用坏的走法而不用好的.你的对手对某种博弈尚处于初学阶段而你则早已精通,这时即使使用坏的走法你还是可以取胜,但这样一来就可防止泄露机密或窍门.有时候,理论上的最佳走法只能使你赢到一美元,而另一种理论上要输一美元的办法,由于你的对手难以发现隐藏得相当巧妙的对策,倒有可能使你赢得一百美元.此外,你也有可能是个玩牌老手,开始时故意装愚守拙,迷惑对方,以便后来赢得更大的赌注.

## 图8(d)值$\frac{3}{4}$步

图8(d)那样的蓝—红伐木游戏局势可用以下办法求值.在每条边的旁边注上一个数字

---

* 译者注:重点为译者所加,值得中、日、韩围棋高手与围棋界人士重视.由于热图解析技术极为深奥难懂,迄今未闻任何围棋名手加以应用.

** 译者注:此语颇幽默,即"给根长绞索,好让他上吊"之意.

(图 17(a))以表示在此边抹去时局势的值. 于是,蓝边旁最大的数字$\left(\frac{1}{2}\right)$是左方的最佳选择,而红边旁最小的数字是右方的最佳选择. 于是我们将会得到记号

$$\left\{\frac{1}{2}\middle|1\right\}.$$

它暗示值$\frac{3}{4}$. 于是我们加上$\frac{1}{4}$,再减去 1(如图 17(b)),得出了一个值为 0 的局势. 请读者们自己验证一下. 此时先走者必输.

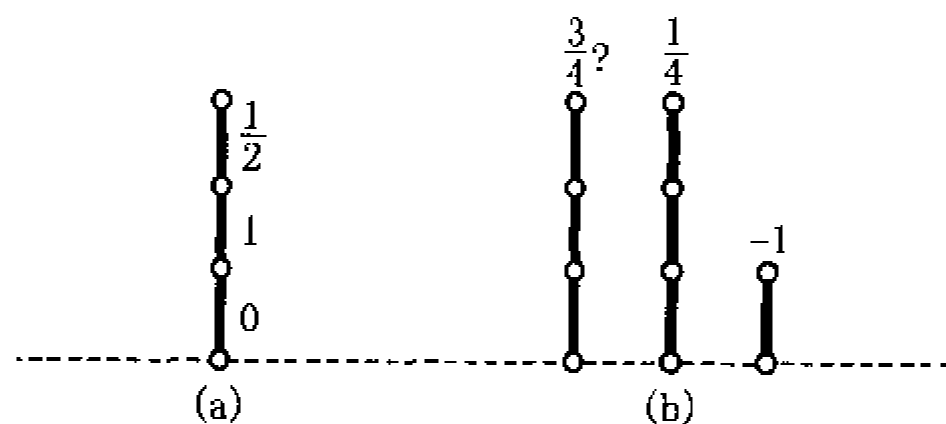



图 17. 怎样得出$\frac{3}{4}$步的优势.

建议读者们自行验证一下图 18 中给出的各种局势的博弈值(数值表明有利于左方的步数).

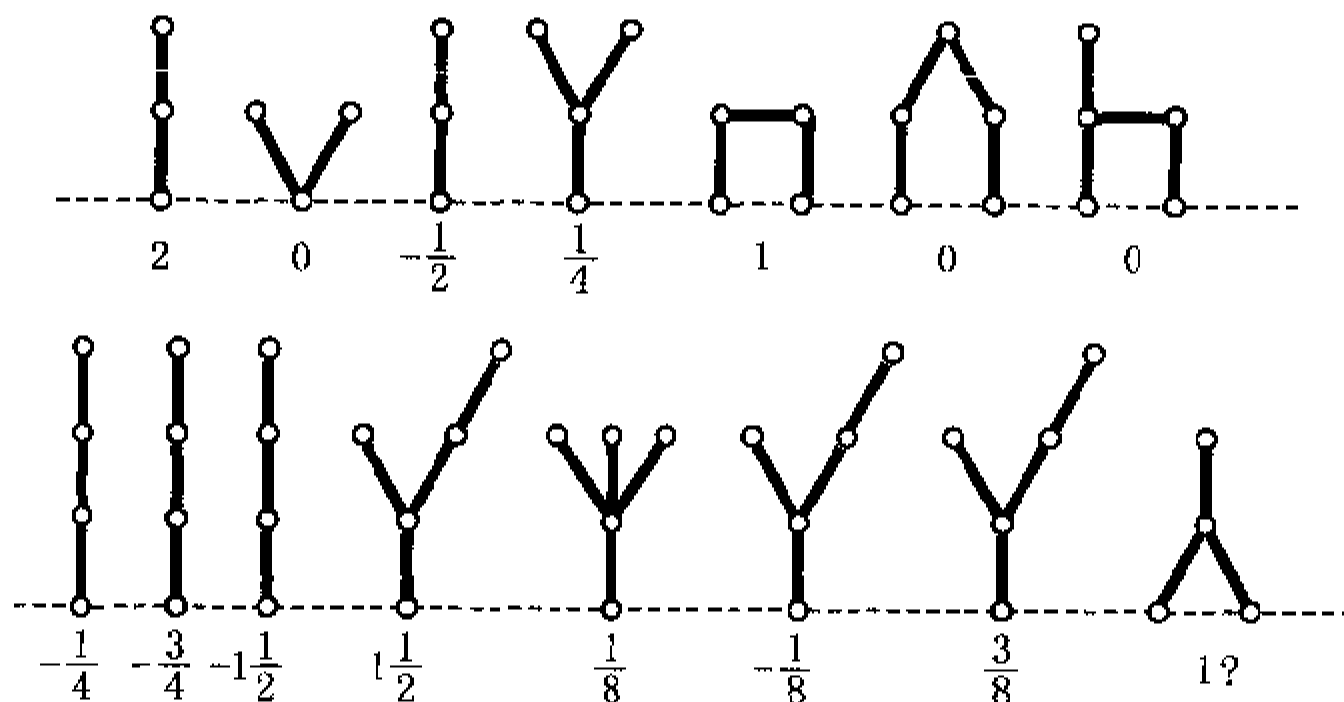



图 18. 某些蓝—红伐木游戏的值.

## 参考文献及进一步阅读材料

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976.

J. H. Conway, All games bright and beautiful, Amer. Math. Monthly, **84** (1977) 417—431.

J. H. Conway, A gamut of game theories, Math. Mag. **51** (1978) 5—12.

Martin Gardner, Mathematical Games, Sci. Amer., each issue (monthly).

Donald Knuth, "Surreal Numbers", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

# 第2章

# 找出正确数，本身挺简单

简单，简单，简单第一. 我要说，让你的事务是二、三桩而不是成百上千桩；让半打计算代替成千上万，而且是扳扳指头的手算.

——亨利·戴维·托雷，《瓦尔登》

还得点数天上的星辰.

——约翰·弥尔登，《失乐园》，Ⅷ，80

在伐木与滑雪　跳跃游戏中我们已经看到它们由某些互不影响的部分组成，要做的事情是把几部分的值相加，以求出对左方有利的步数. 我们也已看到：可能出现半步与$\frac{1}{4}$步. 现在要来阐述，所谓博弈相加，其确切意义是什么，怎样才能求出其值.

## 数与游戏的对应

让我们小结一下已知内容，用记号

$$\{a,b,c,\cdots|d,e,f,\cdots\}$$

来标志一个局势：其中左方可走到值为 $a, b, c, \cdots$ 的局势；而右方的走法可使值变为 $d, e, f, \cdots$. 若采用此种记法，则整数便是

$$0=\{\ |\ \},\ 1=\{0|\quad\},\ 2=\{1|\quad\},\ \cdots,\ n-1=\{n|\quad\}.$$

就零位（零局势）而言，任何一方都不能行动. 对左方有 $n+1$ 个自由行动的局势而言，他走动一步之后还将留下 $n$ 个自由行动，而右方则根本动不了.

类似地，负整数可表示如下：

$$-1=\{\quad|0\},\ -2=\{\quad|-1\},\ -3=\{\quad|-2\},\ \cdots,\ -(n+1)=\{\quad|-n\}.$$

我们也发现了含有 $\frac{1}{2}$ 步的某些值：

$$\frac{1}{2}=\{0|1\},\ 1\frac{1}{2}=\{1|2\},\ 2\frac{1}{2}=\{2|3\},\ \cdots,$$

$$-\frac{1}{2}=\{-1|0\},\ -1\frac{1}{2}=\{-2|-1\},\ \cdots\text{等等}.$$

在第 1 章图 6(a)的伐木游戏局势中，我们业已证明$\{0|1\}$的性态如同半步. 在第 1 章的图 8(a)中我们也已讨论了值为 $\left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\}$ 的伐木游戏，并证明它的性状相当于 $\frac{1}{4}$ 步. 于是我们猜测：

$$\{0|1\}=\frac{1}{2},\ \left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4},\ \left\{0\middle|\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{8},\ \cdots\text{等等}.$$

这些记号的确切含义尚待后文论述.

有没有博弈值等于 $\frac{5}{8}$ 的局势？当然是有的. 我们只需像图 1 那样，把值为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{8}$ 的伐木游戏局势加一加就行.

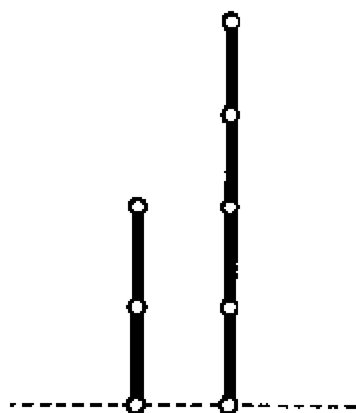


**图 1.** 值 $\frac{5}{8}$ 步的蓝—红伐木游戏局势.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ 如采用我们的新记法，可以写作 $\{0|1\}+\left\{0\middle|\frac{1}{4}\right\}$，那么，从局势 $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ 出发，能有几种

走法呢?

任何一方都可从第一支或第二支下手,但不动另一支,因而左方的选择是

$$0+\frac{1}{8}\quad(\text{他先动第一支}),$$

$$\frac{1}{2}+0\quad(\text{他先动第二支}).$$

显然他应选后者,因它将留下半步的好处而不是只有$\frac{1}{8}$步. 类似地,右方的选择是

$$1+\frac{1}{8}\quad\text{与}\quad\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

当然他宁可选择后者,因为它只给左方留下$\frac{3}{8}$步好处,而不是$1\frac{1}{8}$步好处. 以上我们业已作出说明,从$\frac{5}{8}$出发的最佳走法是左方走到$\frac{1}{2}$而右方走到$\frac{3}{4}$. 在我们的简略记号中,可以记为

$$\frac{5}{8}=\left\{\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{4}\right\}.$$

与此完全类似,我们可以添加形如$\frac{1}{2^k}$的各个不同分数,并证明

$$\frac{2p+1}{2^{n+1}}=\left\{\frac{2p}{2^{n+1}}\middle|\frac{2p+2}{2^{n+1}}\right\}=\left\{\frac{p}{2^n}\middle|\frac{p+1}{2^n}\right\}.$$

用话来说,那就是:分母为2的整数幂的分数可以表示成象征左方选择与右方选择的两个最接近于它的分数并将它们约分成最简分数,例如:

$$3\frac{57}{128}=\left\{3\frac{56}{128}\middle|3\frac{58}{128}\right\}=\left\{3\frac{7}{16}\middle|3\frac{29}{64}\right\}.$$

## 简单性给出答案!*

我们刚讲过的记号是非常简单的. 那么,究竟什么是$X=\left\{1\frac{1}{4}\middle|2\right\}$? 在滑雪-跳跃游戏中我们已经讲过,不一定能取$1\frac{1}{4}$与2的平均数$1\frac{5}{8}$. 为什么不取? 我们可通过下面的求和办法

---

* 译者注:此语与上文的"Which Numbers are which?"前后呼应,实际上是作者们所采用的自问自答笔法. 在本书中,类似的写法很多,为节省篇幅起见,今后不再一一指出.

$$X+\left(-1\frac{5}{8}\right)=\left\{1\frac{1}{4}\middle|2\right\}+\left\{-1\frac{3}{4}\middle|-1\frac{1}{2}\right\}$$

来检验．因我们已知$-1\frac{5}{8}=\left\{-1\frac{3}{4}\middle|-1\frac{1}{2}\right\}$．在此和中，仅当双方都没有获胜走法时我们才能肯定$X=1\frac{5}{8}$．

自分支 $X$ 出发的两个走法都是失败的，这是由于$1\frac{5}{8}$严格地处于$1\frac{1}{4}$与 2 之间．所以左方的走法将使总值变为$1\frac{1}{4}-1\frac{5}{8}$，即成为负数；而右方的走法将使它转变为正数$2-1\frac{5}{8}$．不过，右方倒是有一个较好办法的，他可从$-1\frac{5}{8}$走到$-1\frac{1}{2}$．为什么？

其答案是，在新的博弈

$$X+\left(-1\frac{1}{2}\right)=\left\{1\frac{1}{4}\middle|2\right\}+\{-2|-1\}$$

中，为了同样的理由，由于$1\frac{1}{2}$严格处于$1\frac{1}{4}$与 2 之间，所以任何一方都不愿在分支 $X$ 中行动．左方的唯一希望是用$-2$取代$-1\frac{1}{2}$，而右方只需回敬他从 $X$ 到 2，就会马上得出零位状态．

于是我们看到，$\left\{1\frac{1}{4}\middle|2\right\}$的值不是$1\frac{5}{8}$的理由是：$1\frac{5}{8}$并不是严格位于$1\frac{1}{4}$与 2 之间的最简数．左方可以选择具有同样性质的另一数$1\frac{1}{2}$．因此，在我们计算$X+\left(-1\frac{5}{8}\right)$之前，理应先考虑$X+\left(-1\frac{1}{2}\right)$．

现在，$1\frac{1}{2}$必然是$1\frac{1}{4}$与 2 之间的最简数，因为较此更简单的数 1 与 2 已经不适合了．我们将用来证明事实上 $X$ 确实等于$1\frac{1}{2}$．

与上文所说的类似，对局势

$$X+\left(-1\frac{1}{2}\right)=\left\{1\frac{1}{4}\middle|2\right\}+\{-2|-1\}$$

而言，任何一方都不想在分支 $X$ 中采取行动，所以我们只需考虑从$-1\frac{1}{2}$作出的行动．在右方走

过后，总和为 $X+(-1)$，对此，左方的反应是在分支 $X$ 中行动，从而得出正值 $1\frac{1}{4}-1$，这是因为 1 并不严格地处于 $1\frac{1}{4}$ 与 2 之间，而是小于 $1\frac{1}{4}$. 在左方自 $-1\frac{1}{2}$ 走过后，总和将是 $X+(-2)$，对此，右方的反应将是走到状态 $2-2$，因为 2 并不严格地处于 $1\frac{1}{4}$ 与 2 之间，2 就是 2 嘛！

上述论证可一般地用来证明所谓的**简单性法则**，今后我们将一再引用：

> 如果有任何数能满足已知条件，
> 则其中最简单的数就是答案.

**简单性法则**

如在记号

$$\{a,b,c,\cdots|d,e,f,\cdots\}$$

里，所有的选择都是数目，如果数 $x$

严格大于 $a,b,c,\cdots$ 中的任一个，而且
严格小于 $d,e,f,\cdots$ 中的任一个，

则 $x$ 能够**适合**. 如所有的选择都不适合，则 $x$ 就是最简单的适合数. 至于 $x$ 的选择，你们可以采用前面几节中讲过的特例.

譬如说，对某一博弈 $G$ 来说，左方的最好办法是走到值 $2\frac{3}{8}$ 的局势，而右方的最佳走法是走到值为 5 的局势，则可以证明 $G$ 本身的值肯定便是 3，我们以前曾把它记为 $\{2|\ \}$ 的形式. 在此形式中，值 3 只有唯一的选择 2. 它却不在 $2\frac{3}{8}$ 与 5 之间，然而 3 却是行的. 应指出，即使是其中的一位局中人，这里是右方，不能从数 $c$ 行动，简单性法则还是起作用的. 对形如 $\{a|\ \}$ 或 $\{\ |b\}$ 形式的博弈（两位局中人之一仍然不能行动）它也起作用. 譬如说 $\{a|\ \}$ 是一个数目大于 $a$ 的 $c$，但没有具此性质的行动选择. 实际上，它是整数 $0,1,2,\cdots$ 中大于 $a$ 的数中最小的一个. 从而有 $\left\{2\frac{1}{2}\middle|\ \right\}=3$，$\left\{-2\frac{1}{2}\middle|\ \right\}=0$.

## 数的最简形

图 2 给出了迄今我们所学到的大部分内容. 中间的尺度表示通常的实数轴，用较粗的字体

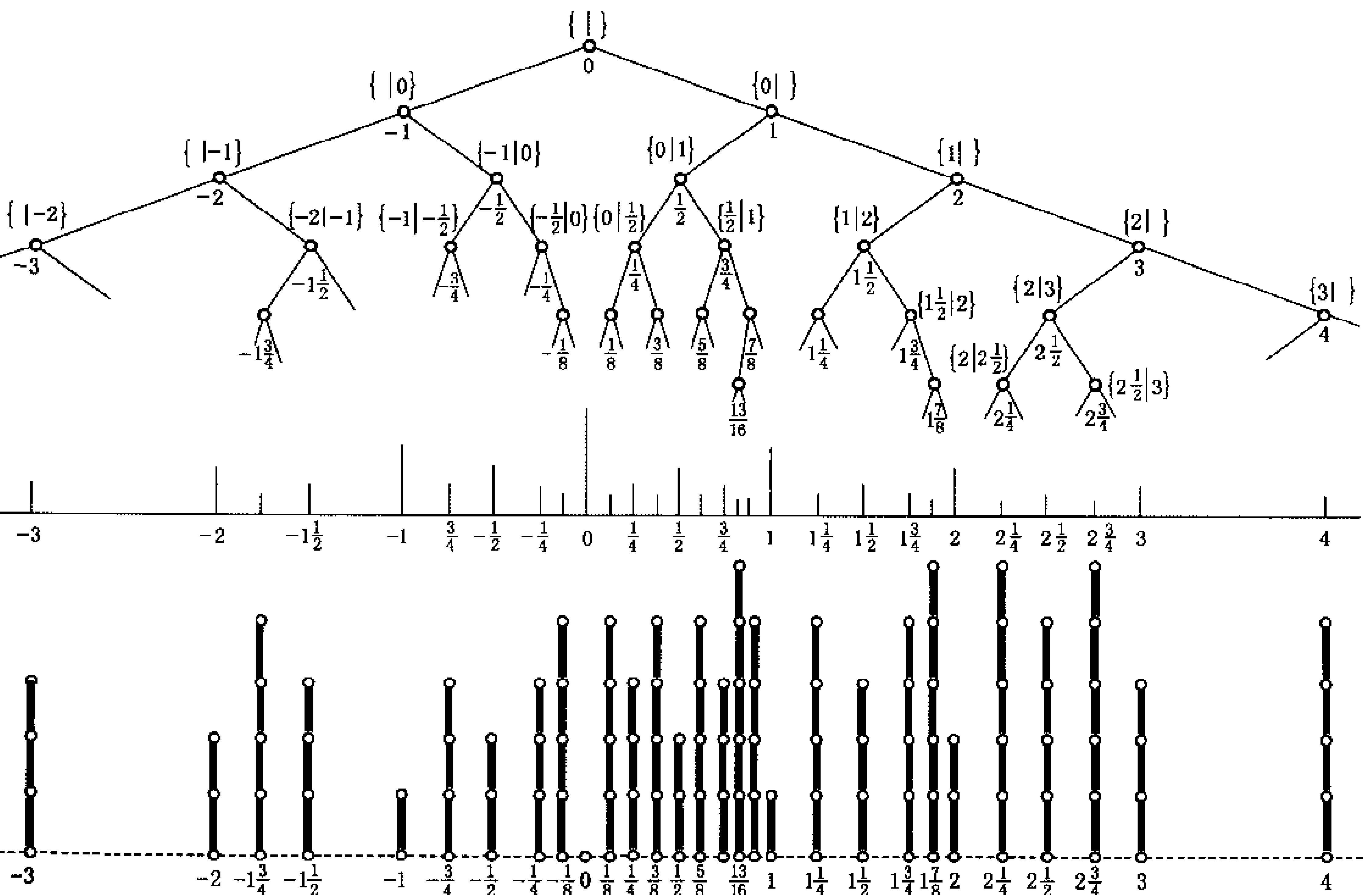



图 2. 澳大利亚两分树图，实数轴及伐木游戏中的灌木植株．

代表简单自然数.在下面与之对应的是伐木游戏中的灌木植株,数字越简单,植株越矮.

在直尺上面是一个颠倒的两分树,但因这里篇幅有限,我们不可能把它全部画出来,读者可参阅ONAG,第3-14页.* 两分树的每一分岔点表示的数,其最佳选择是树上位置高于它的,左、右两边与之最接近的数.例如1与2是$1\frac{1}{2}$的最优选择.对$\frac{13}{16}$,可找到$\frac{3}{4}$与$\frac{7}{8}$,从而有

$$\frac{13}{16}=\left\{\frac{3}{4}\middle|\frac{7}{8}\right\}.$$

(位于最左分支的数不存在左方走法,最右分支的数不存在右方走法).

由此种办法定义的数的选取数称为范式或**最简形**.下面是最简形的一些实例:

$$0=\{\ |\ \}$$
$$n+1=\{n|\ \}$$
$$-n-1=\{\ |-n\}$$
$$\frac{2p+1}{2^{q+1}}=\left\{\frac{p}{2^q}\middle|\frac{p+1}{2^q}\right\}$$

**数的最简形**

例如 $79=\{78|\ \}$,$-53=\{\ \ -52\}$,$\frac{47}{64}=\left\{\frac{23}{32}\middle|\frac{24}{32}\right\}=\left\{\frac{23}{32}\middle|\frac{3}{4}\right\}$.

数越是简单,它就越靠近树根(树根在顶上!).

## 切饼

妈妈做好了燕麦片家常小甜饼,见图3.她还没有把它们切成小方块,但已经划好了线.丽泰(右妹)与她哥哥莱夫蒂(左兄)打算来玩一个切饼游戏.哥哥可以沿着自上到下的纵线把任何一个长方形切成两个较小的矩形,而妹妹可以沿着自左至右的横线来切割.当两人中间的一个无法行动时,游戏到此终止.不能行动的那个孩子便是输家.

---

* 原注:本书多次提到的ONAG,是指康威的一部名著,《数与游戏》(On Numbers and Games)(尚无中译本),Academic Press, London and New York 1976年出版.

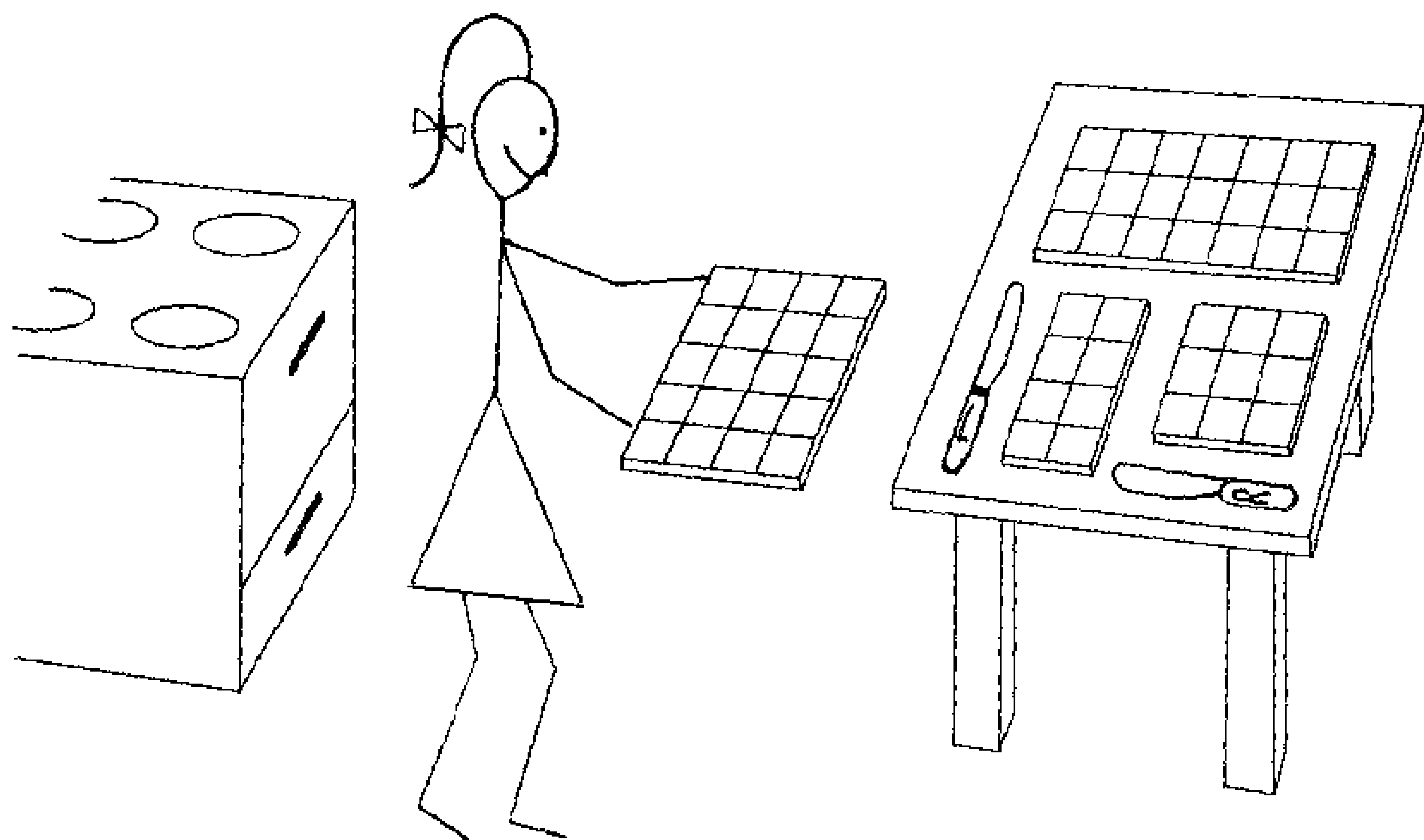


图 3. 准备玩切饼游戏.

我们将应用简单性规则计算本游戏中各种局势的值. 显然只剩下一个单位方块时，双方都不能行动，所以这是一个零位状态. 1×2 矩形可供左方走一步，而 1×3 矩形可供他走二步，其余情况依此类推. 这些图形转过一直角之后，可给右方提供相应的步数.

2×2 矩形是一个零位状态{−2|2}，因当左方先走时，他将给右妹留下二步，而右妹先走时，她必将给左兄留下二步. 现在让我们考虑 2×3 矩形，由于纵线比横线多，初看上去左兄会赢. 不，决非如此. 如果他先走，他必将留下一个 2×1 矩形(此时右妹有一步之利)，再加上一个 2×2 正方形，但后者是零位局势，我们可以忽略不计的. 但从另一方面来看，右妹也不见得能赢，因若她先走的话，唯一的开局法将给左兄留出四步自由行动. 由以上分析可知，2×3 矩形是一个零位{−1|4}.

但是，2×4 矩形的长度已足够使左兄得利，因他第一步就可将它切成两块 2×2矩形而获胜. 若右妹先走，他更是轻而易举地可赢. 事实上，我们将有

$$=\{-1+0,0+0\mid 3+3\}$$
$$=\{-1,0\mid 6\}.$$

简单性法则将会告诉我们,这种局势对左兄有着一步之利.

通过上述论证,我们可以造出一张表格(表1)来给出切饼游戏中各种不同矩形的博弈值.从表中可以看到一种有趣模式——表格的边界由拥有不同整数值而宽度为1的许多1×1单位正方形构成.然后是第二类边界,由一系列2×2正方形构成,说明起来略为难一些.所有四个宽为2或3,长为4或5的矩形都具有同样的值−1,意味着右妹对这些局势都有一步之利(我们已经看到2×2与2×3矩形有着同样的值0).接着,表格可以继续编造下去.第三类边界是4×4正

| 长 \ 宽 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 2 | −1 | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | |
| 3 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | −3 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | −4 | | | | 0 | | | | 1 | | | | 2 | | | |
| 6 | −5 | −2 | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | −6 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | −7 | −3 | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | −8 | | | | −1 | | | | | | | | | | | |
| 10 | −9 | −4 | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | −10 | | | | | | | | | | 0 | | | | | |
| 12 | −11 | −5 | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | −12 | | | | 2 | | | | | | | | | | | |

**表 1.** 切饼游戏中各种大大小小矩形的博弈值.

方形，第四类边界是 8×8 正方形，如此等等. 所有长为 4，5，6，7，宽为 8，9，10，11 的矩形，其值都等于 1，尽管形状不同，而其性态都宛如左兄的一步自由行动.

下面让我们来考虑一个较复杂的例子 5×10 矩形. 左兄可把 10 分割为 1+9，2+8，…，5+5 等，而我们可从表 1 中直接读出相应矩形 5×1，5×9，…等的值. 由此查得左兄的各种不同切法之值为

$$-4+1,\quad 1+1,\ -1+0,\ 0-0,\ 0-0.$$

而右妹可将 5 分割为 1+4 或 2+3，而得出宽度为 10 的两对矩形，其值分别为 9+1 或 4+4. 所以 5×10 矩形的值将是

$$\{-3,0,-1,0,0\,|\,10,8\}=\{0\,|\,8\}=1.$$

仿此办法，可将表 1 继续编造下去.

## 濯足节蛋糕*

每逢濯足节，左兄、右妹要来玩一种与上文略有不同的切蛋糕游戏. 左兄的走法是要把蛋糕直切成相等数目（数字不限）的较小矩形块（译者按：只许直切，但切时可以不限于一刀，等到全部切成数目相等的较小矩形块时，才算走了一步）. 右妹的做法与此类似，但必须通过横切. 切割时都必须在妈妈事先划好的线段上进行，一切度量全是整数.

此游戏的提出人与解决者是帕德里克・穆欣（Patrick Mauhin）——你能不能在他的表格（表 2）中看出一点名堂？下面让我们在表 2 中挑出一个例子来算一算：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 7 | 4 | 6 | 1 | 10 | 1 | 8 | 6 | 15 | 1 | 13 |
| 2 | −1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 7 | 0 | 1 |
| 3 | −1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 7 | 0 | 4 |
| 4 | −3 | −1 | −1 | 0 | −1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | −1 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 7 | 0 | 4 |
| 6 | 4 | −1 | −1 | 0 | −1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | −1 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 7 | 0 | 1 |
| 8 | −7 | −3 | −3 | −1 | 3 | −1 | −3 | 0 | −1 | −1 | 3 | 0 | −3 | 1 | −1 | 1 | 3 | 0 |
| 9 | 4 | −1 | −1 | 0 | −1 | 0 | −1 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | −1 | 0 | 0 | 3 | −1 | 1 |
| 10 | −6 | −1 | 1 | 0 | −1 | 0 | −1 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | −1 | 0 | 0 | 3 | −1 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 7 | 0 | 4 |

**表 2.** 濯足节蛋糕游戏的值.

* 译者注：复活节前的星期四称为濯足节. 根据欧美风俗，每逢此节，要发放救济金给穷人或无家可归的流浪汉.

$$\begin{matrix}5\times12\\ \text{的值}\end{matrix}=\left\{\begin{matrix}\text{十二块} & \text{六块} & \text{四块} & \text{三块} & \text{二块}\\ 5\times1, & 5\times2, & 5\times3, & 5\times4, & 5\times6\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{五块}\\ 1\times12\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{十二个} & \text{六个} & \text{四个} & \text{三个} & \text{二个}\\ -1, & 0, & 0, & 1, & 1\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{五个}\\ 10\end{matrix}\right\}$$

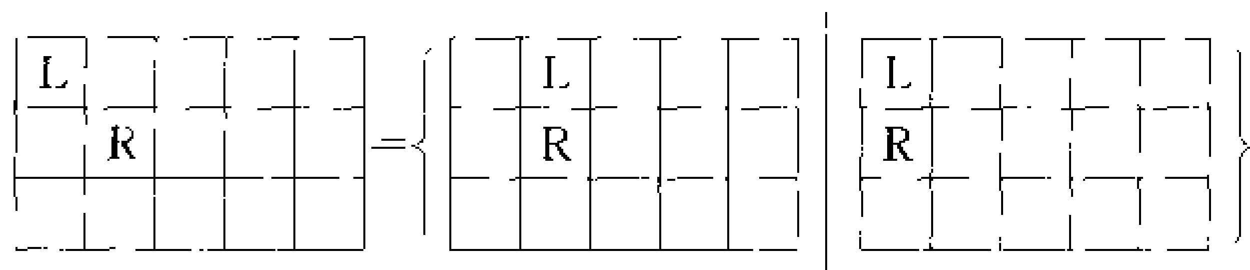
$$=\{-12,0,0,3,2|50\}$$

$$=4.$$

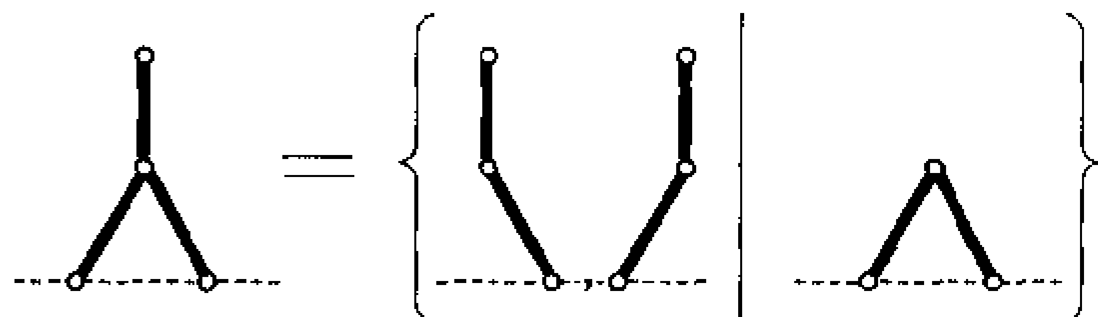
如果你猜不出一般规律，你可在本章增补材料中找到我们的解法；如果你已经猜到了，那么请用 999×1000 或 1000×1001 大小的蛋糕来试一试你的猜想，看看它能不能真正过关.

## 简单性法则的一些应用

滑雪跳跃与伐木游戏的一些较费周折的问题通过简单性准则就很易理解. 例如滑跳局势




的值为$\{2\frac{1}{2}|4\frac{1}{2}\}$,按照简单性法则,其值应该是 3,与我们已经讲过的一致. 对于第 1 章增补材料图 18 的最后一个局势,若再次应用简单性法则,可以看出其值为$\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}|,2\}=1$.



至于像图 4 的“马”那样更复杂的局势之值，可通过反复应用该原则而求出. 我们已介绍过一种行之有效的办法，即在每条边的旁边注上一个数字，以表示抹去这条边时剩余局势的值. 这些局势或者表现在图形的后来演变过程中，或者是第 1 章中已经讲过的简单局势之和.

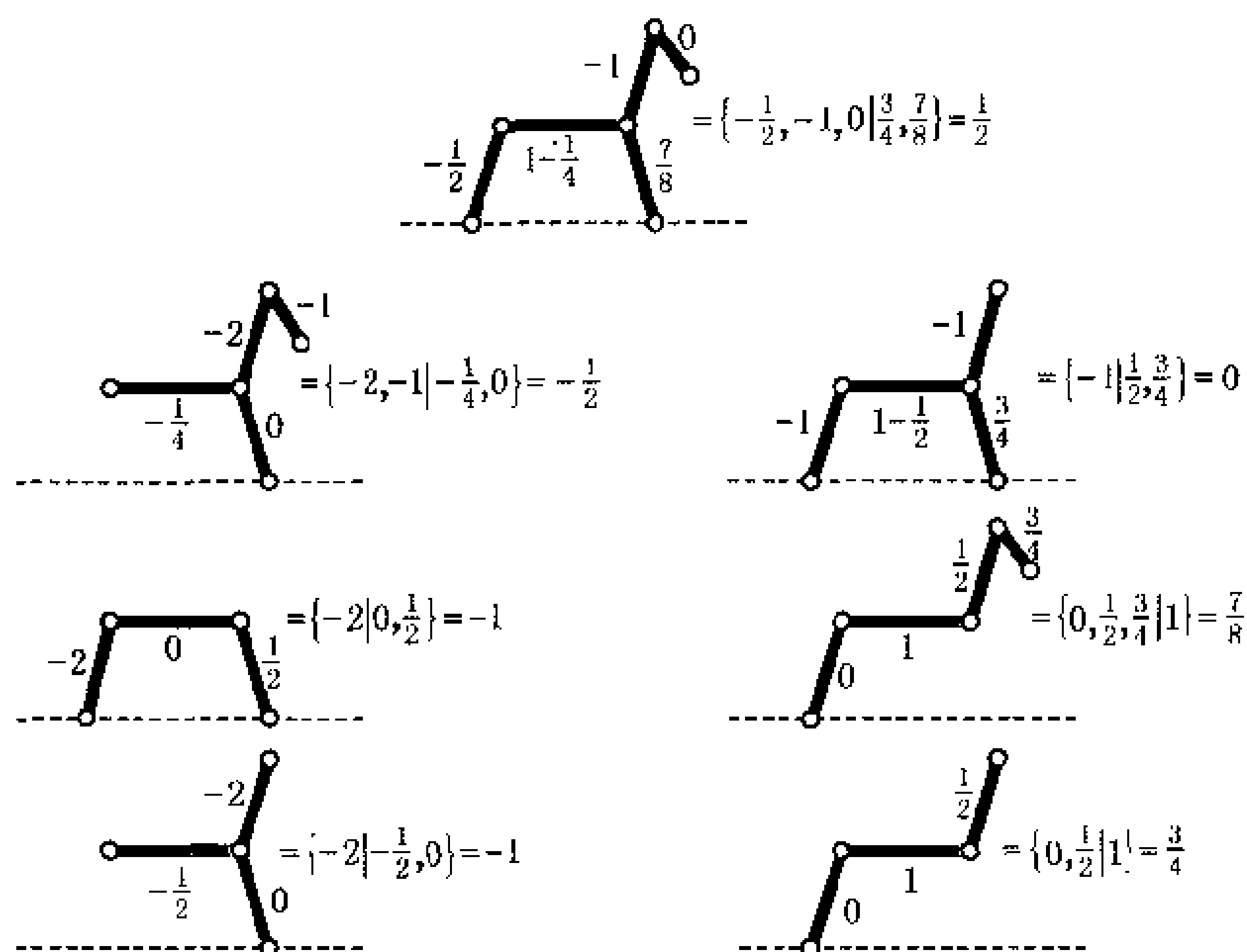



**图 4.** 把"马"的值算出来.

## 正，负，零值以及模糊局势

我们可将所有的两人博弈，按其结局分成四大类. 这取决于何人先走、何人可以获胜，如表 3 所示. 若不论谁先走，左方总是能赢则 G 称为**正值**博弈. 反之，若右方总是能赢，则 G 称为**负值**博弈. 在其他两种情形，赢家可以是左方或右方，但要看谁先走. 如果谁先走谁就输，则我们以前已经说过，G 是一种**零值**博弈. 若先走者是赢家，则称为 G 是**模糊**的博弈.

| | | 左方先走：左方获胜 | 左方先走：右方获胜 |
|---|---|---|---|
| 右方先走 | 左方获胜 | 正（左方赢） | 零（后走者赢） |
| 右方先走 | 右方获胜 | 模糊（先走者赢） | 负（右方赢） |

**表 3.** 四种可能结局.

记住这四种情况的方便办法是：看谁有取胜策略——左方，右方，还是先走，后走. 用记号表示，即

$G>0$ 或 $G$ 是正的，若 L(左方)总是能赢；

$G<0$ 或 $G$ 是负的，若 R(右方)总是能赢；

$G=0$ 或 $G$ 是零，若后走者(第二人)总是能赢；

$G \parallel 0$ 或 $G$ 是模糊的，若先走者(第一人)总是能赢.

在伐木游戏中我们已经看到，仅有蓝边的图形(不论有多少)是正值的，仅有红边的图形是负值的. 没有边的图形是零值的，但也有其他零值图形，例如红边与蓝边的边数相等，并且都通过自己一方的颜色边来接地. 还有第 1 章图 6(c)那样的简单图形，它有两条蓝边与三条红边.

在蓝-红伐木游戏中没有模糊局势，这使它颇为不平常. 因为对绝大多数博弈来说，先走者一般总是有利的. 为了使它具有更多样化的性态，我们需要引入一种新的边.

## 伐木游戏大杂烩

这种游戏的玩法同以前一样，但可加上**绿边**，任一局中人都可以砍掉这种边. 当然，蓝边仍然保留给左方，红边保留给右方，并继续遵循普通的游戏规则：不能行动的一方就是输家.

图 5(a)的美丽花木是伐木大杂烩游戏中模糊局势的一例，因为它的主干是绿色的，先走者的第一步即可把它砍掉而轻易取胜.

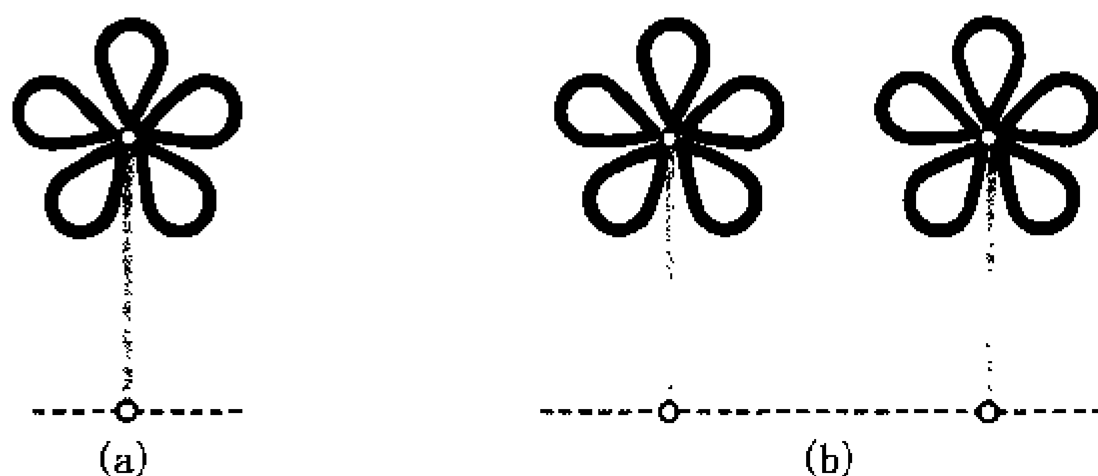



**图 5.** 两朵模糊花可以形成一个正值花束.

有人可能会想，如同零值博弈一样，模糊游戏对任何一方都未给出特别好处，它也可以说是零值的. 但这是一种错误导向. 因为尽管可以先走先赢，一个模糊局势可能会潜在地对某一方更有利些. 例如在图 5(a)中，蓝边比红边多，这就足以保证这两种花朵之和具有正值，如图 5(b). 因在图 5(b)中，不管谁先走，左方有足够数量的蓝边可以安排，迫使右方首先砍去主干，然后左

方也砍主干，一举取胜.

实际上一个模糊博弈的值既不大于零，也不小于零，而是**混淆**于零. 图 6 是一个很好的想像图，它能说明模糊博弈 $G$ 在数轴上的位置是不定的，因而它被画成一朵白云. 由于白云覆盖了零并伸展到两处，我们说不清楚 $G$ 究竟是什么. 云朵下面嗡嗡作响，有时为正，有时为负，随其周围环境而时时变异着.

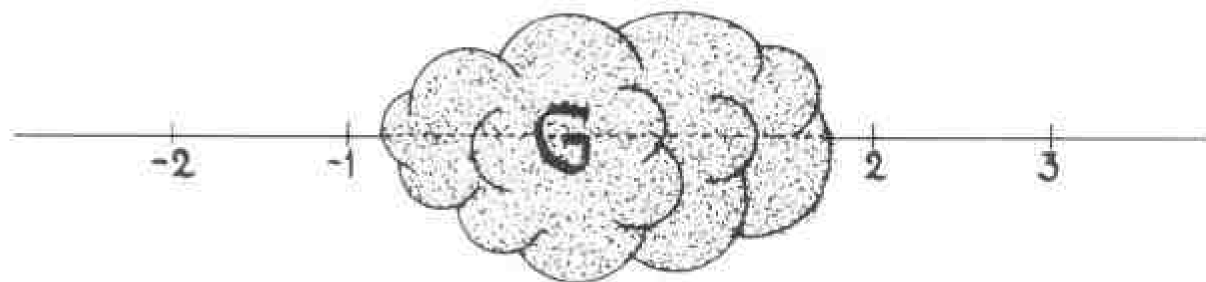



**图 6.** 一个模糊博弈有多大?

## 任意博弈之和

既然我们已经学会如何处理数字并懂得博弈可以分成正、负、零与模糊四类. 下一步我们就应当知道：一般情况下两个博弈的相加是什么意思. 由于身手不凡，左、右两方可同时进行两种博弈 $G$，$H$，如图 7 所示. 我们将把 $G$，$H$ 称为复合博弈 $G+H$ 的两个**分支**，玩法如下：两位局中人在 $G+H$ 中交替行动，轮到某一方走动时，他可任意选择 $G$ 或 $H$ 之一，并走出该分支中符合游戏规则的一步，然后轮到对方走动，而对方的走法也完全类似于上面所说的情况. 与通常一样，当某一局中

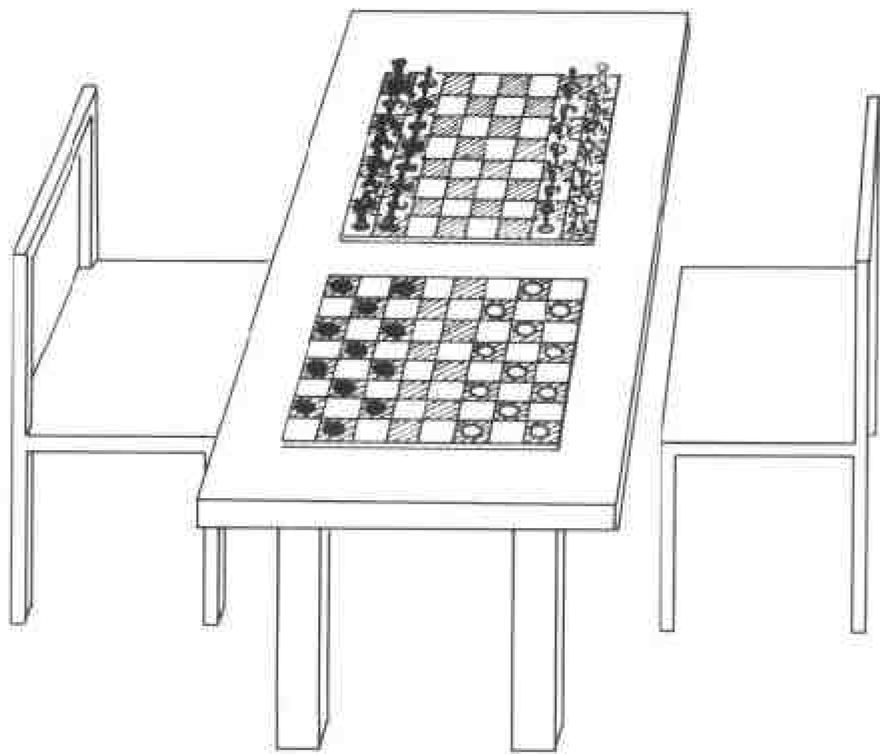


**图 7.** 同时进行两种博弈.



人发现他已经无法行动(在任一分支中他都已找不到合乎规则的步子)时,他就输了.

我们将用 $G^L$ 表示典型的左方在 $G$ 中的选择(左方可走到的局势),$G^R$ 是典型的右方选择,从而

$$G=\{G^L|G^R\}.$$

当局中人的选择不止一种,甚至一种也没有时,仍可采用这种记号,所以 $G^L$ 不一定是单值的. 例如,若 $G=\{a,b,c,\cdots|d,e,f,\cdots\}$,$G^L$ 的意思是指 $a$ 或 $b$ 或 $c$ 或……,$G^R$ 是指 $d$ 或 $e$ 或 $f$ 或……. 在博弈 $2=\{1|\ \}$中,$G^L$ 只能是 1,而 $G^R$ 根本无值可言. 按此记号,博弈和的定义是

$$G+H=\{G^L+H,G+H^L|G^R+H,G+H^R\}.$$

这是因为,从 $G+H$ 出发,左方的选取是和 $G^L+H$ 或 $G+H^L$,他只能在一个分支中采取行动,右方也有类似的和 $G^R+H$,$G+H^R$.

除了局中人本身的能力所限之外,在任何时刻,局中人在分支中的行动不加任何限制. 你不需要亦步亦趋,追随你的对手在同样的分支中下子,也不一定非得改走另一个分支. 一切均可随心所欲. 实际上,在许多种游戏中(例如蓝—红伐木游戏或切饼游戏),往往走一步就会产生一个以上的分支.

## 和的结果

本书的主要目的之一就是研究下列问题:在给出各分支博弈的信息之后,怎样决定复合博弈的结果. 所以我们不能指望一步登天地马上就来回答这个问题. 但我们至少能预期:如果 $G$ 与 $H$ 都有利于左方,则 $G+H$ 也肯定如此. 实际上,我们还可加强上述断言,把零博弈也包括进去.

若 $G$ 与 $H$ 大于或等于 0,则 $G+H$ 亦然.

所谓 $G$ 大于或等于 0,这是什么意思呢? 由表 3,我们可以看到,这正好是当右方先走而左方获胜的两种情况. 如它对 $G$ 与 $H$ 为真,则对 $G+H$ 亦必为真. 因若右方先走,他必须在 $G$ 或 $H$ 中走一步. 譬如说,若走 $G$,则左方可用他在 $G$ 中的取胜办法来对付. 不论右方在 $G$ 中进行多久,左方可一直奉陪到底. 当右方转向 $H$ 时,则左方可用他在 $H$ 中的获胜策略加以对付,……照此行事,左方在 $G+H$ 中永不会输.

现在我们有了另一条原则，它可以覆盖某些模糊博弈.

> 若 $G$ 是正值或模糊的，$H$ 是正值或零，则 $G+H$ 是正值或模糊的.

我们从表 3 可知，正值或模糊博弈正是左方先走而左方能赢的情形. 因此我们只须证明若左方先走时左方在 $G$ 中有着取胜策略，右方先走时，左方在 $H$ 中有取胜策略，则在左方先走时，他在 $G+H$ 中有取胜策略.

这是容易的. 他在 $G+H$ 中先走出 $G$ 中足以取胜的第一步，然后总是在与右方的同一分支中回敬右方的行动，这样一来，在 $G$ 中的一系列行动始于左方，而在 $H$ 中的则始于右方. 如果左方在两个分支中遵循此种策略，则他无疑将在博弈之和中获胜.

我们可以列式总结以上结果，并交换左、右双方的角色.

> 若 $G\geqslant 0$，$H\geqslant 0$，则 $G+H\geqslant 0$，
> 若 $G\leqslant 0$，$H\leqslant 0$，则 $G+H\leqslant 0$，
> 若 $G|\triangleright 0$，$H\geqslant 0$，则 $G+H|\triangleright 0$，
> 若 $G\triangleleft| 0$，$H\leqslant 0$，则 $G+H\triangleleft| 0$.

这里，"$\geqslant$"表示"$>$"或"$=$"，"$\triangleleft|$"表示"$<$"或"$\|$"，等等. 特别，当 $H$ 是一个零博弈时，它仍可用于上述四种情况. 其时，在各种情况下，$G+H$ 都将与 $G$ 有同一结果. 也就是说，

> 添加一个零博弈决不会改变结果.

我们已经看到在蓝—红伐木游戏中这些原则的一些作用，但现在我们已知道在任意两人博弈中它们都在起作用，而不依赖于我们在伐木游戏中所计算的各种局势最终都能转化成数字. 表 4 给出了 $G$，$H$ 为已知时，$G+H$ 的各种可能结局.

| | $H=0$ | $H>0$ | $H<0$ | $H\|0$ |
|---|---|---|---|---|
| $G=0$ | $G+H=0$ | $G+H>0$ | $G+H<0$ | $G+H\|0$ |
| $G>0$ | $G+H>0$ | $G+H>0$ | $G+H?\ 0$ | $G+H|\triangleright 0$ |
| $G<0$ | $G+H<0$ | $G+H?\ 0$ | $G+H<0$ | $G+H\triangleleft| 0$ |
| $G\|0$ | $G+H\|0$ | $G+H|\triangleright 0$ | $G+H\triangleleft| 0$ | $G+H?\ 0$ |

**表 4.** 博弈和的结局. 表中的 $G+H?\ 0$ 代表结局不受制约，情况不明.

只有蓝边接地的任何伐木游戏图都是正值博弈，因为显然最后一步动作必属于左方. 作为实例，图8的房屋是正值的. 花园也是正值的. 因它是图5(b)的一式两份拷贝. 因而不论谁先走，整个图形总是左方能赢.

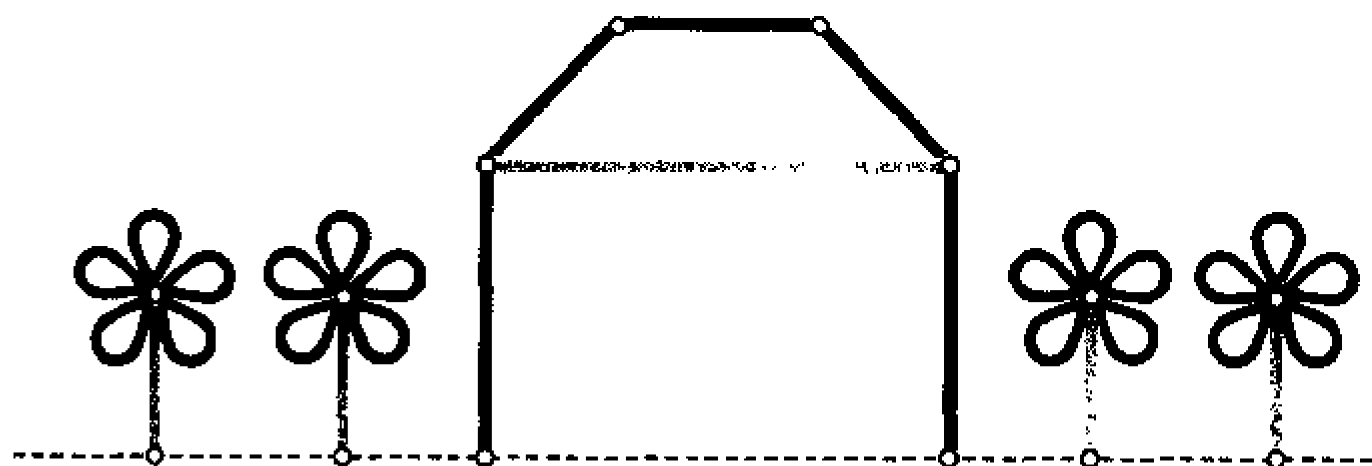


图8. 正值的房屋与花园.

## 博弈之负

在蓝-红伐木游戏的例题中，我们发现只要彻底交换红、蓝两色，表示博弈值的数目就将改变符号. 这就启发我们，在给出负博弈的一般定义时可以彻底交换左方与右方的角色. 因此，不问 $G$ 中局势如何，曾是左方的合法动作现在却成了右方的合法动作，反之亦然. 若 $G$ 是局势

$$G=\{A,B,C,\cdots|D,E,F,\cdots\},$$

则 $-G$ 将是局势

$$-G=\{-D,-E,-F,\cdots|-A,-B,-C,\cdots\}.$$

对一般情况的博弈 $G=\{G^L|G^R\}$，我们要有

$$\boxed{-G=\{-G^R|-G^L\}.}$$

此定义甚至也适用于模糊局势. 让我们看一看它实际上意味着什么. 任一伐木游戏局势之负可由交换原图中蓝、红两色的边而得，而任何一条绿边不变. 例如图5(a)中的花朵，其负图也是一朵花，但却从三蓝二红变成为三红二蓝. 全部由绿边组成的伐木游戏图形是它本身的负图. 由此可知，图9那样的小灌木林是一个零博弈. 因为它是由两棵树及其负图(图的形状同原来的图完全一模一样)所组成的.

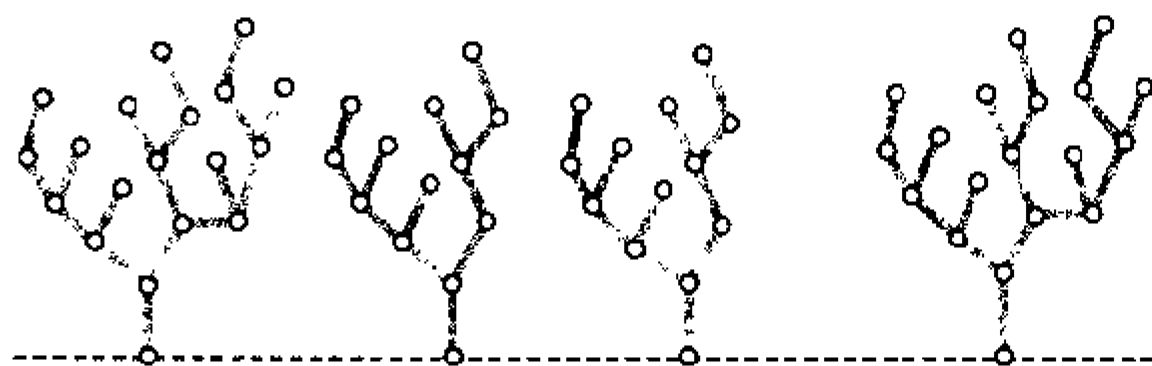


**图 9.** 在绿荫覆盖下.

但是，在此林中，没有一棵树是零值的（先走者可以砍掉其树干而取胜），事实上，图 9 中一棵大树与一棵小树之和也不是零值（可以砍掉大树的水平分支*）. 由上可知 $G+G$ 可以是零值，然而 $G$ 本身却是非零的. 实际上，仅仅只要再读寥寥数页，我们就会遇到这类博弈中的最常见者"星". 而"星"的负图即为其本身.

## 用负博弈抵销博弈

上述的负博弈定义是否正确呢？一个博弈与其负博弈之和真的是零博弈吗？在复合博弈 $G+(-G)$ 中，后走者如何取胜呢？

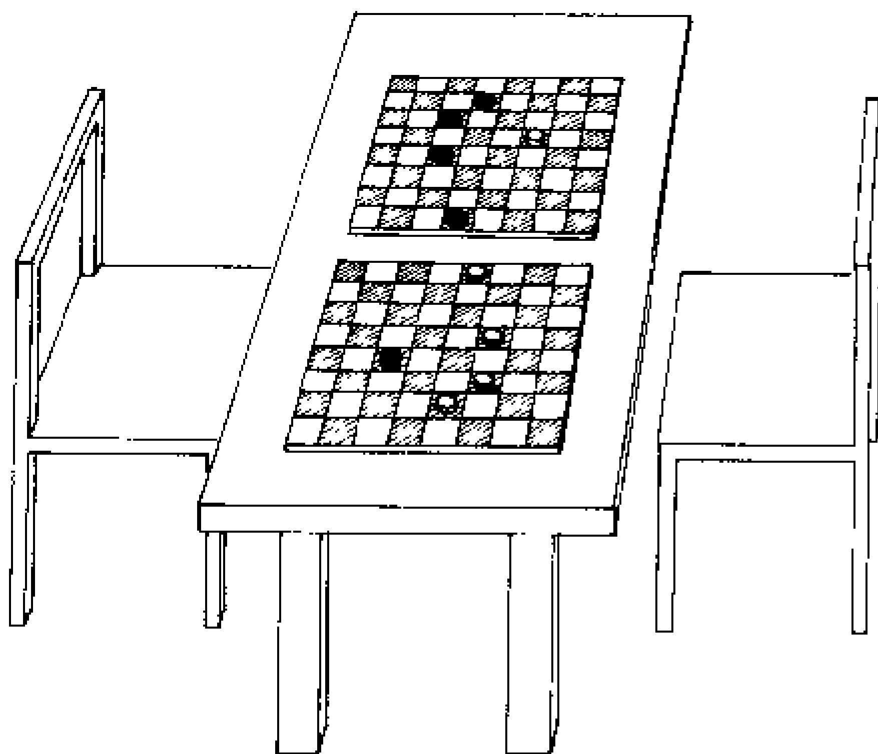


**图 10.** 正、负博弈同时来玩.

---

* 译者注：砍掉大树的水平分支后，将留下一模一样的两棵小树，这才是零局势.

回答是显而易见的. 先走者必须在某一分支中行动——设想他从 $G$ 走到 $H$，使整个局势演变为 $H+(-G)$，于是按照 $-G$ 的定义，从 $-G$ 到 $-H$ 的行动就其对手来说是合法的，从而后走者可将整个局势转变为 $H+(-H)$. 接着，先走者又可走成 $H+(-K)$，而此时后走者又可将它转变为 $K+(-K)$，……如此等等. 换言之，后走者总是能够模仿其对手的上一步行动，亦步亦趋，在另一分支中找到其对应动作. 如果他按此行事，一步不错，他就肯定会赢. 以上所说的当然就是我们在第 1 章中已经学到过的双胞胎论证法.

对任一博弈 $G$，博弈 $G+(-G)$ 是一个零博弈.

由于我们只研究有限博弈，所以终止条件可以保证杜绝用无限拖延手法来造成平局. *

## 两个博弈的比较

我们说 $G$ 大于或等于 $H$，并记为 $G \geqslant H$，其意思是指，$G$ 至少同 $H$ 一样对左方有利. 怎样说得更确切一点呢？普通算术给了我们一个启发，当且仅当 $x-y$ 为正数或零时，$x \geqslant y$. 让我们以此作为下列博弈的定义：

$G \geqslant H$ 意味着 $G+(-H) \geqslant 0$.

于是容易得出：若 $G \geqslant H$，$H \geqslant K$，则必有 $G \geqslant K$. 由于 $G+(-K)$ 与 $G+(H+(-K))+(-H)$ 有同样结果. 因 $H+(-H)$ 是零博弈，而上式又可写成 $G+(-H)$ 与 $H+(-K)$ 之和，而它们两个都是 $\geqslant 0$ 的. 由博弈和的结果，可知 $G+(-K) \geqslant 0$，即 $G \geqslant K$. 类似地，由表 4 我们可以推导出表 5，这表明我们能从 $G$ 与 $H$，$H$ 与 $K$ 的顺序关系导出 $G$ 与 $K$ 的顺序关系.

| | $H=K$ | $H>K$ | $H<K$ | $H \parallel K$ |
|---|---|---|---|---|
| $G=H$ | $G=K$ | $G>K$ | $G<K$ | $G \parallel K$ |
| $G>H$ | $G>K$ | $G>K$ | $G?\ K$ | $G \,|\!\rhd K$ |
| $G<H$ | $G<K$ | $G?\ K$ | $G<K$ | $G \lhd\!|\, K$ |
| $G \parallel H$ | $G \parallel K$ | $G \,|\!\rhd K$ | $G \lhd\!|\, K$ | $G?\ K$ |

**表 5.** $G$ 同 $K$ 是什么关系？

* 译者注：例如中国象棋中就规定“长捉作败”.

这里$G=H$ 意味着$G$与$H$对左方同样有利；

　　$G>H$ 意味着对左方来说，$G$比$H$更有利；

　　$G<H$ 意味着对左方来说，$G$不如$H$有利；

　　$G \parallel H$ 意味着对左方来说，$G$时而优于$H$、时而劣于$H$.

“|▷”再一次表示“>”或“‖”.

## 比较伐木游戏的局势

在第 1 章中我们所作的蓝—红伐木游戏的比较仍然正确. 但在模糊局势下我们将遇到一些更一般的东西. 现在让我们考虑图 5(a)的花朵. 显然它是模糊的. 那么我们究竟应该加上多少才能使它变成正值的? 不难看出，只需加上左方的自由一步即已足够，因为不论谁先走，左方总能赢. 当花的主干依然存在时可以砍掉它，若它不存在，那就用掉他的自由一步.

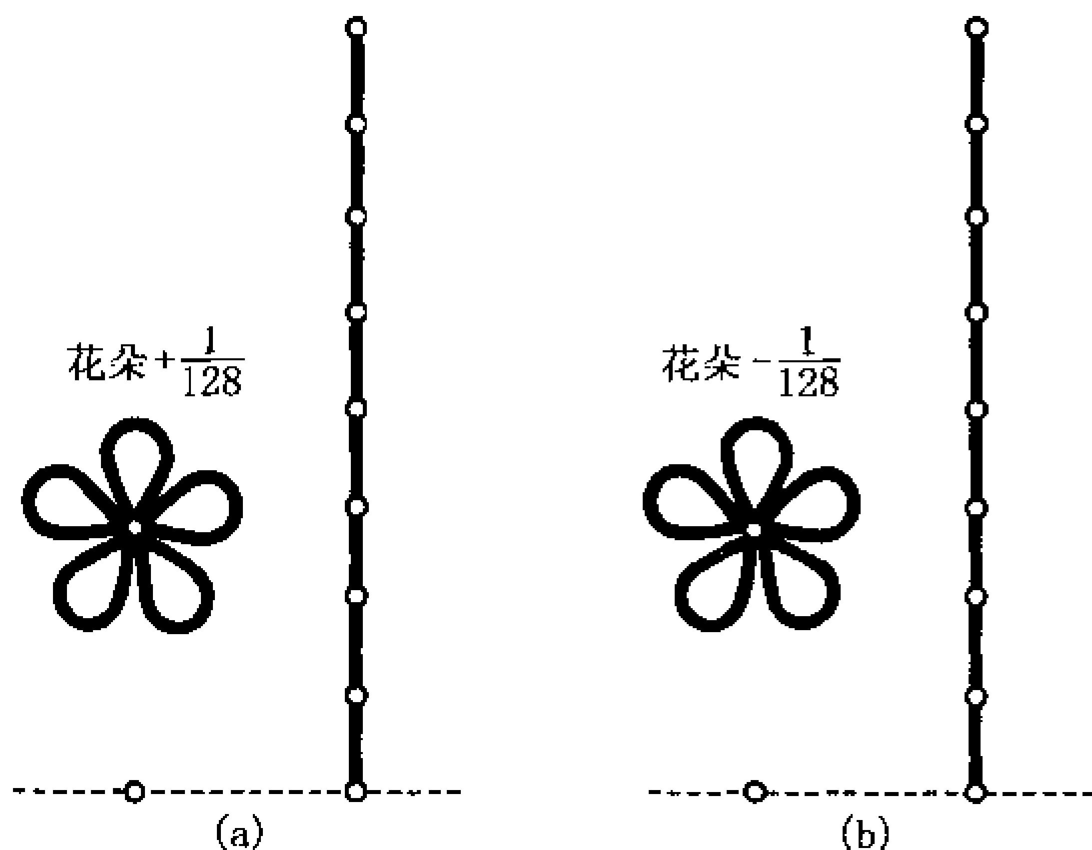



图11. 对比高耸入云，但数值极小的蜀葵，花朵显得非常矮小.

那么，半步够不够呢? 答案仍旧是“够”. 实际上，图 11 表明，即使一步的极小分数也行. 例如图 11(a)，若加上去的仅为一步的$\frac{1}{128}$，但显然通过与上面十分类似的策略，左方仍然可赢. 即应尽量先砍伐花的主干. 而当花已不存在时，则砍去蜀葵的蓝边. 在图 11(b)中，我们则是减去了

一步的$\frac{1}{128}$. 结果是右方可赢的局势，而采用的仍是类似策略.

这就意味着花朵的值必是极小极小，——我们已证明

$$-\frac{1}{128}<\text{花朵}<+\frac{1}{128}.$$

以上的论证实质上已足以证明花朵之值大于一切负数而小于一切正数，然而它仍然不是零. 因此，这朵白云在数轴上覆盖的仅仅是零本身(见图 12).

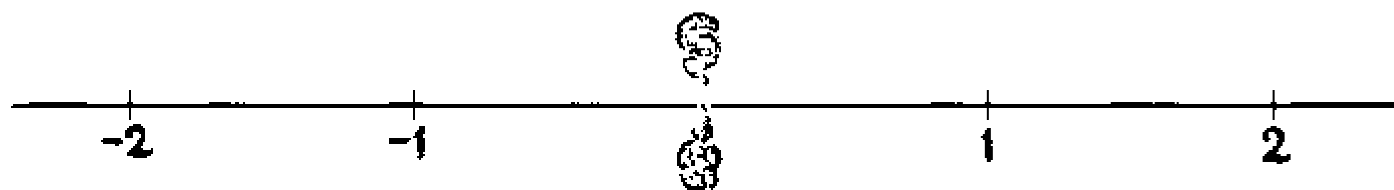



图 12. 白云掩住花朵，但覆盖的只是一个数而已.

同样的论证证明了一个更一般的结果，即任何一个伐木游戏图，凡其一切接地边都是蓝边的话，则博弈值必严格位于一切负数与一切正数之间. 当我们从此类图形中减去$\frac{1}{128}$时，右方可采用如下的策略取胜：尽先砍伐接地各边，仅当图形的剩余部分全然消失时再抹去属于他的自由边. 图 13 的房子，其值小于任何正数，但左方能赢. 房子虽小，它肯定是正的.（对照图 5 的(b)).（战斗的焦点集中于一点：谁先砍去一堵墙，因为他的对手可以砍去另一堵而获胜. 左方可以从烟囱向下伐去，他至少可走 5 步，但右方至多只有 4 步可走，逼得后者只好狗急跳墙.）

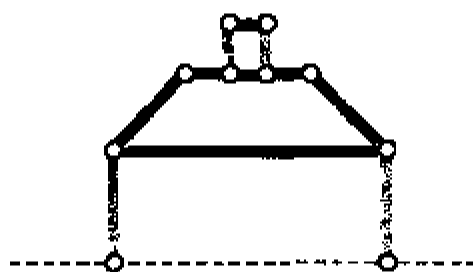


图 13. 一间有正值的小房子.

# 科尔游戏*

科林・服特(Colin Vout)发明了下面的地图着色游戏. 每位局中人在轮到他走时，需要把地图上的一个区域涂上颜色. 左方用蓝色，右方用红色. 有着一条共同边的两个区域不准涂上同样

* 译者注："科尔"即"科林"，作者行文比较随便，原文前后称呼也不统一.

颜色. 谁无法着色时就算他输. 让我们假定在只有三个区域的极简单图形(见图 14(a))中由右方先走. 试问,这种局势的值等于多少?

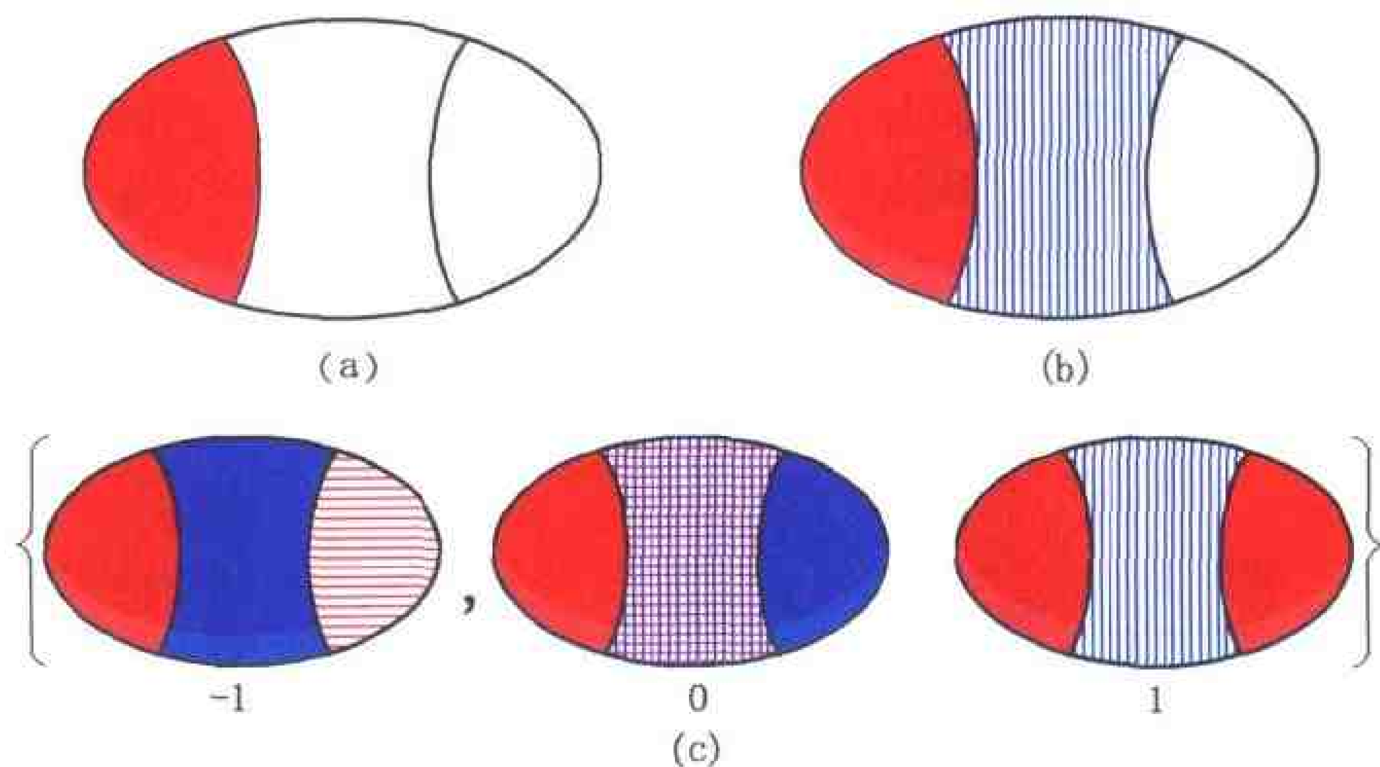


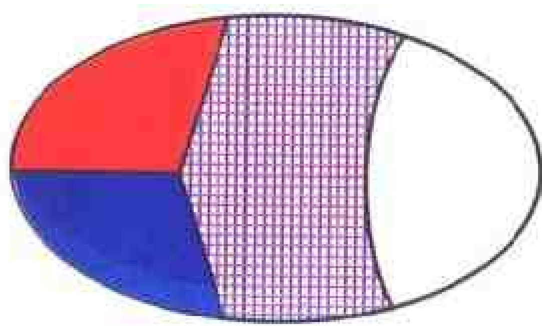

图 14. 科尔游戏的一个极简单例子.

右方行动的后果实际上无异于把中间那块区域留给了左方，因此我们不妨想像它已被染成蓝色(图 14(b)). 一般说来，任何一个与已涂色区域相邻的未涂色区域将自动取得相反的颜色，以表示今后将只有一方可以利用. 在下面的图形中染色将用打上阴影线的办法予以表示. 图 14(c)表示从图 14(b)出发的每种可能走法. 在左方实施了他的第一种选择之后，将留下一个未涂色区域，但它将被染成红色，从而取值−1. 但若左方行使他的第二种选择，则未涂色的区域势将同时打上红、蓝阴影线，使任何一方都无法利用，从而其值为零. 右方的唯一可能走法将留下一个蓝的染色区域，其值为 1. 因此，图 14(a)的值将是 $\{-1,0|1\}=\frac{1}{2}$.

## 星 * 的出世

在图 15(a)中唯一可用的区域未受到任何限制,任何一个局中人都可涂色,走到一个具有零值的局势. 因而图 15(a)的值将是{0|0}. 对此,我们应该作些什么解释呢? 简单性法则帮不了我们的忙,因为在 0 与 0 之间没有什么数,但我们可以预期这个值应该小于或等于{0|1}, $\left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\}$,

$\{0\mid\frac{1}{4}\}$,…中的每一个.这是由于右方的选择0应小于或等于$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$,…中的每一个之故.换言之,此值应小于或等于$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$,…中的每一个.由于它又要大于或等于以上这些数的负值,人们也许就要猜想它便是0.然而,图15(a)是一个零位局势吗?不!决非如此!因为,这时先走者是赢家而非输家.其实,这是个模糊局势.由于值$\{0\mid 0\}$在许多博弈中都出现,它应当有一个专名.于是我们把它记为$*$,并读作星.伐木游戏中一根孤立的绿色主干具有$*$值(见图15(b)),谁先走的话,第一步即可使游戏结束.



(a)



(b)

图15. 一个奇异值.

虽然值$*$不是一个数,但它可以加到其他局势中去,而不问它们的值是否为数.例如,图15可以看成是科尔与伐木两种游戏之和,而具有值$*+*$.在此复合局势中谁将取胜呢?如果你先走,把区域涂上颜色,那么我就砍去主干;如果你伐掉主干,那么我就把区域涂色.不论哪种情况,后走者总是赢的,所以其值是0!

$$\boxed{*+*=0.}$$

更一般地,我们可考虑具有值$\{x\mid x\}$的局势,这里的$x$为任一数.它将严格地大于每一个$y<x$的数,又严格小于每一个$z>x$的数,然而它既不大于,小于,也不等于$x$本身.我们可以把这种值与其他同类型的值相加,也可以与普通数相加.

让我们在$*$上加$\frac{3}{4}$,即$\{\frac{1}{2}\mid 1\}-\{0\mid 0\}$.左方现在有两种走法可供选择:$\frac{1}{2}+*$(从$\frac{3}{4}$行动)或$\frac{3}{4}+0$(从$*$行动),而右方的两种选择是:$1+*,\frac{3}{4}+0$,由于$*<\frac{1}{4}$,左方的最佳选择是$\frac{3}{4}$,按同样的理由,这也是右方的最佳选择.从而有$\frac{3}{4}+*=\{\frac{3}{4}\mid\frac{3}{4}\}$.

一般有

$$x + * = \{x \mid x\}$$
对任一数 $x$

**值 $x*$**

由于这类数字频频出现，因此我们约定，用缩写记号 $x*$ 来代表 $x+*$，正好像人们使用带分数 $2\frac{1}{2}$ 来代表 $2+\frac{1}{2}$ 一样。你们决不可把 $x*$ 错误地理解为 $x$ 乘以 $*$，犹如你们不应把 $2\frac{1}{2}$ 看成 2 与 $\frac{1}{2}$ 相乘.

## 科尔游戏中有这类值

作为一个例子，让我们来看图 16(a)，它的染色阴影线如图 16(b)，而局中人的选择法如图 16(c)所示，从而其值为 $\{*,-1,1 \mid 1\}$. 由于值 $*$ 与 $-1$ 都小于 1，上式可简化为 $\{1 \mid 1\} = 1*$.

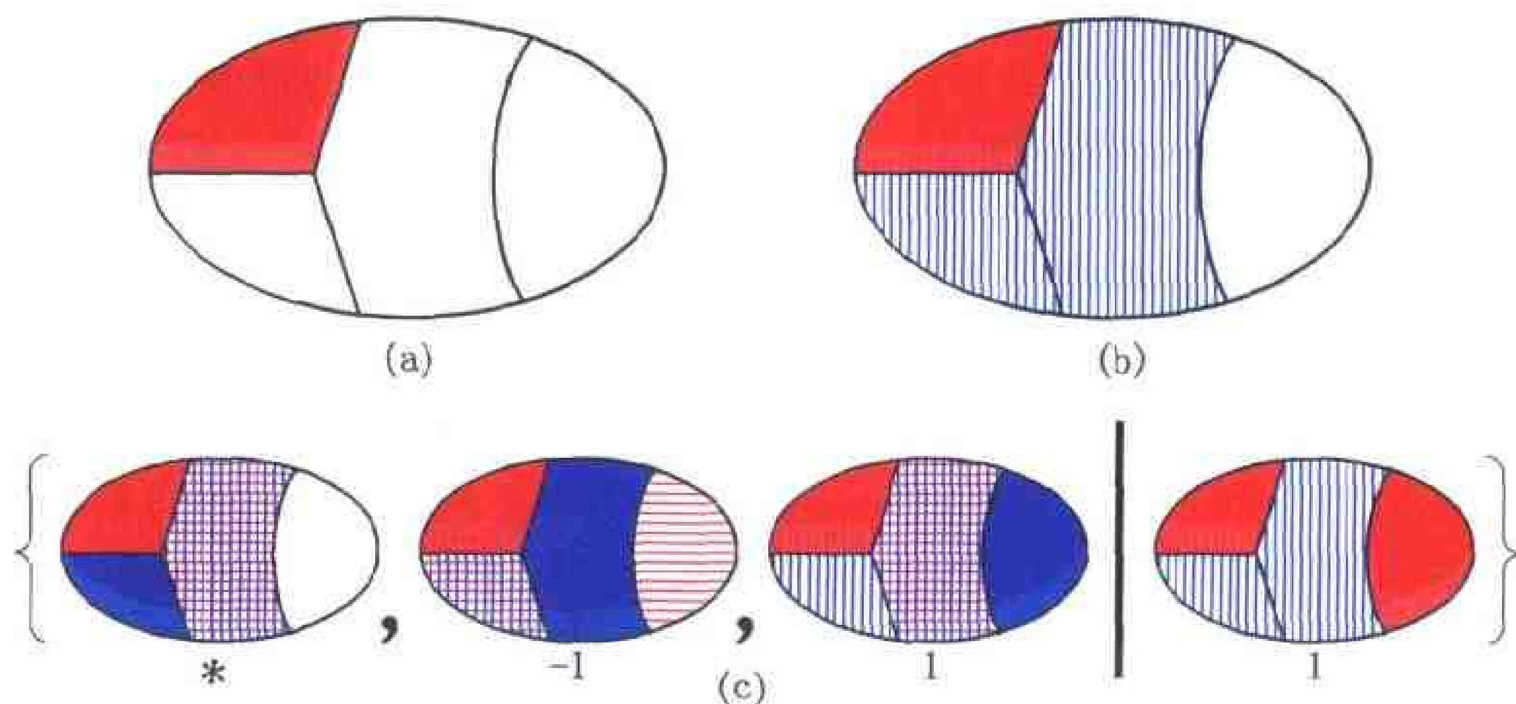
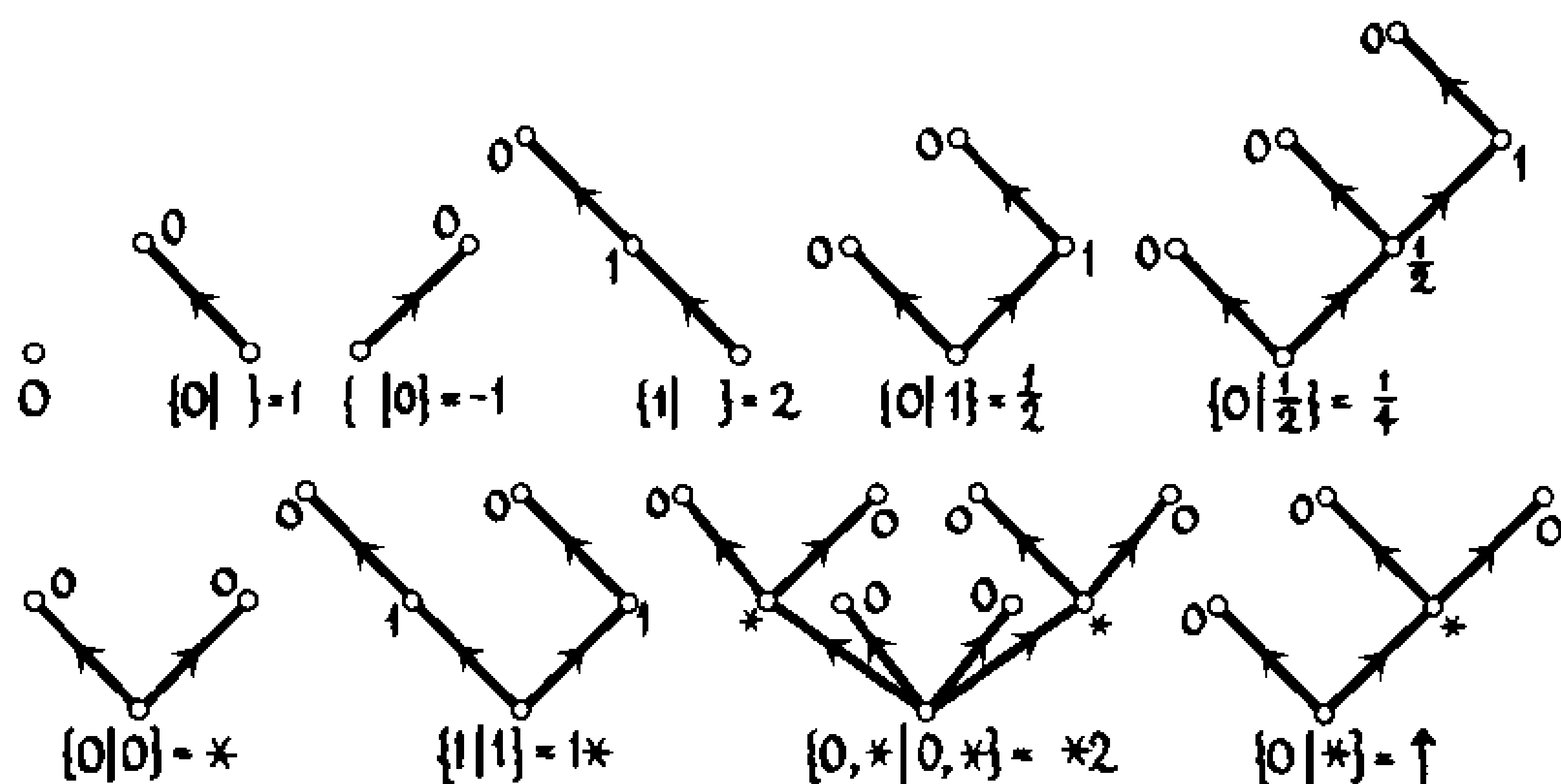



图 16. 一个科尔局势的值.

你们可以在本章增补中找到科尔游戏的更多材料.

## 博弈树

通常用树图表示博弈，其中结点代表局势，边代表行动的步子，如下图所示：




当然,向左与向右倾斜的边代表左方与右方的走法,这将帮助你识别表面上看来极不一样的博弈实质上具有同样的结构(例如图 15 的(a)与(b)). 在复杂局势中常需合并结点以免重复,有时也得把图形改画为上下颠倒,我们以前对滑雪---跳跃与癞蛤蟆—青蛙游戏的附图(见第 1 章的图 12 与图 16)中就曾做过这类加T..

## 绿色伐木游戏,尼姆游戏与拧数

在第 7 章中我们将要给出没有蓝边与红边,完全由绿边组成的伐木游戏的完整理论. 当然,此种由绿色灌木丛表示的博弈是**不偏不倚**的. 从任何局势出发,每个局中人都可采取符合游戏规则的同样走法. 本书将有好几章(第 4 章,第 12 章至第 17 章)专门用来讨论无偏博弈. 这些章节将阐明一个事实:在此类博弈中,尼姆游戏起了主要作用. 我们将通过一些特别简单的绿色伐木游戏来介绍这种游戏.

绿色灌木图形中极为简单的一种称为绿蛇, 它只有一条由绿边组成的长链, 一头接地. 位于其最上面的也可以形成圈或环, 从而使蛇有了个 "头", 这自然不会影响游戏的玩法. 图 17 列举了一些 "蛇", 其中长度为 1 的蛇或许称之为 "草" 更为合适一些. 我们怎么来玩这种游戏呢?

显然,每步行动只能作用于一条蛇,使这条蛇变得更短些. 如果我们用记号 $*n$ 表示有 $n$ 条边的蛇(表示蛇头的环或圈也应计入,如果它有的话),于是就有:

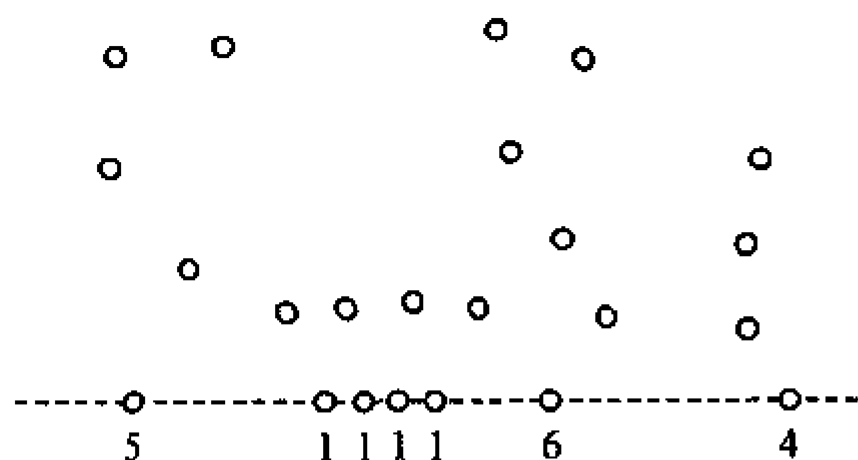



图 17. 草本植物中的蛇莓(维吉尔* 牧歌，Ⅲ，93)．

$*0=\{\ |\ \}=0$;

$*1=\{*0|*0\}=\{0|0\}$，这种博弈称为星 $*$；

$*2=\{*0,*1|*0,*1\}=\{0,*|0,*\},\cdots$;

$*n=\{*0,*1,*2,\cdots,*(n-1)|*0,*1,*2,\cdots,*(n-1)\}$.

这些特殊数值称为"拧数"，今后将不断出现. 在竖线"|"两边出现的同样选择强调了本游戏的无偏性.

如果用筹码代替"蛇"，来玩这游戏、对各位读者也许会更有安全感吧. 若采取前面一种形式，则一般是有几堆筹码，每一步动作要在某一堆中拿掉任意正数个数的筹码. 在正常情况下，拿最后一只筹码的算是赢家. 所以同绿蛇游戏一样，不过是一条 $n$ 边的蛇变成 $n$ 个筹码的一堆东西，而图 17 则摇身一变，变成了图 18.

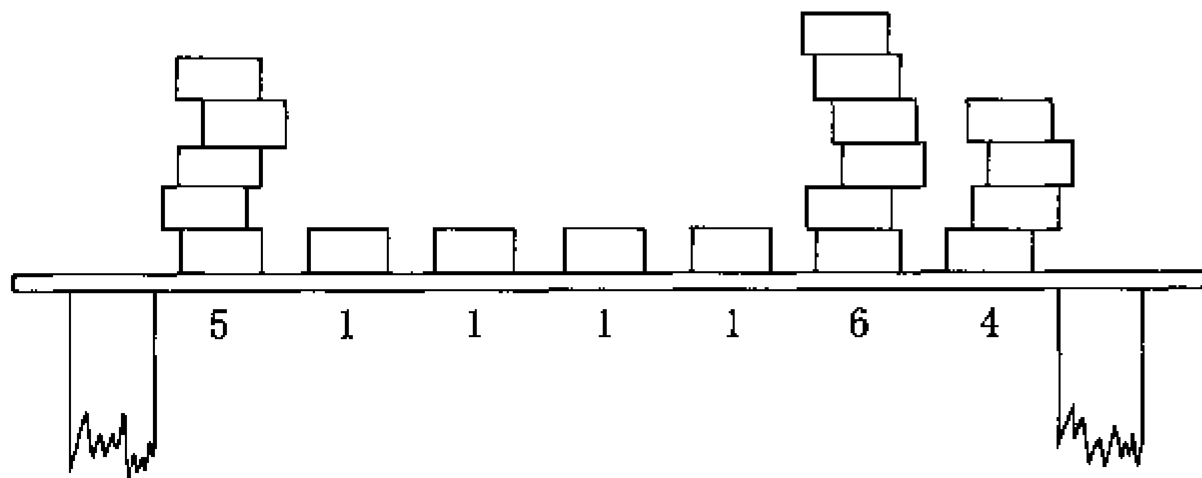



图 18. 一个简单的尼姆局势.

著名的"尼姆游戏"曾由博顿(C. L. Bouton)作过分析，我们今后将要一而再、再而三地碰到它，因为斯普莱格(R. P. Sprague)与格隆第(P. M. Grundy)相互独立地证明了它蕴含着一切无

* 译者注：维吉尔(Virgil)，古罗马的大诗人.《牧歌》是他的名著.

偏博弈的可加性理论.现在我们暂时不去讲它的一般理论(见第3章增补材料),而只限于讲一些简单局势及等量关系.

## 拧数的灵活处理!

首先可以看出,一个不空的孤立堆是模糊局势,因为先走者可以一步拿走全堆.在相应的伐木游戏中,他可以一举砍掉"蛇"的底边.其次,同样大小的两堆总是能形成零位状态.因为,无偏性保证了一个局势为其本身之负值.由此出发,一个局势中同样大小的任意两堆可以忽略不计——这就使我们不必考虑图17中的四棵草.从另一方面说,不同大小的两堆之和肯定是一个模糊博弈,因为先走者可以从大堆里拿去一些筹码,使两堆变得一样大小.

这些话足以说明在三堆尼姆游戏中,谁第一个(犯致命错误)造成其中两堆等长或者拿空任一堆的人肯定要输,因为在前一种情况,他的对手可以拿走第三堆;而在后一种情况,使两堆等长.但是,在局势 $*1+*2+*3$ 中,由于上述原因,先走者随便采取什么行动,他都会输.所以 $*1+*2+*3=0$.由于拧数之负即为其本身,所以上述事实也可改记为以下任一种形式:

$$*1+*2=*3,\quad *1+*3=*2,\quad *2+*3=*1.$$

在化简局势时,它们是非常有用的.例如,不论什么场合,如遇到一堆长度为2,另一堆长度为3,即可把它们简化成长度为1的一堆.从局势 $*1+*4+*5$ 出发,如果一位局中人削减大堆,使它变到2或3,则其对手可相应地把另一堆削减到3或2.基于其他走法都不外乎上面已经讲到过的两种情况,这就表明 $*1+*4+*5=0$,使我们原则上可以把其中的两堆代之以第三堆.

可以用类似办法证明等式 $*2+*4+*6=0$.不论哪个局中人把其中的一个大堆削减到1或3,他的对手可以把另一大堆削减到3或1,从而得到 $*2+*1+*3$.较难看出是错误的唯一走法是将2削减到1或把6削减到5,而这些走法错得半斤八两,因为 $*1+*4+*5=0$.

现在我们已经能够比较得心应手地灵活处理一些拧数算术:

$$*3+*5=*2+*1+*5=*2+*4=*6,$$

从而使我们又有一个另外的等式,它可以表为下列任何形式之一:

$$*3+*5=*6,\quad *3+*6=*5,\quad *5+*6=*3,\quad *3+*5+*6=0.$$

今后我们将要证明,任意两个拧数之和是另一拧数,还将有一些规则把它具体地算出来.就图17与图18而言,谁将取胜呢?我们或许已经讲得有点过头了.由于四棵"草"可以忽略不计,局势的值应是 $*4+*5+*6=*3+*4$,这当然是一种模糊局势,先走者可赢,他只要把4削减到3就行.因此我们的获胜行动是砍掉第三条"蛇"的头,使它的值从4变到3.勤奋的读者也

可以自行验证，另外两种也能获胜的第一步行动是把 ×5 削减为 ×2 或 ×6 削减到 ×1. 用我们的例子作为基础，悟性最好的读者可以编造一张尼姆加法的庞大表格.

## 有孩子气的伐木游戏

当每条边都与大地接通（有时要通过其他边）时，此种伐木游戏图形称为**孩子气**或童心未泯的. 例如，图 19(a)是孩子气的，但图 19(b)却不是，窗子会掉下来，不再是图形的一部分. 由通常

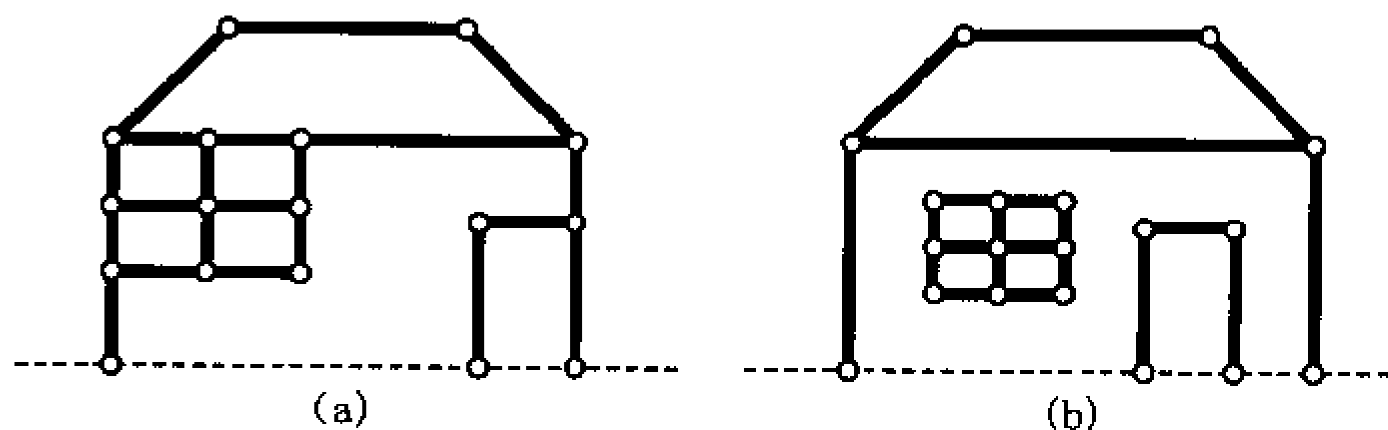



图 19. 有孩子气的与成熟的图形.

伐木游戏的规则，在一旦出现非孩子气的边时就必须将它们删去. 在谢尔(J. Schaer)发明的**孩子气蓝—红伐木游戏**中，你只能拿掉一些边而使剩下部分仍然接地，没有任何东西会跌落下来. 人们也许认为它不是一个很有趣味的游戏，然而孩子气蓝—红伐木游戏决非那种肤浅的玩意儿. 读者们不妨先来验证一下图 20 中各种局势的值，并与第 1 章图 16 中通常的蓝—红伐木游戏中的值加以对照.

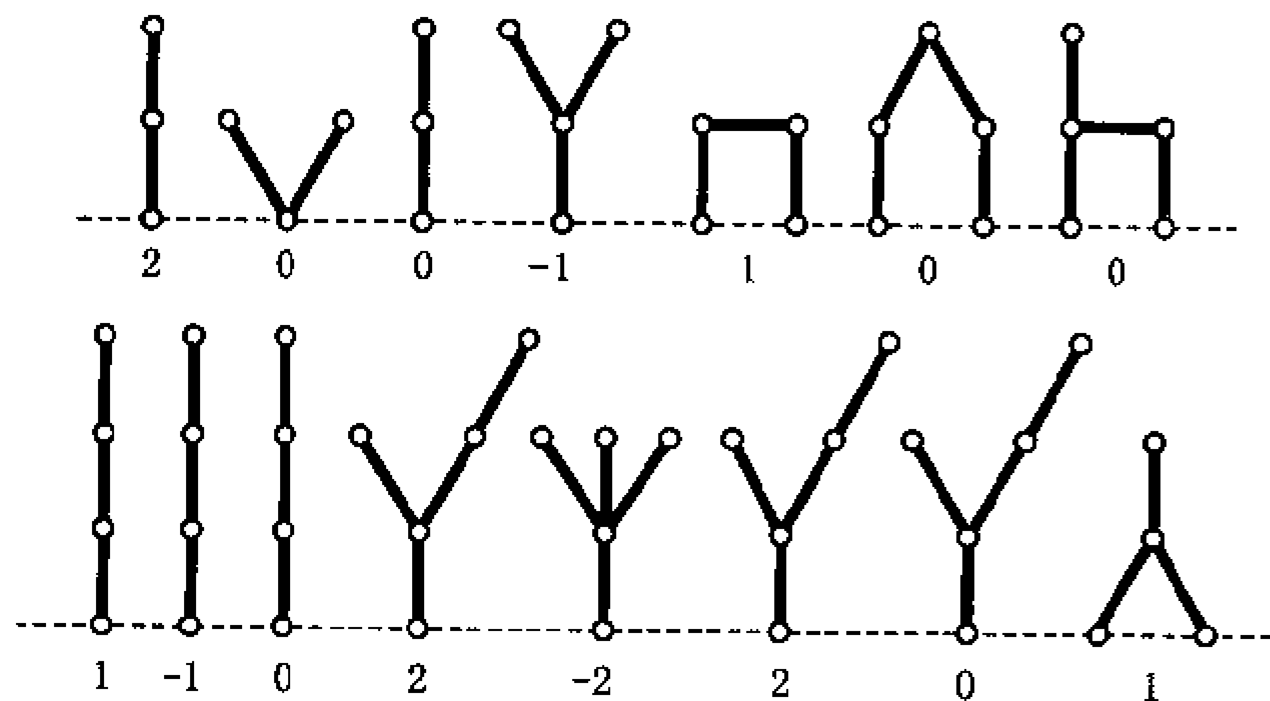



图 20. 孩子气蓝—红伐木游戏中一些局势的值.

在本章增补材料中可以找到一些具有非整数值的孩了气伐木游戏的局势.

## 安排夫妻入席

图 21 中有一张圆形餐桌，左、右双方轮流安排几对夫妻入席以祝贺本章结束. 左方总是要把夫人安排在她先生的左边，而右方则认为把夫人安排在先生右边才合适. 除配偶外，任何男人都不得与其他女人坐在相邻位置上. 当左、右两位局中人之一，首先发现已无法安排夫妻入席而只好把各位宾客打发走的时候，他就是输家.

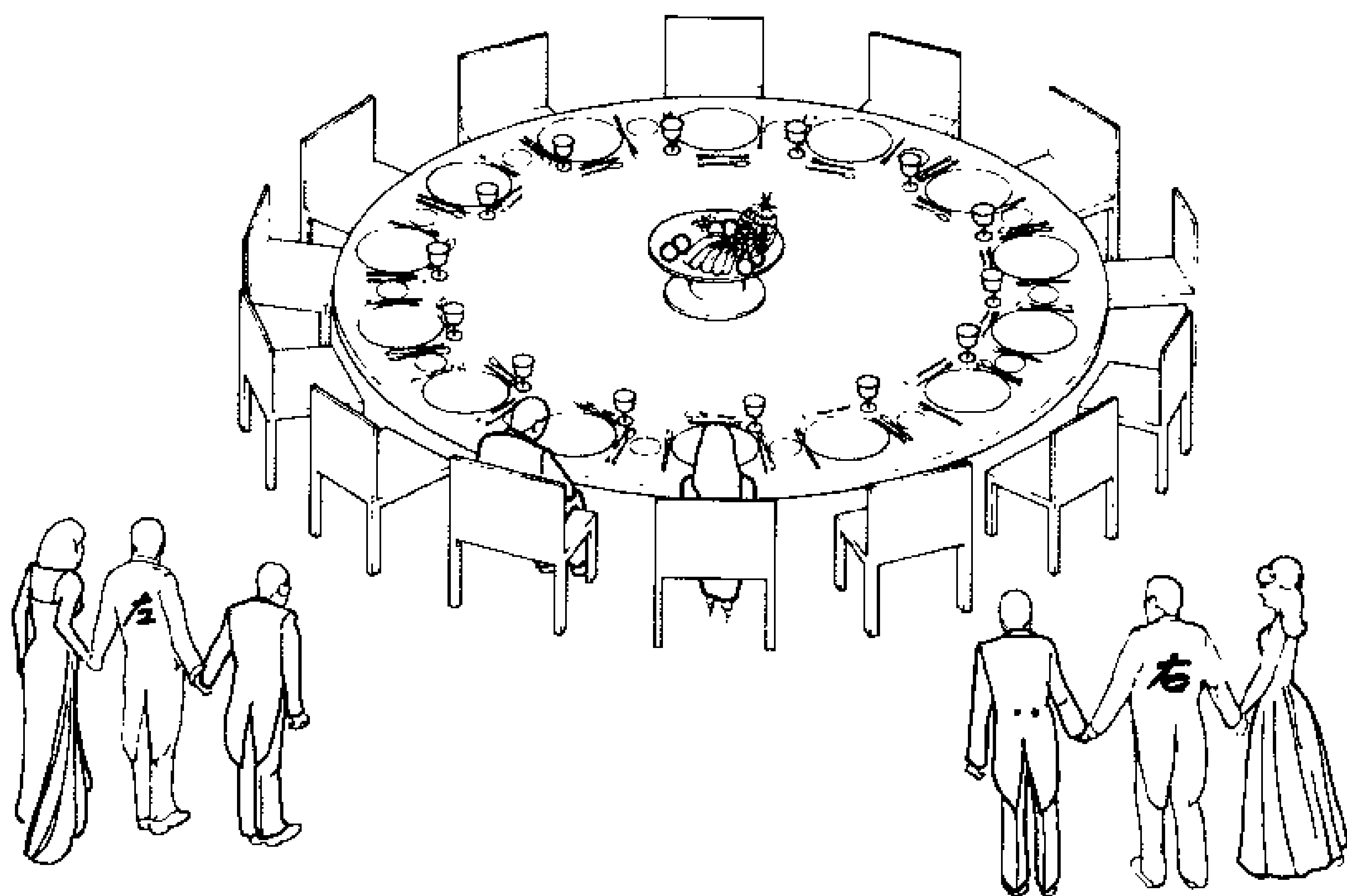



**图 21.** 祝贺第 2 章结束的宴会.

上述规则的后果是任何一方都不可能在四个相邻位置上安排两对夫妻，因为其时必将有一个男人与别人的老婆毗邻而坐. 因而，当任意一个局中人安排了一对夫妻入座以后，他实际上在两侧各保留着两只位子供对方利用. 在本游戏启动之后，可以派上用场的位子将形成下列三种类型：

LnL　　在左方的两位客人之间留着一排 $n$ 只空椅子；

RnR　　在右方的两位客人之间留着一排 $n$ 只空椅子；

LnR 或 RnL　在左方的一位客人与右方的一位客人之间留有一排 $n$ 只空椅子.

按照此种记法，图 21 就相当于 R12R. 从 $n=0$ 出发是方便的，但自然不允许 L0L 与 R0R，因为其时必然出现不合规定的坐法.

于是我们将得出：

$$\mathrm{L}n\mathrm{L}=\{\mathrm{L}a\mathrm{L}+\mathrm{L}b\mathrm{L}\mid \mathrm{L}a\mathrm{R}+\mathrm{R}b\mathrm{L}\}$$

$$\mathrm{R}n\mathrm{R}=\{\mathrm{R}a\mathrm{L}+\mathrm{L}b\mathrm{R}\mid \mathrm{R}a\mathrm{R}+\mathrm{R}b\mathrm{R}\}\quad(=-\mathrm{L}n\mathrm{L})$$

$$\mathrm{L}n\mathrm{R}=\{\mathrm{L}a\mathrm{L}-\mathrm{L}b\mathrm{R}\mid \mathrm{L}a\mathrm{R}-\mathrm{R}b\mathrm{R}\}\quad(=\mathrm{R}n\mathrm{L})$$

这里的 $a,b$ 是和为 $n-2$ 的各对自然数，但应排除不允许的坐法 L0L 与 R0R. 此式之成立当然是显而易见的，因当一位局中人安排一对夫妻入席时，他们必将占据 $n$ 个位置中的两个.

作为一个例子，我们有

$$\mathrm{R5R}=\left\{\begin{array}{l|l}\mathrm{R3L}+\mathrm{L0R} & \\ \mathrm{R2L}+\mathrm{L1R} & \mathrm{R2R}+\mathrm{R1R} \\ \mathrm{R1L}+\mathrm{L2R} & \mathrm{R1R}+\mathrm{R2R} \\ \mathrm{R0L}+\mathrm{L3R} & \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l|l}*+0 & \\ 0+0 & 1+0 \\ 0+0 & 0+1 \\ 0+* & \end{array}\right\},$$

并化简为 $\{0,*\mid 1\}$. 这个值等于多少呢？为此，我们利用不等式 $-\frac{1}{4}\leqslant *\leqslant\frac{1}{4}$，它告诉我们

$$\left\{0,-\frac{1}{4}\middle|1\right\}\leqslant\mathrm{R5R}\leqslant\left\{0,\frac{1}{4}\middle|1\right\}.$$

因而 R5R 必定等于 $\frac{1}{2}$. 因为简单性法则告诉我们，它是 $\left\{0,-\frac{1}{4}\middle|1\right\}$ 与 $\left\{0,\frac{1}{4}\middle|1\right\}$ 两者的值. 通过此种方式可以验证表 6 中的前几款. 让我们追问一句：像图 21 这样的情况，哪一方可赢？

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LnL | — | 0 | $-1$ | $-1$ | $*$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $*$ | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{8}$ | 0 | $-\frac{1}{16}$ | … |
| LnR=RnL | 0 | 0 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | 0 | 0 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | 0 | 0 | 0 | … |
| RnR | — | 0 | 1 | 1 | $*$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $*$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{16}$ | … |

**表 6.** 夫妻入席问题中各种局势的值.

# 增 补

## 取胜策略

不难证明，满足第1章增补材料中八项条件，且有一位局中人开始启动(设为右方)的博弈必然存在着一个或者左方或者右方得以取胜的策略，我们将证明如下.

首先假定存在着一个 $G$ 中的右方选择 $G^R$，当左方在 $G^R$ 中先走时，右方有一取胜策略，于是右方在 $G$ 中显然有一个取胜策略——他只要走到 $G^R$，然后继续运用他在 $G^R$ 中的取胜策略就行.

如果不存在这样的右方选择，有可能所有的右方选择在左方先走时，左方都有取胜策略. 则此时左方将在整个博弈 $G$ 中有一取胜策略——他只要等待右方走出第一步(它肯定是 $G^R$ 中的某一个)，然后运用他在 $G^R$ 中的获胜策略去继续进行博弈. 所以，在假定右方先走而双方在 $G$ 中都没有取胜策略时，则必然存在着某个 $G^R$，使得从它出发而左方先走时，双方都没有取胜策略，而这又将转化为 $G^R$ 中存在着某个左方选择 $G^{RL}$，使在右方先走时双方都没有取胜策略……，如此等等. 于是我们将得到一个 $G$ 中法定走法的无限序列

$$G \to G^R \to G^{RL} \to G^{RLR} \to \cdots$$

这就表明，博弈 $G$ 势将永远持续下去，而这是与 $G$(第1章增补材料的6)的终止条件相抵触的.

## 两个有限博弈之和可以永远玩下去

两个博弈 $D$ 与 $G$ 分别满足终止条件，然而其和 $D+G$ 却不一定如此. 例如，若左方在 $D$ 中可走出一个无限步序列：

$$D \xrightarrow[L]{} D_1 \xrightarrow[L]{} D_2 \xrightarrow[L]{} \cdots,$$

而右方在 $G$ 中有一无限序列：

$$G \xrightarrow[R]{} G_1 \xrightarrow[R]{} G_2 \xrightarrow[R]{} \cdots,$$

则尽管任一分支博弈没有一个左、右方交替进行的无限步行动序列，然而在复合博弈 $D+G$ 中却有

$$D+G \xrightarrow[L]{} D_1+G \xrightarrow[R]{} D_1+G_1 \xrightarrow[L]{} D_2+G_1 \xrightarrow[R]{} D_2+G_2 \xrightarrow[L]{} \cdots.$$

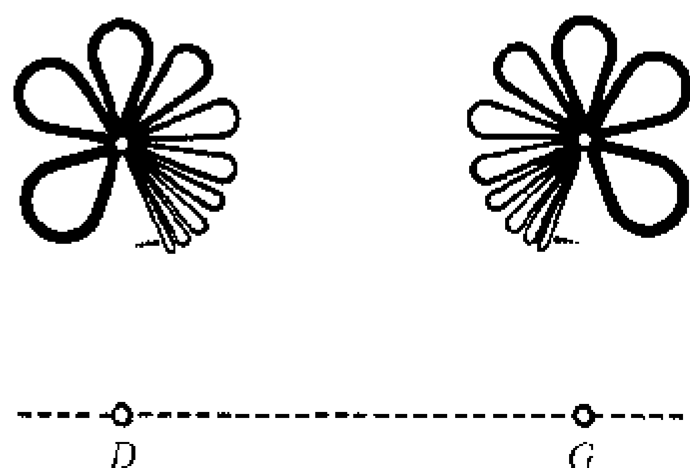



图 22. 无限的飞燕草与天竺葵. *

如果我们把图 22 的伐木游戏大杂烩与图 5 的进行比较，将可看到如果博弈仅限于飞燕草或天竺葵，则先走者只要砍掉主干，即可一举取胜，但若两者同时进行，则没有一个人敢砍主干，因为其对手也可如法炮制而获胜. 所以双方只能耐心地坐下来一来一往地摘取花瓣，从而复合博弈就会永远持续下去.

如果需要一个条件以保证所有的博弈和都会终止，我们必须要求：在一切分支博弈中均不存在一系列合法行动的无限序列 $G \to G_1 \to G_2 \to \cdots$（不论交替与否）. 如果你想知道怎样把博弈相加而不遵守这一条件，你就应当去读本书的第 11 章与第 12 章.

## 关于科尔游戏的一个定理

> 每一个科尔游戏局势具有值 $z$ 或 $\{z|z\}=z*$，在这里，$z$ 是某个数.

为了证明这一点，我们将要引进在第 6 章中用来说明其对照游戏——“小放牛”(Snort)** 的一套记号，即

---

* 译者注：飞燕草，翠雀属植物；天竺葵，老鹳草属植物.

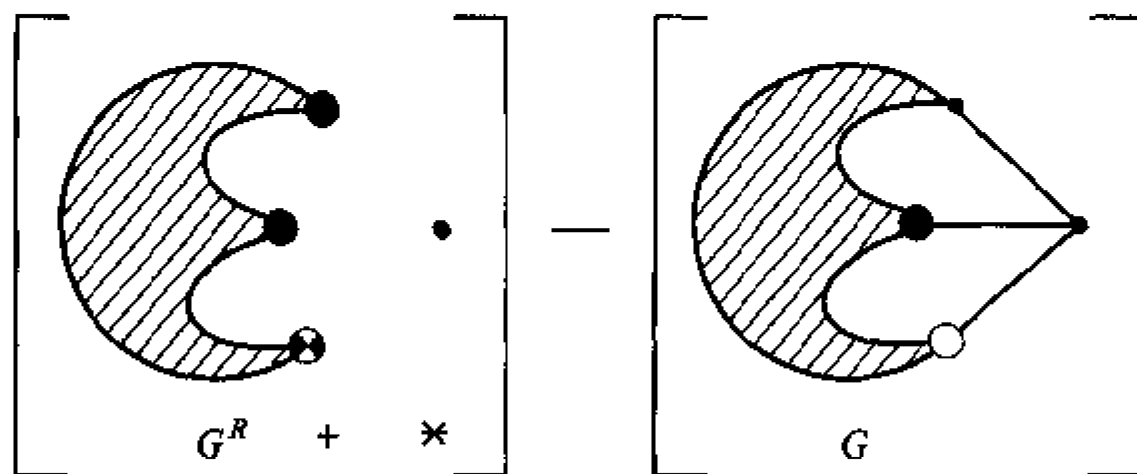
** 译者注：详见本书后文第 6 章. “Snort”直译为打鼾声，指牛的鼻息. 现在意译为“小放牛”游戏. 此种游戏基本上未引入我国，所以知之者极少.

| | |
|---|---|
| • | 两个局中人都可利用的区域 |
| ●(蓝) | 仅供左方利用的区域 |
| ○(红) | 仅供右方利用的区域 |
| ⊗(斑驳的) | 双方都不能利用的区域 |

并用边来联结这些点以表示区域的相邻. 典型的左方行动是删除结点●或•,并将所有相邻结点着上红色;右方的行动也与之相似.

我们断言,对任意的 $G^L$ 与 $G^R$,必有 $G^L+*\leqslant G\leqslant G^R+*$.

作为一个例子,后面的不等式可从左方在差博弈




中作为后手,采用明显的模仿策略而获胜来予以证明.

从而得出

$$每一个\ G^L\leqslant 每一个\ G^R.$$

由于这些都是较简单的局势,因此我们由归纳得知,它们的值是数或数加上星,若左方的最佳选择是 $x$ 或 $x*$,而右方的最佳选择是 $y$ 或 $y*$,如果 $x<y$,则由简单性法则可知 $G$ 的值是一个数,否则 $G$ 必为以下两种形式:

$$\{x\mid x\}=x* 或 \{x+*\mid x+*\}=x$$

之一,这是由于条件 $G^L\leqslant G^R$ 已经排除了 $\{x\mid x+*\}$ 之故.

## 集聚与瓦解

下面是采用上述记号的一些科尔游戏局势(图 23),还有选自 ONAG* 一书的某些规则以

---

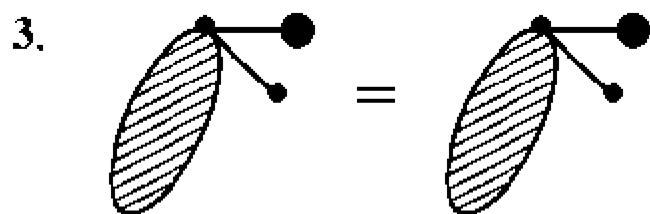
* 译者注:指康威的一本影响深远的名著《数与游戏》(On Numbers and Games),无中译本. 原书在我国国内也极难看到,但香港例外.

用来化简复杂局势.

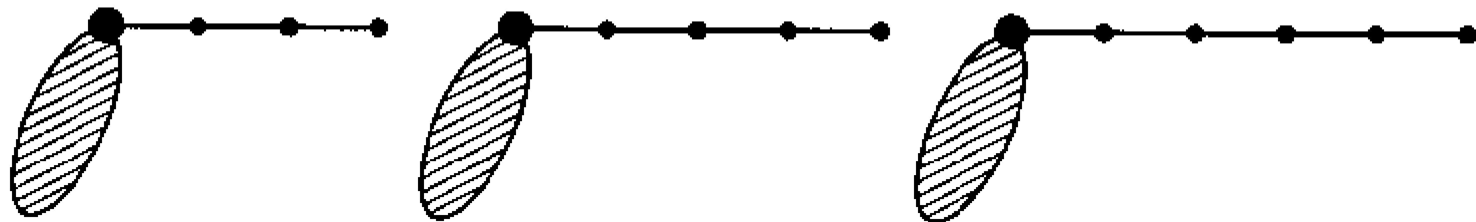
**1.** 可删去斑驳结点，也可删去联结相反着色结点的边，而局势之值不变.

**2.** 如果你将一个结点染蓝，或删去一条终止于一个染蓝结点的边，则值不变或增大.（将以上断言中的“增大”改成“减小”，“蓝”改成“红”时，所得之断言也成立）.

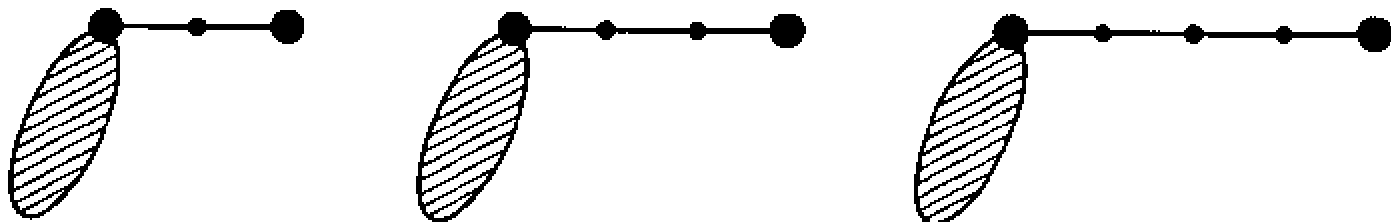
**3.**



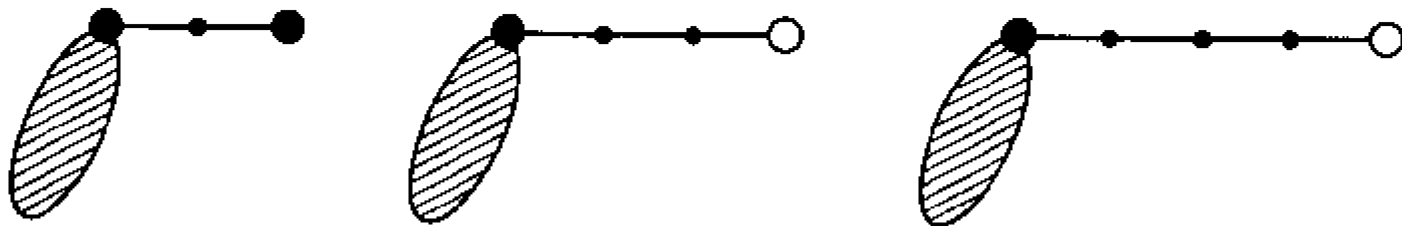
**4.** 局势



的值都等于 $A$，而局势



与局势



则分别对应于值 $A+\frac{1}{2}$ 及 $A-\frac{1}{2}$.

**5.** 两个已联结起来的未染色结点，都分别与同一集合的结点相联结时，可把它们染成一红一蓝，然后删去其联线.

**6.** 如当一个结点染蓝或染红时构形的值都不变，则称为**爆发性**结点，你可将它删去，即使它与别的构形相联结时亦然，例如：

$=1$，从而 $+1$ 及

$=*+*=0.$

$=0$ 及

$=0$，从而有

$=\cdots=1$ $=*$

$=\cdots=\frac{1}{2}$

$=\cdots=0$ $=1*$

$=\cdots=0$

$=\frac{1}{2}=$ $=1=$

$=\frac{1}{4}$ $=\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{8}$

$=\frac{3}{8}$

$=\frac{3}{8}$

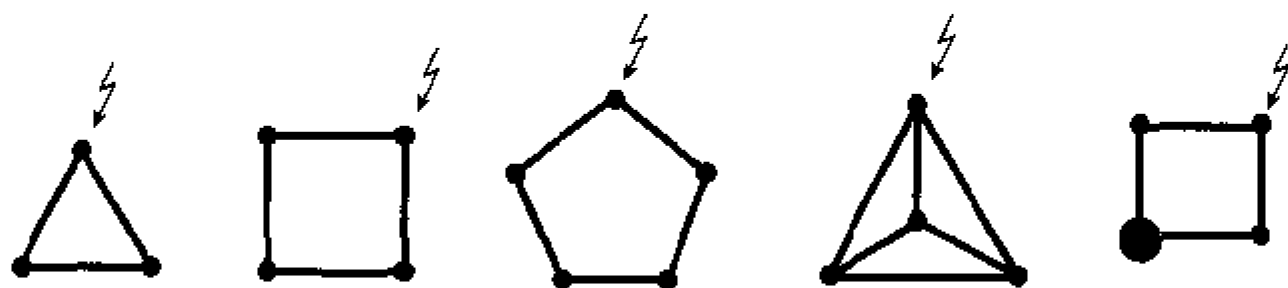
$=\frac{3}{8}$ $=\frac{7}{8}$

$=\frac{7}{8}$

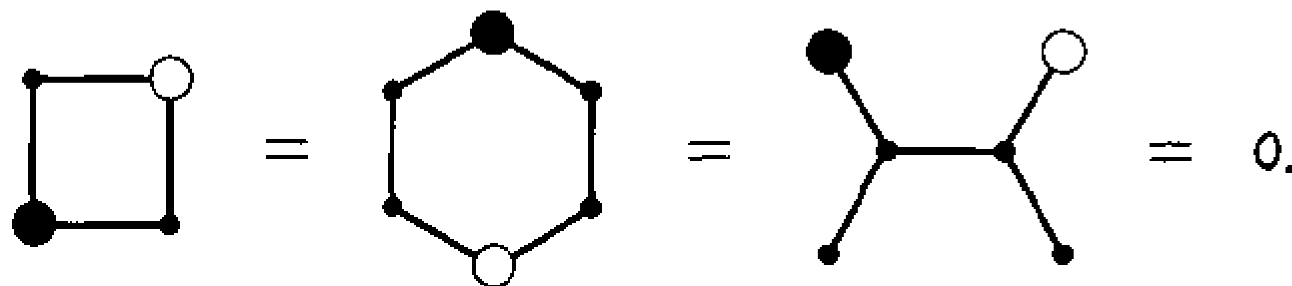
$=\frac{7}{8}$

图 23. 科尔游戏中一些局势的值.

7. 爆发性结点的其他例子还有:在未染色长链中每一侧都至少有二个结点的结点,以及下面图形中用⚡记号表示的结点.



8. 在对称位置染成异色结点的构形,其值为 0.
例如:



问题:在科尔游戏中,有没有值为$\frac{1}{16}$的局势? 值为$\frac{1}{32}$呢?

## 濯足节蛋糕

下面讲一讲我们算出 $r\times l$($r$ 行,$l$ 列)大蛋糕的值 $M(r,l)$的办法:

$r=999:333:111:37:1$,

$l=1000:500:250:125:25:5:1$,

$M(999,1000)=5+1=6$,左方有利,值为$-6$.

$r=1000:500:250:125:25:5:1$,

$l=1001:143:13:1$,

$M(1000,1001)=25+5+1$,右方有利,值为$-31$.

在每一行,你要用最小可能的素数去除,以得出下一数.得出 1 时算法终止.然后,如同上例所做的那样,把"剩下"的数目加起来,即是本博弈的值.对局中人而言,谁的序列较长,他就是赢家(序列长度相等时,博弈之值为零).

## 切饼游戏的又一个变种

迪安·希克逊(Dean Hickerson)是独立发明切饼游戏的学者.他指出,如果左兄每次必须直切 $v$ 刀,右妹每次必须横切 $h$ 刀,则一个 $r\times l$ 大小的饼,其值还是同

$$\lfloor r/(h+1)\rfloor\times\lfloor l/(v+1)\rfloor$$

大小的饼一样.(此处记号 $\lfloor\ \rfloor$ 代表"小于或等于它的最大整数";唐纳德·克努特(Donald Knuth)把它称为**地板或楼层***.)

求值时可从 $\lfloor(l-1)/v\rfloor$(若 $1\leqslant r\leqslant h$)与 $\lfloor(r-1)/h\rfloor$(若 $1\leqslant l\leqslant v$)开始.

## 你能有多少孩子气?

如果你把本章的图 20 与第 1 章的图 18 加以对照,你也许会认为,孩子气伐木游戏的图形比

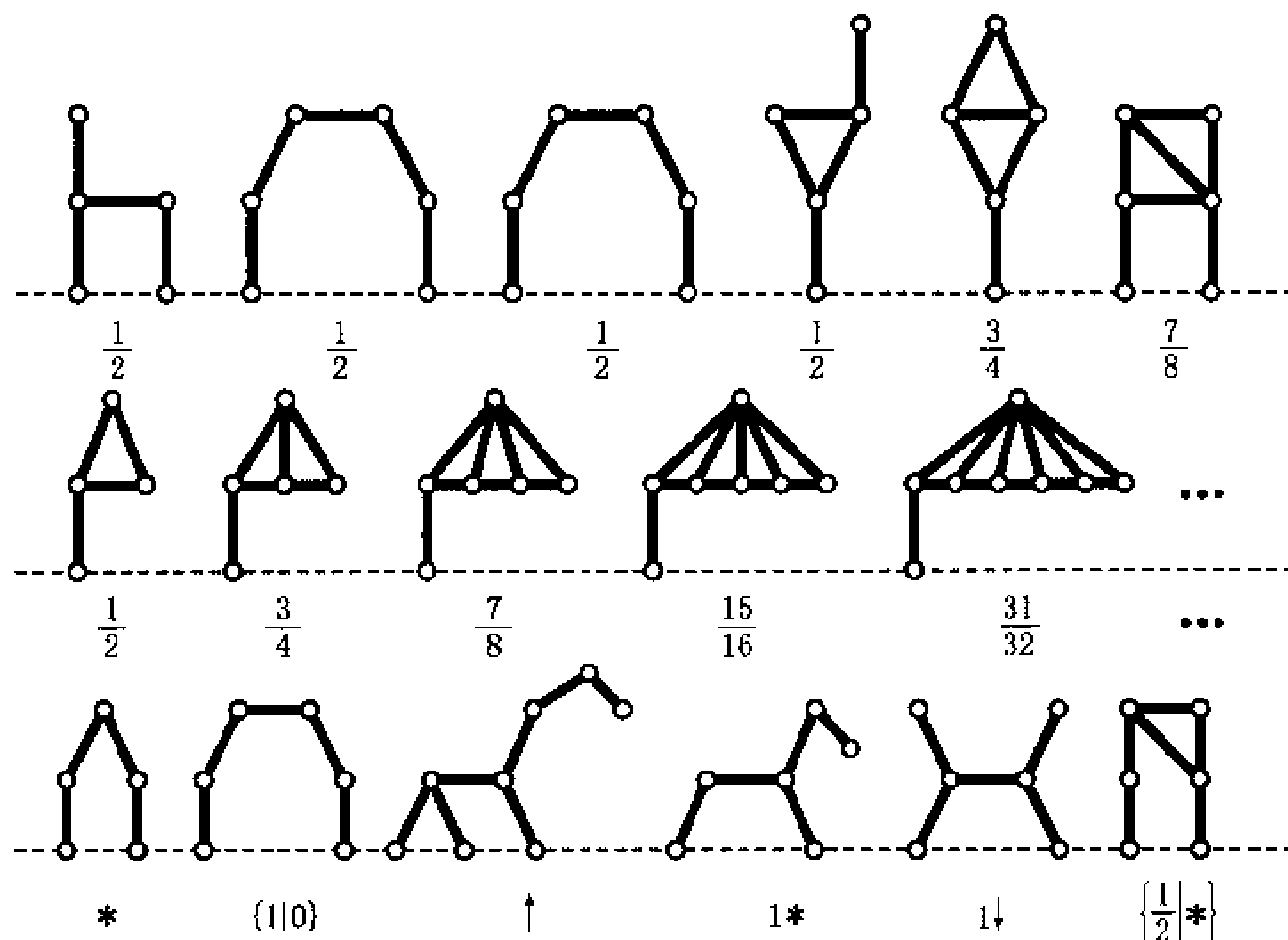



**图 24.** 孩子气伐木游戏很有玩头

* 译者注:我国一般称为"取整函数",于此可见计算机大师 Knuth 命名之风趣.

较简单，它们的值也是如此. 但这并非永远都对，你只要看一看图 21，就会了然于胸. 图中，第一排最后一图的值由理查德·奥斯丁(Richard Austin)所发现. 有很长一段时间，人们一直未能发现分母较此更大的值. 然后，斯丹佛·哲向炎(Steve Tschantz)得出了第二排图形. 图中，某些局势的值甚至根本不是数！在下面几章中，你们将会学习到第二排中一些局势的值，而在第 6 章与第 8 章中将会遇到更多的孩子气伐木游戏图形.

## 参考文献及进一步阅读材料

Richard Austin, Impartial and Partisan Games, M. Sc. Thesis, The University of Calgary, 1976.

C. L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, Ann. Math., Princeton(2), **3**(1902)35-39.

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, pp. 3-14.

J. H. Conway, All games bright and beautiful, Amer. Math. Monthly, **84**(1977)417-434.

Martin Gardner, Mathematical Games, Sci. Amer., each issue(monthly).

P. M. Grundy, Mathematics and games, Eureka, **2**(1939)6-8; reprinted *ibid.* **27**(1964)9-11.

R. P. Sprague, Über mathematische Kampfspiele, Tôhoku Math. J. **41**(1935-36)438-444; Zbl. **13**, 290.

# 第3章

# 某些较难的博弈，怎样才能使它们变得容易一点

我们的生命因繁文缛节而消蚀殆尽……
简单些，还要更简单些.
——亨利·戴维·托雷，《瓦尔登》

## 扑克牌尼姆游戏

把扑克牌分成几堆来玩这种游戏. 同通常的尼姆游戏一样，任何一个局中人都可以从某一堆中拿走一些牌，但现在我们也允许局中人在某一堆中添加一些在游戏进行过程中被他拿走的牌. 以上两类动作都是本游戏所允许的，此外再无其他. 设想现在桌上有三堆，其大小为 3，4，6，如图 1 所示. 游戏已经进行了相当长的时间，双方都已积累起为数可观的扑克牌作为储备. 现在轮到左方先走，他回忆起在通常尼姆游戏中的一步好动作，于是他走成 2，4，6 这样的局势. 但是右方却在 4

这一堆上加添了50张牌,使局势演变为2,54,6,从而远远超出了第2章中所讨论过的内容.

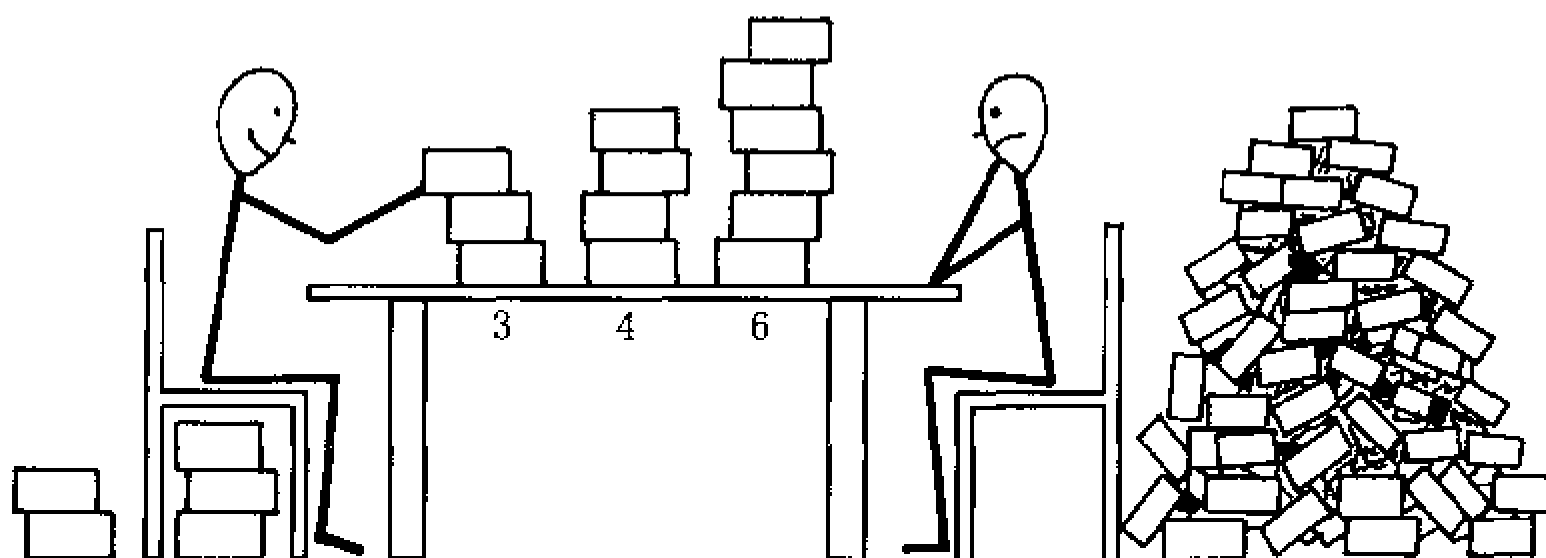



**图 1.** 已进行得很久的一局扑克牌尼姆游戏.

这一招好厉害！特别是右方手中有许多牌可以利用,他不惜用来搅浑局势,左方怎么对付呢？思考了一会儿之后,他毅然拿走了右方刚刚添上去的牌,等待右方的反应.如果右方再在第一堆上添加1000张牌,左方会马上把它们拿走,使局势再次恢复到2,4,6状态.或早或晚,右方终究要"动"这三堆牌,即削减其中某一堆的牌数(否则储存起来的牌尽管为数极多,也必然迟早要耗尽).于是左方即可按照正常的尼姆游戏办法来对付.

所以,在正常尼姆游戏中能赢的局势,在扑克牌尼姆游戏中照样能赢而不问其对手积存了多少张牌.他可以使用两手办法:用正常尼姆游戏中的策略对付其对手的减小牌数的行动,而用逆转办法对付其对手的增大牌数的行动,使局面恢复到原来状态.总之,扑克牌尼姆游戏中的新走法只能推迟失败的到来,而不能避免失败.由于任何新走法的效应可以被另一局中人立即逆转,我们特称之为**可逆转行动**.

## 诺思可德游戏

同样的事情有时会在其他游戏中出现,甚至伪装得更好.诺思可德(Northcott)游戏可在国际象棋盘上进行,每行有一枚白子与一枚黑子,如图2.你可以移动自己一方的任何一枚棋子(前进或后退都行)到同行的任一空格,但不准越过在该行的敌方棋子.倘若你无法行动(因为你的所有棋子都已被对方逼到棋盘的边上),那么你就输了.

如果你不懂窍门,这游戏看来漫无止境.事实上一些劣手们也确实是在永远玩下去,收不了场.但如果你能意识到它不过是尼姆游戏的另一个伪装形式,你就能很快打败别人.在图2这一

图 2. 诺思可德游戏中的一局.

棋盘的左边我们已经注上一些数目，它们表示每一行中黑白两子之间的空格数. 某一方行动时，这些数目中有一个将要改变，随棋子的进退而或增或减. 但正如扑克牌尼姆游戏一样，使其中一个数字增大的行动将立即被对方逆转，所以实际上派不了多大用场.

那么，在图 2 中究竟谁能赢呢？我们在图中看到了一起构成零位的 2，4，6；当然两个 3 又构成了另一个零位. 有两行的空格数已经是 0，也可忽略不计. 唯一剩下来的数是 5，因而肯定先走者能赢，他只要走出一步，使 5 减少为 0 就行. 当对手后退而扩大中间的空档时，先走者可以继续紧逼他，再次恢复到原先的态势. 实际上，赢的一方总是要向对手前进，决不后退.

不应当认为我们在这里建议的走法是唯一的好办法. 例如，在图 2 中，不一定要将 5 减少为 0，也可以使 6 变为 3，4 变为 1，甚至在第二行使 3 变为 6（白子后退），最后一行使 0 变为 5（黑子后退），这将有助于防止泄露机关，所以你不应该老是用紧追前进来回答对方的后退动作. 根据同样理由，有时候采取后退策略是机智的.

## 虚拟的尼姆堆以及 MEX（局外最小数）法则

考虑无偏博弈

$$G=\{*0,*1,*2,*5,*6,*9 \mid *0,*1,*2,*5,*6,*9\}.$$

这是一种新形式的尼姆游戏，每位局中人都可移动到大小为 0，1，2，5，6，9 的各堆. 换言之，我们可以把它看成是一个比较特殊的，即大小为 3（第一个在 $G$ 中不出现的数字）的尼姆堆，从它出发，像通常一样，可以走到大小为 0，1 或 2 的堆，但现在还能允许我们走到 5，6 或 9 的堆. 然而，上述关于扑克牌尼姆游戏的一番议论已足以表明这种额外的自由度其实并无用处.

为了说得更确切，设某局中人在博弈 $*3+H+K+\cdots$ 中有一取胜策略，则在同样情况下，他

在博弈 $G+H+K+\cdots$ 中也将有一个取胜策略. 当他的策略要求在 $*3,H,K,\cdots$ 中走出一步行动时，此步行动依然可用，而不必用上从 $G$ 到 $*5,*6,*9$ 的新的允许行动. 如果其对手试图这样做，他可立即加以逆转，使之返回到 $*3$(因为 5,6,9 都大于 3)，并恢复原来的策略. 从而 $G$ 可由 $*3$ 取代而不影响双方的机遇.

同样的论证表明形如

$$G=\{*a,*b,*c,\cdots \mid *a,*b,*c,\cdots\}$$

的博弈(其中同样的数字出现于记号 | 的两侧)，实际是一种伪装的尼姆堆. 若 $m$ 是不出现于 $a,b,c,\cdots$ 中的最小整数(0,1,2,3,…)，则任一局中人仍可从 $*m$ 走到 $*0,*1,*2,\cdots,*(m-1)$. 如果其对手从 $G$ 中走出别的行动，它一定是走到 $n>m$ 的某个 $*n$. 对此，当然可以立即逆转，使从 $*n$ 回到 $*m$. 所以，$G$ 实际上不过是一个伪装的尼姆堆 $*m$ 而已.

我们可以总结如下：

> 若左、右双方在 $G$ 中都有同样的走法可以选择，它们都是尼姆堆 $*a,*b,*c,\cdots\cdots$，则 $G$ 本身可视为一个尼姆堆 $*m$，这里 $m$ 是不在数 $a,b,c,\cdots$ 中的最小数 0 或 1 或 2 或……

**局外最小数(MEX)法则**

局外最小数称为数 $a,b,c,\cdots$ 的 **mex**.

## 无偏博弈的斯普莱格—格隆第理论

上述结果表明任一无偏博弈可以视为一个虚拟的尼姆堆. 设有一个无偏博弈

$$G=\{A,B,C,\cdots \mid A,B,C,\cdots\},$$

其中 $A,B,C,\cdots$ 是一个较简单的无偏博弈，而可认为相当于尼姆堆 $*a,*b,*c,\cdots$，但此时 $G$ 可看作是上面已经定义了的 $*m$. 于是得出下面的

**虚拟尼姆堆原理**

> 任一无偏博弈不过是一个虚拟的尼姆堆(具有可逆转的，能增大某些堆大小的行动). MEX 规则将给出博弈 $G$ 所对应的堆的大小，它是一个最小的数，不同于与 $G$ 中各走法对应的任何一堆的大小.

以上原理分别由斯普莱格(R. P. Sprague)于 1936 年、格隆第(P. M. Grundy)于 1939 年相互独立地发现,尽管他们的说法与这里所讲的不尽一致. 本原理意味着,如果我们能玩尼姆游戏,那么就能玩其他任何一种无偏博弈,只要向我们提供一部辞典,告诉我们该游戏的局势相当于什么样的拧数(尼姆堆)就行了. 下面的白骑士(白马)游戏提供了这种辞典方法的一个简明例子.

## 白骑士

在棋盘任意一格里的马(骑士)有四种跳法,见图 3. 你也许会回忆得起,童话里的这位骑士有一个坏习惯:经常丢东西. 而好心的爱丽丝老是要替他收拾遗失物品,并把它们装箱. 这些箱子形成一堆,见图中的右面部分. 本游戏规定有两种行动可以采取,或者是把骑士走到四个地方之一,或者偷走一些箱子. 当骑士走到角上之家(占四个空格),所有遗物的箱子都被拿光时,游戏便告终止.

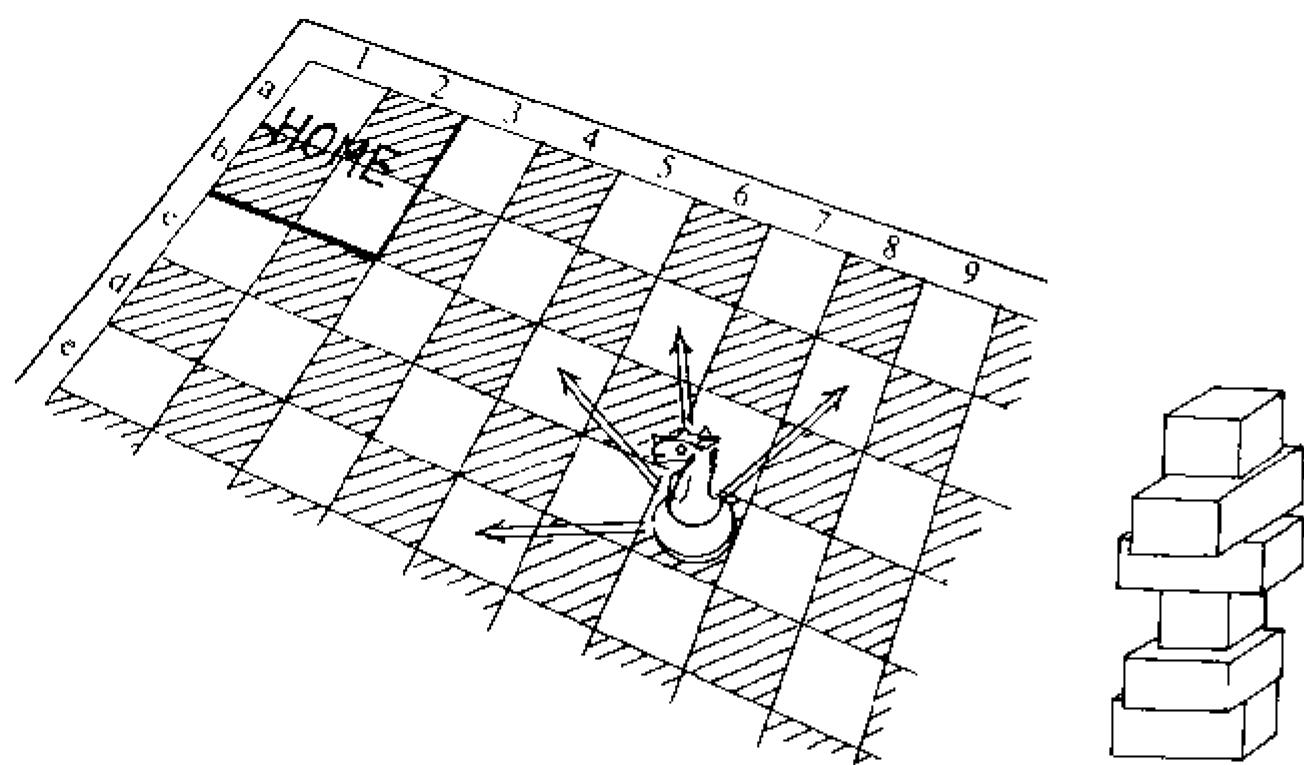



**图 3.** 白骑士及其行李.

本游戏实际上相当于骑士游戏再添上一个尼姆堆 * 6. 表 1 给出了骑士处于不同位置的拧数. 现在让我们来求图 3 中处于 d7 位置上的骑士之值,假定我们已经知道骑士能去的四个地方之值. 图 1 表明,这些地方相当于大小为

0,3,0,1(mex=2)

的虚拟尼姆堆. 因而目前的局势相当于一个大小为 2 的虚拟尼姆堆,其值为 * 2. 因而图 3 的最好走法便是:偷走四只失物箱,使它只剩下两只箱子.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 |
| b | 0 | 0 | *2 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 |
| c | *1 | *2 | *2 | *2 | *3 | *2 | *2 | *2 | *3 | *2 | *2 | *2 | *3 | *2 | *2 | *2 | *3 | *2 | *2 | |
| d | *1 | *1 | *2 | *1 | *4 | *3 | *2 | *3 | *3 | *3 | *2 | *3 | *3 | *3 | *2 | *3 | *3 | *3 | *2 | |
| e | 0 | 0 | *3 | *4 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | | |
| f | 0 | 0 | *2 | *3 | 0 | 0 | *2 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | | |
| g | *1 | *1 | *2 | *2 | *1 | *2 | *2 | *2 | *3 | *2 | *2 | *2 | *3 | *2 | *2 | *2 | *3 | | | |
| h | *1 | *1 | *2 | *3 | *1 | *1 | *2 | *1 | *4 | *3 | *2 | *3 | *3 | *3 | *2 | *3 | *3 | | | |
| i | 0 | 0 | *3 | *3 | 0 | 0 | *3 | *4 | 0 | 0 | *1 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | | | | |
| j | 0 | 0 | *2 | *3 | 0 | 0 | *2 | *3 | 0 | 0 | *2 | *1 | 0 | 0 | *1 | *1 | | | | |
| k | *1 | *1 | *2 | *2 | *1 | *1 | *2 | *2 | *1 | *2 | *2 | *2 | *3 | *2 | | | | | | |
| l | *1 | *1 | *2 | *3 | *1 | *1 | *2 | *3 | *1 | *1 | *2 | *1 | | | | | | | | |
| m | 0 | 0 | *3 | *3 | 0 | 0 | *3 | *3 | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| n | 0 | 0 | *2 | *3 | 0 | 0 | *2 | *3 | | | | | | | | | | | | |
| o | *1 | *1 | *2 | *2 | *1 | *1 | | | | | | | | | | | | | | |
| p | *1 | *1 | *2 | *3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| q | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**表 1.** 白骑士游戏的拧数.

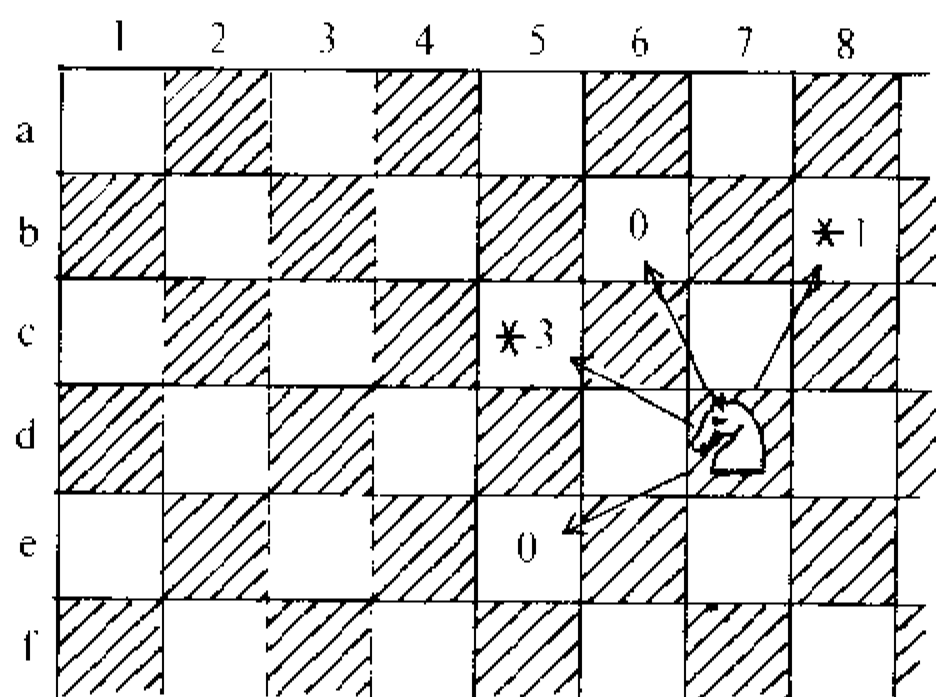



**图 4.** 白骑士所到地方之值.

# 拧数的相加

在第 2 章中已经看到，大小为 2 的尼姆堆加上大小为 3 的尼姆堆相当于大小为 1 的尼姆堆．现在我们要说，这种事情并非偶然巧合．任意两尼姆堆 $*a$ 与 $*b$ 之和是一个无偏博弈，因而相当于某一个其他的尼姆堆 $*c$，数 $c$ 称为 $a$ 与 $b$ 的拧数之和，记为 $a \overset{*}{+} b$．一般来说，我们应怎样来求拧数和呢？

$*a + *b$ 的各种选择是一切形如 $*a' + *b$ 或 $*a + *b'$ 的所有局势，其中 $a'$ 表示小于 $a$ 的数 0，1，2，…，而 $b'$ 表示小于 $b$ 的数 0，1，2，…．因而 $a \overset{*}{+} b$ 是不在 $a' \overset{*}{+} b$，$a \overset{*}{+} b'$ $(a'<a, b'<b)$ 中的最小数 0，1，2，…．

利用这条规则可以造出表 2．例如 $6 \overset{*}{+} 3$ 可计算如下：第三列中前面几个数字 3，2，1，0，7，6 对应于选择 $*6' + *3$（这里的 $6'$ 代表 0，1，2，3，4，5 中的一个）．而第六行中的前三数 6，7，4 则对应于 $*6 + *3'$（$3'$ 代表 0，1 或 2）中的选择．在行，列中都没有出现过的最小数是 5，所以 $6 \overset{*}{+} 3 = 5$，即 $*6 + *3 = *5$．如果上述的白色骑士代之以一枚只能向西或向北行走的白色保垒（白车），则后一博弈或将有助于理解拧数加法表的编制．

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | 11 | 10 | 13 | 12 | 15 | 14 |
| 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 7 | 4 | 5 | 10 | 11 | 8 | 9 | 14 | 15 | 12 | 13 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 | 11 | 10 | 9 | 8 | 15 | 14 | 13 | 12 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 12 | 13 | 14 | 15 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 5 | 4 | 7 | 6 | 1 | 0 | 3 | 2 | 13 | 12 | 15 | 14 | 9 | 8 | 11 | 10 |
| 6 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 | 14 | 15 | 12 | 13 | 10 | 11 | 8 | 9 |
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 9 | 8 | 11 | 10 | 13 | 12 | 15 | 14 | 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 |
| 10 | 11 | 8 | 9 | 14 | 15 | 12 | 13 | 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 7 | 4 | 5 |
| 11 | 10 | 9 | 8 | 15 | 14 | 13 | 12 | 3 | 2 | 1 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 8 | 9 | 10 | 11 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 13 | 12 | 15 | 14 | 9 | 8 | 11 | 10 | 5 | 4 | 7 | 6 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 14 | 15 | 12 | 13 | 10 | 11 | 8 | 9 | 6 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

**表 2.** 一张尼姆加法表．

在本章增补材料中你们可以找到一般的拧数加法规律,并将有很多应用机会,例如第 4 章,第 12 章,第 11 章与第 15 章.

## 惠德皇后游戏

在惠德皇后游戏里头,同一方格子中可以放入任意多枚皇后棋子,每个局中人在轮到他走时,可将 -枚皇后棋子向北、向西或向西北方行走,甚至可以跳过其他皇后棋子.

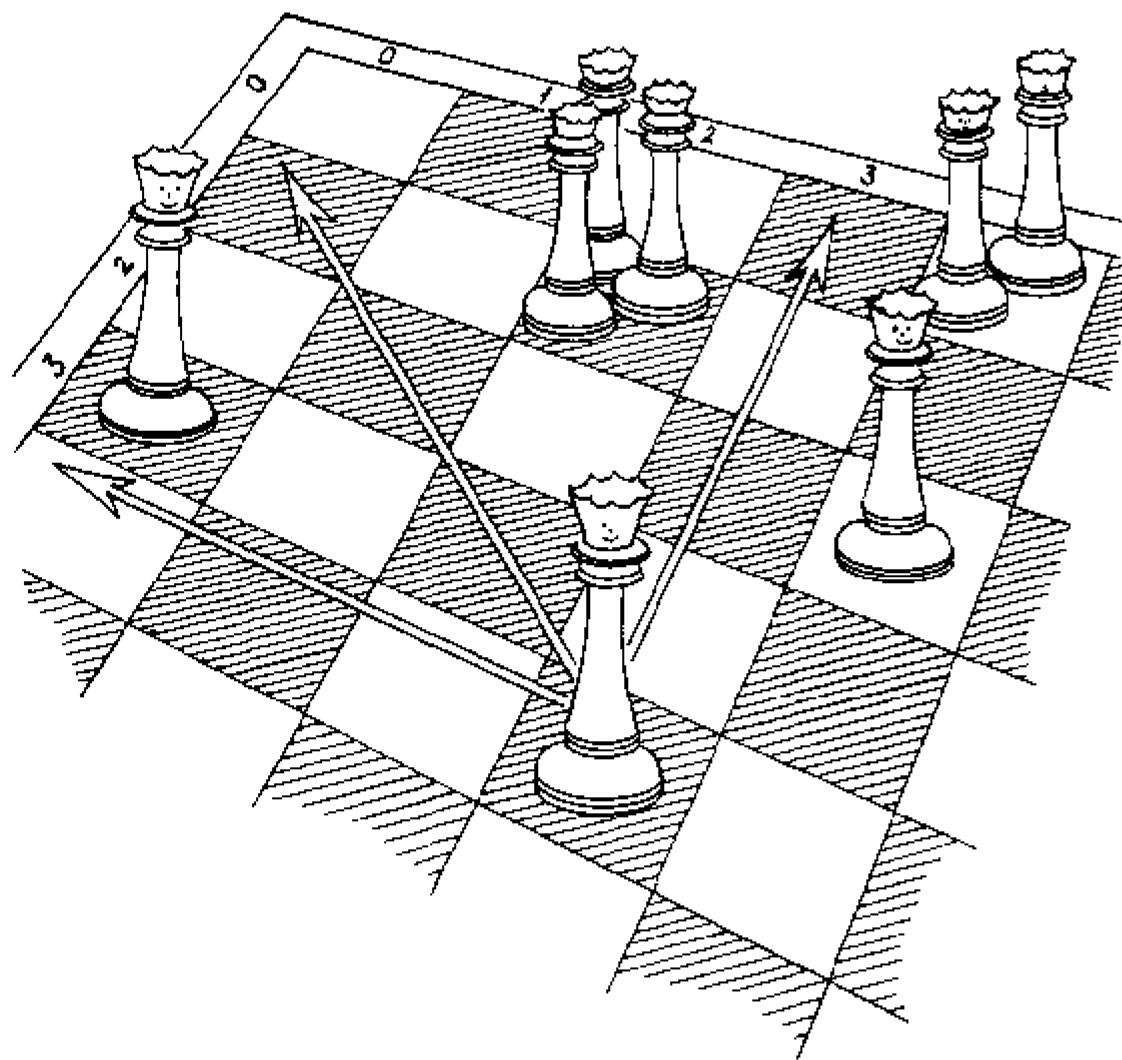



**图 5.** 惠德皇后的走法.

由于各枚皇后棋子在走法上的独立性,我们不妨认为整个游戏是只有一枚皇后棋子的许多较小游戏之和. 于是,棋盘上的各枚皇后棋子对应于尼姆堆 $*a$, $*b$, $*c$,…. 从而可以用得上拧数相加法则. 试对此种游戏作出拧数辞典— 如果你觉得疲倦了,可去查阅本章增补材料以汲取更多信息.

一个皇后的游戏是惠德霍夫(Wythoff)游戏(1905 年)的变相形式. 这游戏有两种走法:要末在任一堆中取走任何数量的棋子,要末在两堆中同时取走等量的棋子. 我们在第 12 章与第 13 章中会再次遇到这种惠德皇后游戏.

# 一般博弈中的可逆转行动

在一个任意博弈 $G$ 中，所谓某些行动可以逆转，究竟意味着什么呢？设在博弈

$$G=\{A,B,C,\cdots|D,E,F,\cdots\}$$

中，右方走到 $D$ 的一步可以逆转. 这意味着，左方存在某个从 $D$ 到 $D^L$ 的走法，而这个 $D^L$ 对左方来说，至少同 $G$ 一样有利，即 $D^L\geqslant G$. 从而一旦右方自 $G$ 走到 $D$，左方可从 $D$ 走到 $D^L$ 而予以逆转，甚至有希望把局势转变得更有利. 假定 $D^L$ 是下列博弈

$$D^L=\{U,V,W,\cdots|X,Y,Z,\cdots\}$$

于是，$G$ 看上去有点像图 6(a).

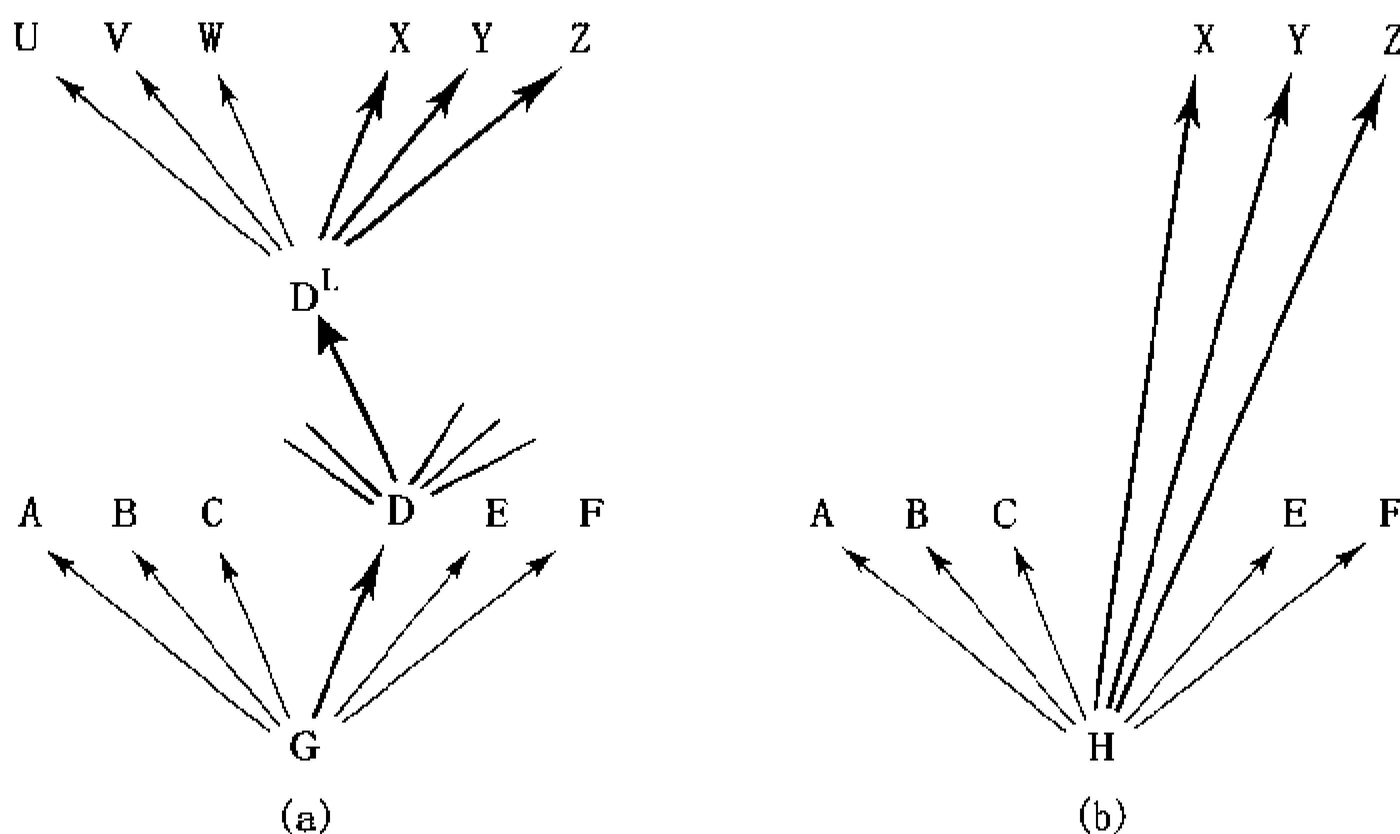



图 6. 避开一个可逆走法.

不论何时，右方从 $G$ 走到 $D$，左方即可从 $D$ 走到 $D^L$ 予以逆转，而从 $D^L$，右方又可走到 $X$，$Y$，$Z$，…. 因此可以把 $G$ 缩短，省略掉右方走到 $D$ 的一步，而让他直接走到 $X$，$Y$，$Z$，…如此等等，由此我们得到博弈

$$H=\{A,B,C,\cdots|X,Y,Z,\cdots,E,F,\cdots\}.$$

如图 6(b)所示，$H$ 与 $G$ 应具有同样的值.

易于证明这一点，我们只要来玩博弈 $G-H$，即图 7 所示的

$$\{A,B,C,\cdots|D,E,F,\cdots\}+\{-X,-Y,-Z,\cdots,-E,-F,\cdots|-A,-B,-C,\cdots\}.$$

并通过以下办法证明双方都没有好的走法.

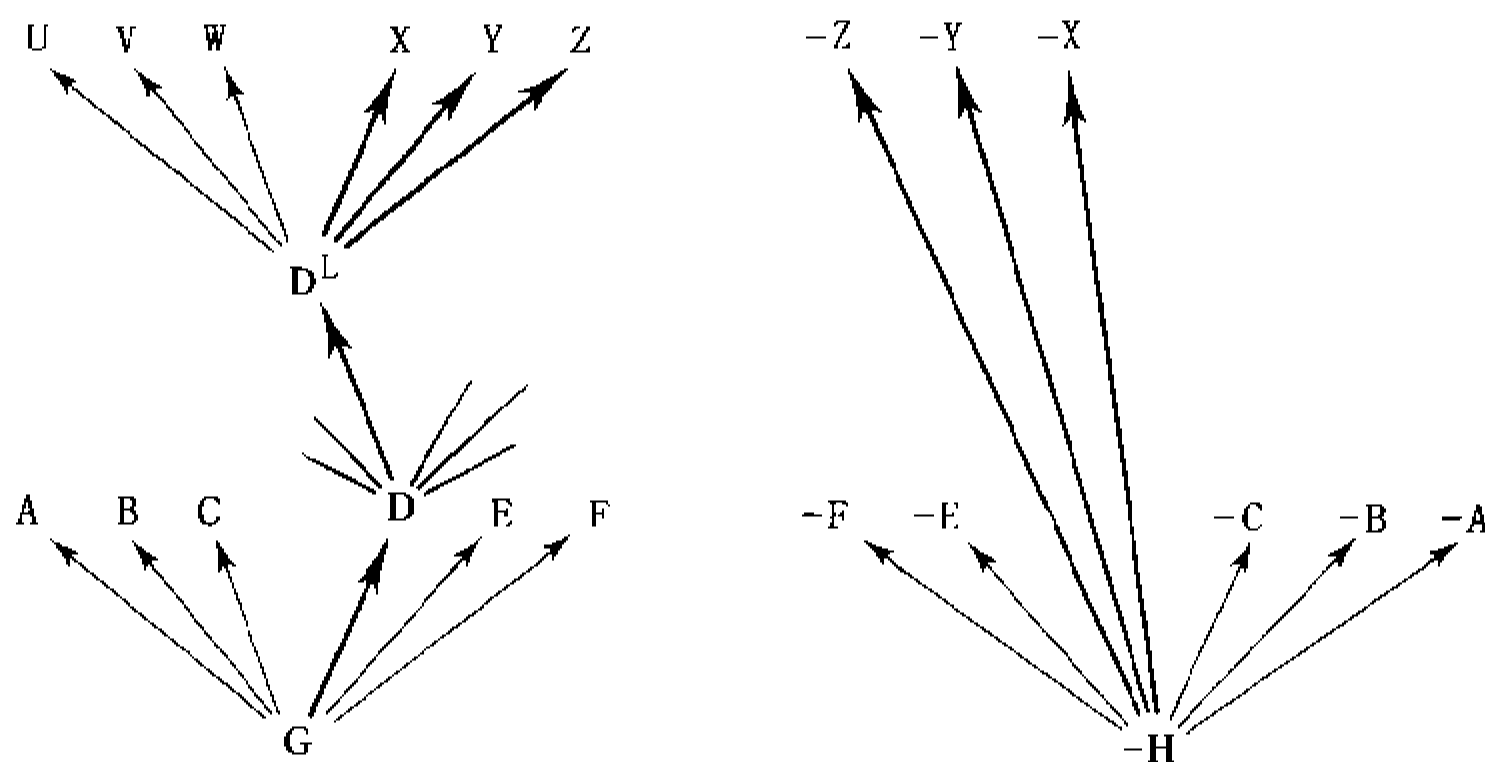



图7. 一个零博弈.

显然,从 $G$ 到 $A,B,C,\cdots$ 或 $E,F,\cdots$ 的行动可被来自 $-H$ 的.它们的负行动立即逆转,反之亦然.所以唯一有希望的行动是:左方从 $-H$ 走到 $-X$,或 $-Y$,或 $-Z$;…右方从 $G$ 到 $D$.

但左方的希望立即就会破灭,他从 $-H$ 走到 $-X$ 的行动后所留下的局势 $G-H$ 甚至比 $D^L-X$ 还要坏,而对于后者,右方只要从 $D^L$ 走到 $X$ 就可赢.

还剩下一种行动,即右方从 $G$ 走到 $D$,这时左方可逆转到 $D^L$ 使剩下的总局势为 $D^L-H$,即

$$\{U,V,W,\cdots|X,Y,Z,\cdots\}-\{-X,-Y,-Z,\cdots,-E,-F,\cdots|-A,-B,-C,\cdots\}.$$

现在右方不敢从 $D^L$ 走到 $X$ 或 $Y$ 或 $Z\cdots$,因为左方可从 $-H$ 走到相应的 $-X,-Y,-Z,\cdots$.于是右方的唯一希望是从 $-H$ 走,留下总局势 $D^L-A$,或 $D^L-B$ 或 $D^L-C,\cdots$,但因 $D^L\geqslant G$,这些局势对右方来说,至少是同 $G-A,G-B,G-C$ 一样坏,…而对于后者,左方可在 $G$ 中采取行动,使它走到适当的 $A$ 或 $B$ 或 $C\cdots$ 而获胜.

以上我们已研究了一切可能的第一步动作,结果表明 $G-H$ 是一个零博弈.因此在计算过程中,可以用 $H$ 来取代 $G$,而这往往是很有价值的化简.

最后,让我们总结如下:

> 如果 $G$ 中的右方选择 $D$,本身有一个左方选择 $D^L\geqslant G$,则当我们用 $D^L$ 中的一切右方选择 $X,Y,Z,\cdots$ 来取代 $G$ 中的右方选择 $D$ 时,$G$ 的值不变.

**避开右方的可逆行动**

当然，左方的行动也有可能是可逆的：

> 如果 $G$ 的左方选择 $C$，本身有一个右方选择 $C^R \leqslant G$，则当我们用 $C^R$ 中的一切列举出来的选择来取代 $C$ 时，$G$ 的值不会改变.

**避开左方的可逆行动**

## 删去被优超的选择

现在要讲以前我们已提到过的另一种化简办法，自然有必要说得更确切一些.

在博弈

$$G=\{A,B,C,\cdots|D,E,F,\cdots\}$$

中，若 $A \leqslant B$，则称 $A$ 被 $B$ **优超**了，若 $D \leqslant E$，则 $E$ 被 $D$ 优超. 换言之，对同一局中人来说，在两个可能走法中，一个走法至少不劣于另一走法. 于是我们可以保留优超走法，而略去被优超的走法. 就上述情况而言，这意味着 $G$ 的值同

$$K=\{B,C,\cdots|D,F,\cdots\}$$

一样. 实际上，$G-K$ 是一个零博弈，因为从 $G$ 到 $A$ 或 $E$ 的行动可被 $-K$ 到 $-B$ 或 $-D$ 的行动立即逆转，而 $G$，$K$ 两个分支博弈中，在任一分支的其他行动可以被另一分支中的负行动立即逆转.

> 如果保留优超选择，删去被优超的选择，则 $G$ 值不受影响.

**删去被优超的选择**

应当记住，可逆选择并不是被删去，而是被回避过去的，对相应的局中人而言，即由其对手逆转到的局势中表列的各项选择所取代.

## 有上、下箭头↑，↓的癞蛤蟆与青蛙游戏

在第 1 章中，我们已遇到过这种游戏的四格形式. 现在要考虑的五格形式将显示出更为有趣的性态. 在任一五格跑道中，左方可使他的一只癞蛤蟆向右走一步进入空格内，或者跳过一只青蛙到前方的一个空格中去. 右方的行动与此类似，但他的青蛙必须向左走或跳. 图 8 给出了本游戏的全部演变状态，初始状态是两只癞蛤蟆与两只青蛙，中间由一个空格把它们隔开.

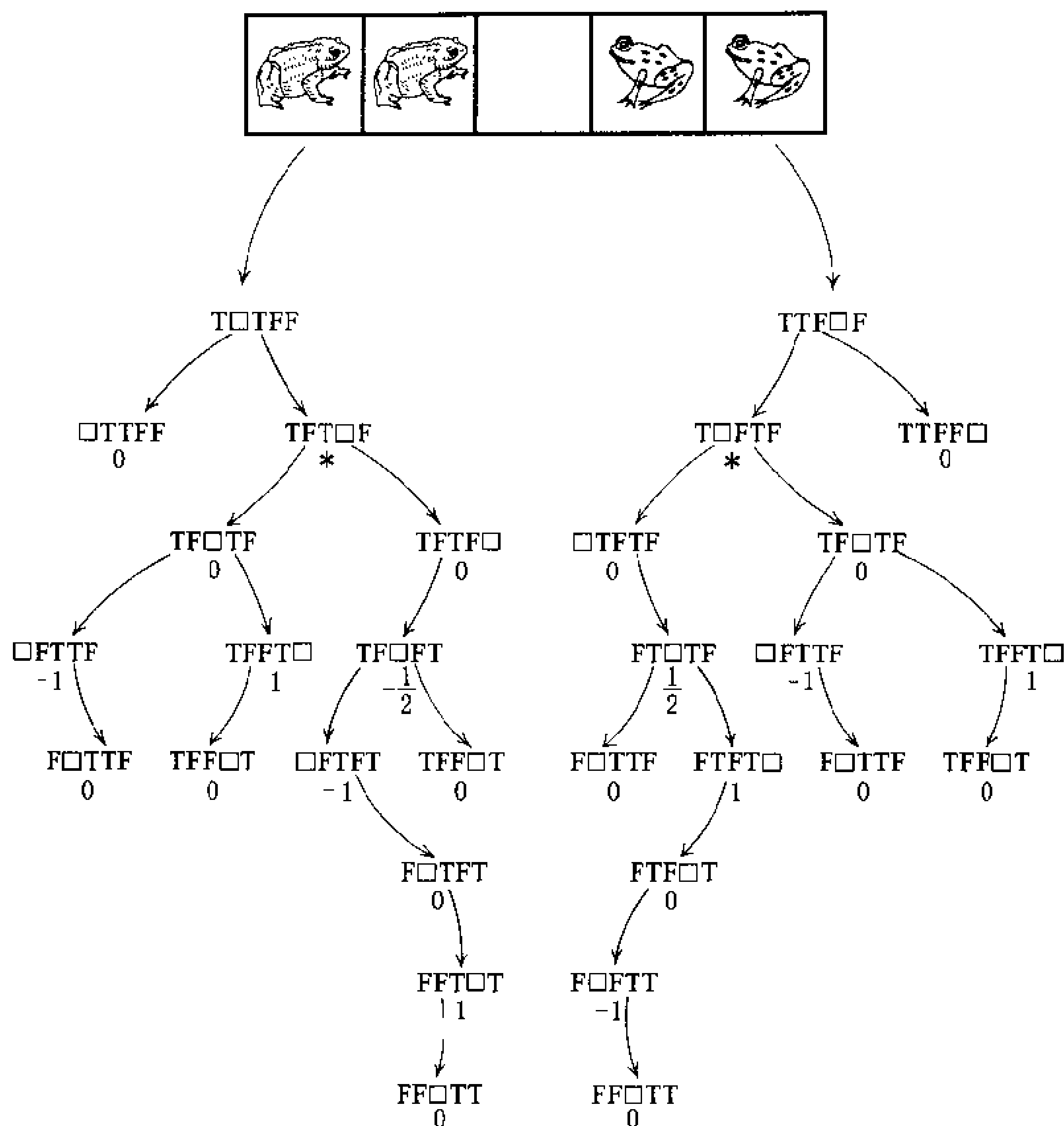



图 8. 癞蛤蟆与青蛙游戏的解剖.

计算的办法是由下而上，除了最上面的三个局势之外，其他都已算出.

下一个要考虑的局势是

$$\text{T□TFF} = \{\text{□TTFF} \mid \text{TFT□F}\} = \{0 \mid *\}.$$

由于 0 是一个先走必输的状态，所以左方只要走到 0，就可赢得游戏，而右方走到 * 却不会赢，因左方可回报以走到 0 的行动. 所以 $\{0 \mid *\}$ 是一个正值博弈，但由于 * 小于 $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$ 中

的每一个数，所以$\{0|*\}$小于或等于$\{0|2\}$，$\{0|1\}$，$\{0|\frac{1}{2}\}$，$\{0|\frac{1}{4}\}$，…中的每一个，即小于或等于1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…. 由此，我们得出了一个小于一切正数的正值. 由于以前我们从未看到过这种东西，我们不能希冀把它加以简化，从而需要一个新的名称与记号，$\uparrow$，称为“向上箭头”，或者简称为“上”(**up**).

类似地，由左、右两方互换角色而得出的局势TTF□F的值$\{*|0\}$是负的，但它大于一切负数，由于$*$是它自身之负，从而$\{*|0\}$是$\{0|*\}$的负，我们称之为$\downarrow$或“向下箭头”，简称“下”(**down**)在本书之末的索引部分，我们将会有五花八门的、各种形式的上、下箭头！

图8的初始状态，其值为

TT□FF $=\{$T□TFF|TTF□F$\}=\{\uparrow|\downarrow\}$.

对它，我们要不要再来定一个新名？首先让我们来看看，能不能简化它？由于每个局中人只有一种选择，没有优超走法. 于是让我们来看看可逆行动. 由于$G=\{\uparrow|\downarrow\}$，右方走到$\downarrow$能否逆转？此事发生仅仅在某个左方选择$\downarrow^L\geqslant G$时，由于$\downarrow=\{*|0\}$，我们要问是否$*\geqslant G$，即是否$G-*\leqslant 0$？左方有没有一个来自

$$G-*=\{\uparrow|\downarrow\}+\{0|0\}^*$$

的致胜策略？左方从$*$到0的走法将被右方从$G$到$\downarrow$的办法所格开，而他从$G$到$\uparrow$的走法又将被右方从$\uparrow$到$*$的走法弹开，后者将使总的博弈值成为$*+*=0$. 故而若左方先走，右方一定能赢. 这就表明$G-*\leqslant 0$. 这意味着右方可以避开他的走到$\downarrow$的行动，而直接从$G$走到$\downarrow^{LR}=*^R=0$，从而证明了$G=\{\uparrow|0\}$，而左方也能避开他的走到$\uparrow$的行动. 这样一来，$G$可进一步简化到$\{0|0\}=*$.

$$\{\uparrow|\downarrow\}=\{\uparrow|0\}=\{0|\downarrow\}=\{0|0\}=*.$$

也可以从另一种途径(注意到右方从$G-*$也不存在取胜策略)来说明$G=*$. 但是，对一个复杂的$G$来说，在猜测它的最简形式之前，最好还是要看看它有没有什么可逆行动.

## 博弈的跟踪与鉴定

这本书的大部分要叙述从各种有偏博弈的任一局势出发，哪一方可以取胜的办法. 我们回忆

* 译者注：由于$*$的特殊性质，$*+*=0$，∴ $*=-*$，∴ $G-*=G+*$.

第 1 章的增补材料，所谓有偏博弈是指，提供给两位局中人的行动选择未必尽同．例如，要问图 9 的九跑道五格癞蛤蟆—青蛙游戏中谁是胜者，我们就必须学会怎样去求 ↑，↓，* 或其他“怪异”数值之和．在对付其他博弈时，我们甚至需要掌握更为一般的数值加法以肯定博弈的结果：正，负，零或模糊的．在中、小学里我们已学会了数的相加．利用表 2，现在我们也能求两个较小的拧数之和．我们也已知道，对任一数 $x$，都有 $x+*=\{x|x\}=x*$．由此可见，在我们目前暂时还不能相加的数中，最简单的一对或许就是 ↑ 与 * 了．我们将把它们的和记为 ↑*．它会不会等于 {↑|↑} 呢？

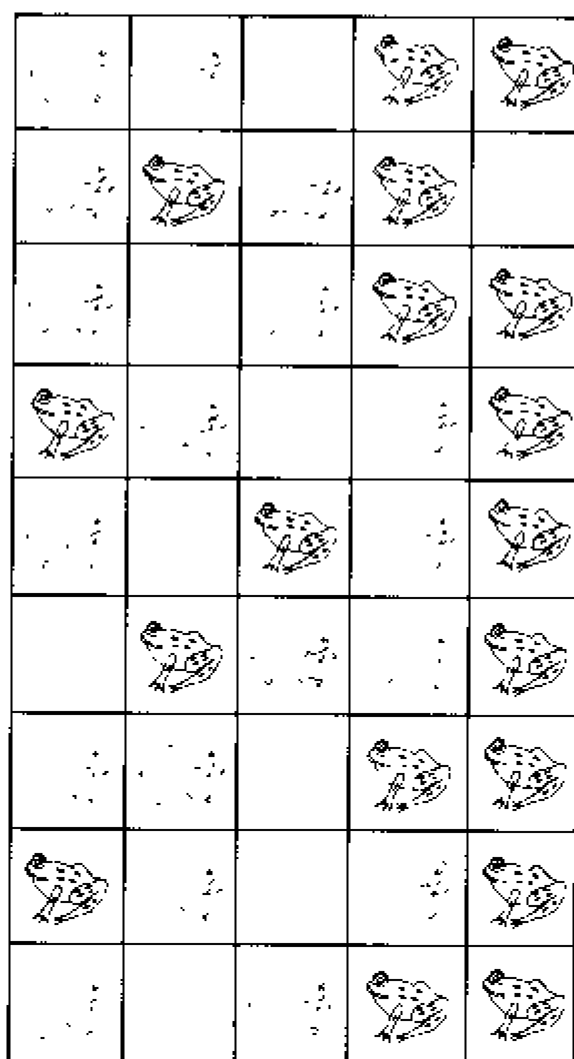


图 9. 癞蛤蟆与青蛙极易拼凑成一种很复杂的游戏.

我们经常用一种办法来测试两个值的相等与否：看一看它们的差博弈是否总是后走者可赢．那么现在

$$\{\uparrow|\uparrow\} - \uparrow* = \{\uparrow|\uparrow\} + \{*\overset{\downarrow}{|}0\} = \{0\overset{*}{|}0\},$$

能这样吗？不！决非如此！如果左方从分支 ↓ 中走到 *，其时，总的值将变成 {↑|↑} + * + * = {↑|↑}，显然为正，所以左方定能取胜而右方不行．实际上，从 {↑|↑} − ↑* 出发，右方不存在好的走法，因而，{↑|↑} 严格大于 ↑*．

我们将为 ↑* 寻求一个正确的表达式．由以前已经讲过的博弈和之定义，考虑左、右方在两

个分支中的行动.

$$\uparrow * = \uparrow + * = \{0 + *, \uparrow + 0 \mid * + *, \uparrow + 0\} = \{*, \uparrow \mid 0, \uparrow\},$$

这里已利用了等式$* + * = 0$.

此式又可进一步简化为$\uparrow * = \{\uparrow, * \mid 0\}$，这是因为右方的走法$\uparrow$被其另一走法0优超之故. 但是左方的任一走法都不能优超另外一个，因从它们的差$\uparrow * = \uparrow + *$，左方走到$\uparrow + 0$时可胜，而右方则可走$* + *$而胜. 但是，左方的$\uparrow$走法可被右方通过$\uparrow^R = *$而逆转，因为显然有$* \leqslant \uparrow *$. 所以我们可允许左方直接走到$\uparrow^{RL} = *^L = 0$而避开$\uparrow$的走法，这不会影响博弈之值. 于是我们得到如下的关系式

$$\boxed{\uparrow * = \uparrow + * = \{0, * \mid 0\}.}$$

类似地可得其负：

$$\boxed{\downarrow * = \downarrow + * = \{0 \mid 0, *\}.}$$

我们把它们用方框套起来，因为它们的确是最简单的形式，其中已不存在优超与可逆的走法.

## 花朵值多少?

现在我们可以算出伐木杂脍游戏的某些简单局势之值：

$= \{0, * \mid 0\} = \uparrow *$,

$= \{0 \mid 0, *\} = \downarrow *$.

第2章图5(a)的花木有着较漂亮的形状. 一般来说，我们可考虑具有任意多红、蓝花瓣的花木，如图10(a)所示. 哪一方能取胜?

容易看出，谁首先砍掉两根绿色主茎之一，他就得输. 因为对手只要砍掉另一根主茎就行了. 所以这种游戏可以归结为“她爱我”、“她不爱我”的恋爱游戏，不过这次是用红、蓝花瓣代替男、女主角而已. 无论是左方还是右方，首先无法拿去自己一方颜色的花瓣者必然会输，因为他

**图 10.** 有待鉴定的两朵花.

别无选择，只好砍伐主茎了. 所以在由两朵花组合成的局势中，哪一方的花瓣数量较多，他就会赢. 除非红、蓝两色的花瓣一样多时，后走者会赢. 因为其对手既要拿走第一朵花瓣，也要首先铤而走险，砍伐主茎.

通过此种论证可以表明图 10(b)是一个零博弈，因为每个局中人都有三朵花瓣，由于图 10(b)的一瓣花之值为 $\downarrow + *$.（花瓣像蛇头一样可以伸展，拉直，不影响游戏），这就鉴定了第 2 章中图 5(a)的花朵之值为 $\uparrow + *$.

## 博弈炒杂锦

左、右双方不久就要回到桌旁（见图 11），他们要来玩蓝－红－绿伐木，科尔，癞蛤蟆与青蛙

**图 11.** 博弈的杂凑.

## 星的逼近观察

对于模糊的 * ,我们现在有了一个更好的概念,因为我们已证明它小于 ⇑ = ↑ + ↑,而大于 ⇓ = ↓ + ↓,但它却同 ↓ ,0, ↑ 中的每一个搅混在一起. 图 12 中的那朵白云,尽管它所覆盖的只是一个数 0,却至少具有 ↑ 的半径.

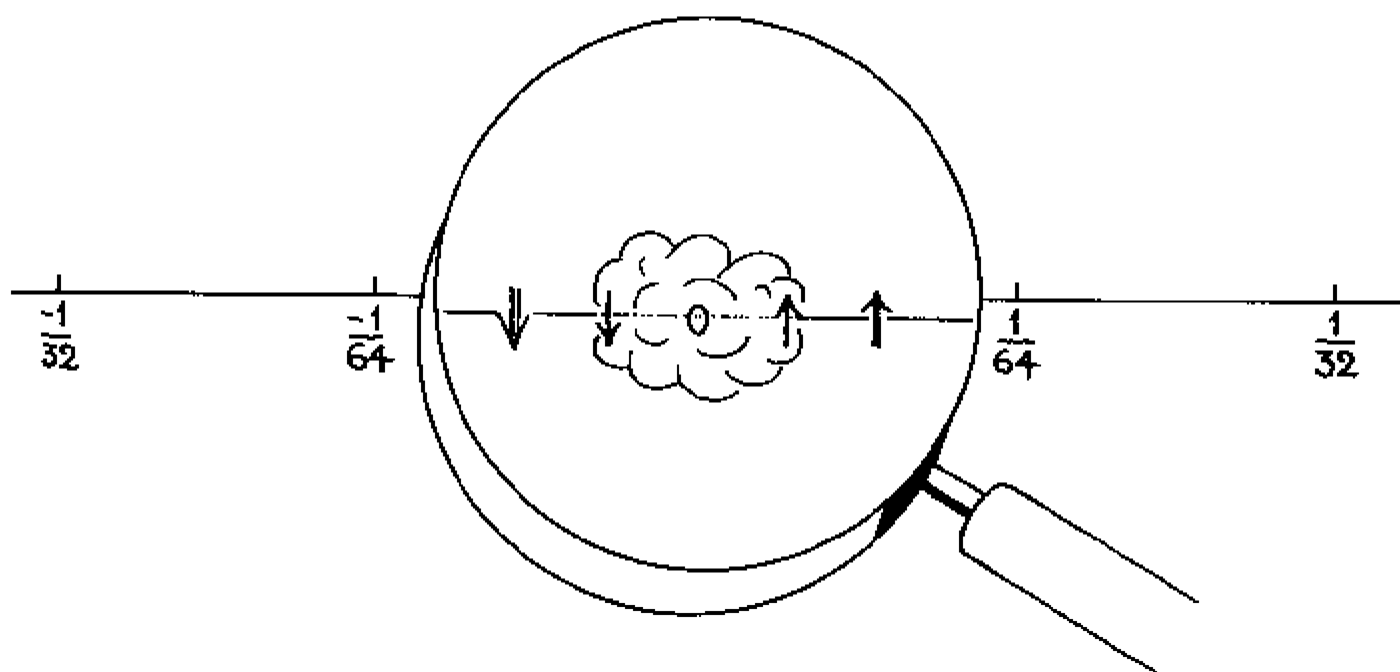
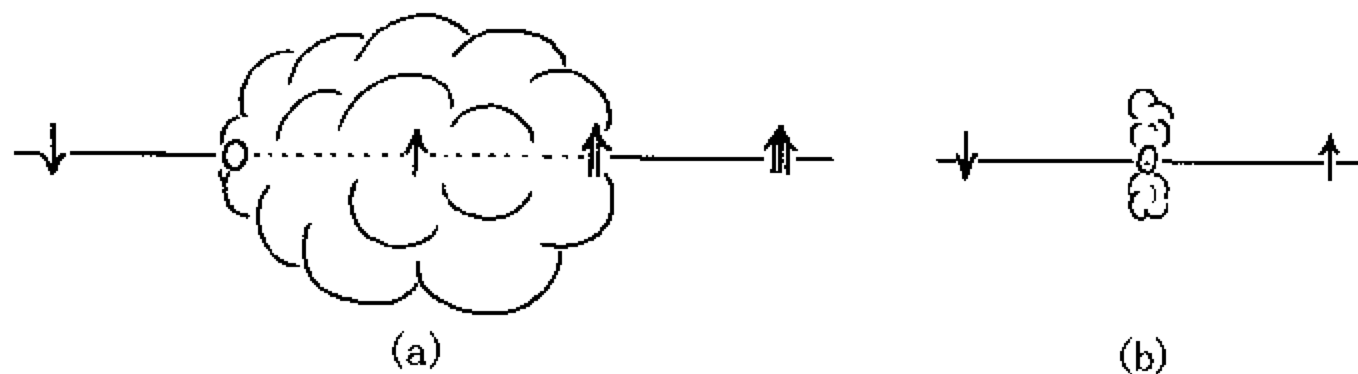



图 12. 通过放大镜看到的"星"的模糊形象.

利用类似办法,可考察其他较小的博弈. 图 13(a) 表明的是 ↑ * ,由图 12 加上 ↑ 而得出. 图 13(b)则说明了 $n \geqslant 2$ 的一切 $*n$.



(a) (b)

图 13. ↑ * 与 $*n(n \geqslant 2)$ 的行踪(藏身之地).

## {↑|↑}与{0|↑}之值

在更复杂的局势下, ↑ 与 ↓ 经常是局中人可选取的走法,例如前面已经讲过{↑|↓}=

$\{\uparrow\ 0\}=\{0|\downarrow\}=*$，现在来看局势$\{\uparrow|\uparrow\}$. 值$\{0\ \uparrow\}$出现于图 14 的七格癞蛤蟆—青蛙问题，其中标记着 0 的四个局势可以验证都是后走者可以赢的. 那么，$\{\uparrow|\uparrow\}$与$\{0\ \uparrow\}$的大小又怎样呢?

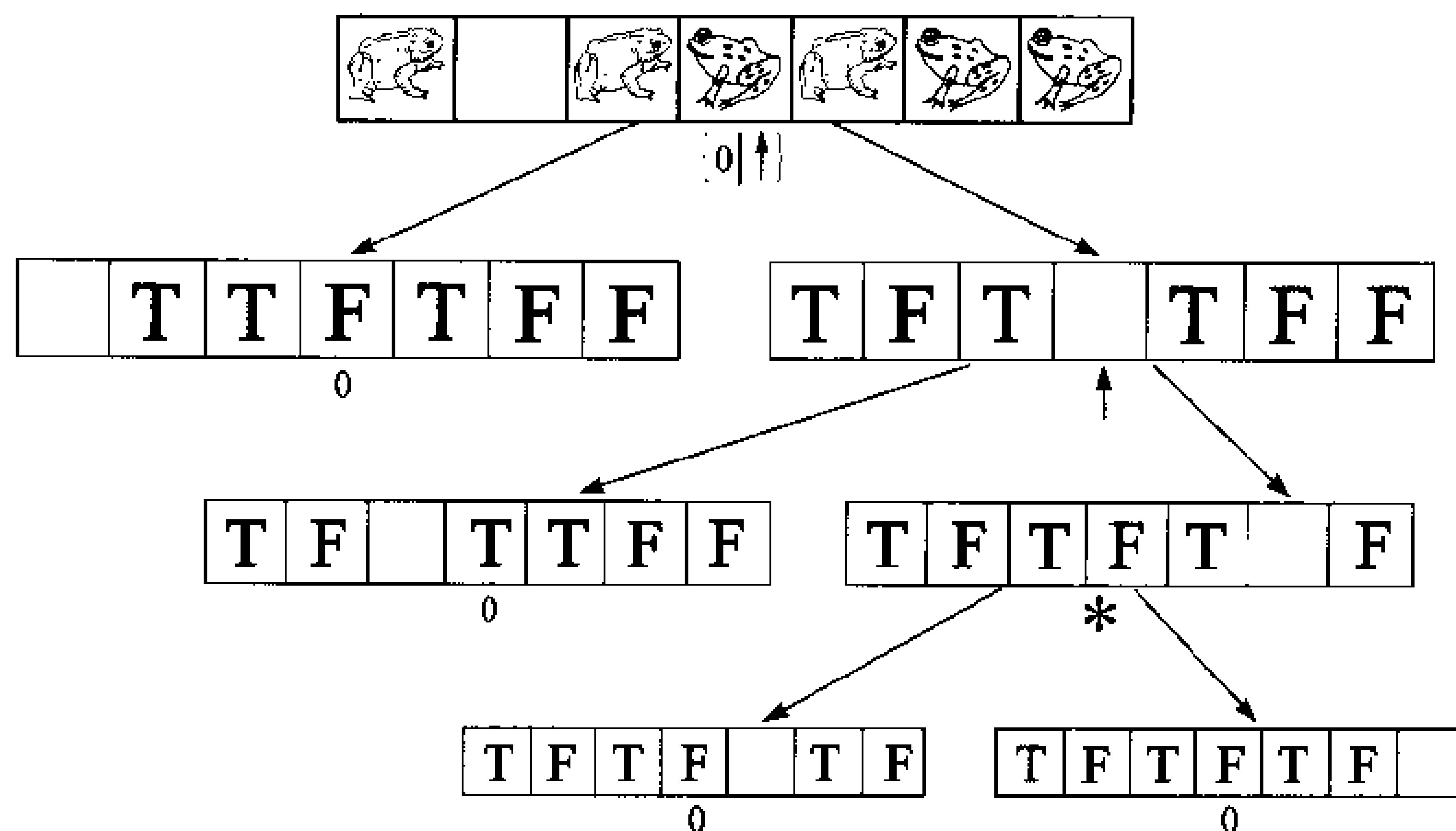



图 14. 癞蛤蟆与青蛙游戏中的向上箭头.

先看$\{\uparrow|\uparrow\}$，设它为 $X$. 右方的走法$\uparrow$仅当存在某个$\uparrow^L\geqslant X$，即 $0\geqslant X$ 时才可能逆转，但我们知道它是不对的. 作为左方的走法$\uparrow$，如存在某个$\uparrow^R\leqslant X$，即若$*\leqslant X$时才可能逆转，由于

$$*=\{0|0\}\leqslant\{\uparrow|\uparrow\}=X,$$

故可成立. 于是我们可以避开它，用$*^L=0$来取代$\uparrow$. 从而得出 $X=\{0|\uparrow\}$，即图 14 的值，证明了我们所提出的两个问题是一样的. 由于 0 没有右方走法，所以已经没有进一步化简的余地.

一般说来，对性质未明的 $X$ 来说，每个局中人都要反躬自问，任何一个来自 $X$ 的对手的走法，他有没有一种至少同 $X$ 一样好的对付措施 $Y$，如果确属如此，他就应当用来自 $Y$ 的对手的一切选择行动予以取代. 图 15 所给出的图解方法，我们发现它在解答这些问题时很有用处. 而图中的弯曲箭头则提醒我们，局中人的哪些行动是我们想避开的.

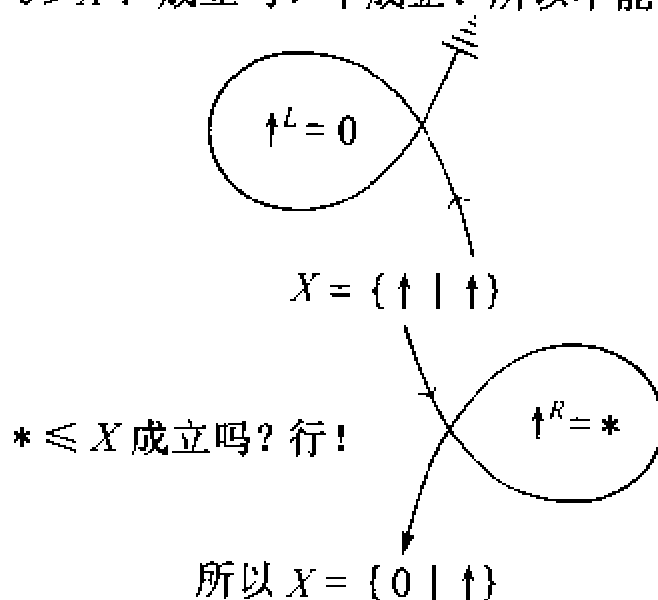



图 15. 寻找可逆行动.

## 一些突然冒出来的等式

在我们的微观尺度里，$X=\{0|\uparrow\}$究竟有多大呢？它肯定小于 $4.\uparrow$（4 个↑之和），因在差 $X+4.\downarrow$ 中，右方第一步就可从 $X$ 走到↑，于是在↑与↓抵消后，至少还剩下两个↓．使用类似的走法，若右方先走，他可以赢得 $X+3.\downarrow$．但若左方先走，他也能赢，只要用 * 取代↓，留下

$$X-\Downarrow * = \overset{X}{\{0|\uparrow\}} + \overset{\downarrow}{\{*|0\}} + \overset{\downarrow}{\{*|0\}} + \overset{*}{\{0|0\}}.$$

为了看出这一点，可以回忆起 $X$（它的另一个化名是$\{\uparrow|\uparrow\}$）严格大于 $\uparrow *$，故若右方用 0 取代↓时，左方能赢，而当右方用 0 取代 * 时，左方可用 * 取代↓而获胜．右方的唯一其他选择是从 $X$ 走到↑，留下一个模糊总数 $\downarrow *$．

论证表明 $X$ 同 $3.\uparrow$ 搅混起来，还有⇑与↑，因为即使从 $X+\downarrow$，左方有一个可取胜的，走到 $X+*$ 的走法．我们现在已经掌握 $X$ 与各个 $n.\uparrow$ 之间的顺序关系，那么它同值 $n.\uparrow+*$ 比较时又将如何呢？因为它大于 $\uparrow *$，我们拿它与 $\Uparrow *$ 相比．在差 $X+\Downarrow *$ 中，我们已经打发掉右方的一切选择．但左方的来自 $X$ 的选择会留下负的总值 $\Downarrow *$，而他的从↓出发的选择又将留下模糊状态的总值 $X+\Downarrow * -\downarrow+*=X+\downarrow$，而从 * 出发的选择将留下模糊的总值 $X+\Downarrow$，因此一切左方选择也可以统统打发走！这样一来，就留下了引人注目的等式：

$$\boxed{\{0|\uparrow\}=\uparrow+\uparrow+*=\Uparrow *.}$$

有偏博弈的理论将出现一些令人惊讶的等式. 尽管表 3 的一些模式在上, 下两个方向都可加以自由推广. 但中间的一些等式并不是显而易懂的. 在最右边的纵列里, $*n$ 代表拧数 $\{0,*,\cdots,*(n-1)\,|\,0,*,\cdots,*(n-1)\}\ (n\geqslant 2)$, $m=n\overset{\times}{+}1$; $\uparrow *n$ 则表示 $\uparrow + *n$. 其他亦可依此类推.

| | | |
|---|---|---|
| ………………… | ………………… | ………………… |
| 3.↓ = {⇓* \| 0} | 3.↓+* = {⇓ \| 0} | 3.↓+*n = {⇓*m \| 0} |
| ⇓ = {↓* \| 0} | ⇓* = {↓ \| 0} | ⇓*n = {↓*m \| 0} |
| ↓ = {* \| 0} | ↓* = {0 \| 0, *} | ↓*n = {*m \| 0} |
| 0 = { \| } | * = {0 \| 0} | |
| ↑ = {0 \| *} | ↑* = {0, * \| 0} | ↑*n = {0 \| *m} |
| ⇑ = {0 \| ↑*} | ⇑* = {0 \| ↑} | ⇑*n = {0 \| ↑*m} |
| 3.↑ = {0 \| ⇑*} | 3.↑+* = {0 \| ⇑} | 3.↑+*n = {0 \| ⇑*m} |
| ………………… | ………………… | ………………… |

**表 3.** 箭头与星的最简表达式.

特别,这些关系式使我们有可能获得癞蛤蟆与青蛙问题的一个可跟踪的表达式,其形状为

$$(TF)^x T[\,](TF)^n F.$$

本书最勤奋的读者*已指出,癞蛤蟆的行动将会得出零位局势,而一般读者将会发现它是本书第 5 章将要讲到的,更一般结果的一个推论,即

$$(TF)^x T[\,](TF)^n F=\{0\,|\,(TF)^{x+1}T[\,](TF)^{n-1}F\}.$$

通过对 $n$ 的数学归纳法(不依赖 $x$),可证明其值等于 $n.\uparrow+(n+1).*$.

## 礼品马**

下述原理常能帮助人们较易检验对某一局势的估值猜想.

---

* 译者注:此处作者故弄狡狯. Omar 并非人名,而是四个英语单词 Our most assiduous reader 的缩合重组.

** 译者注:西方成语"look a gift horse in the mouth"有"对礼物吹毛求疵"之意.

> 如果我们添上一个新的左方选择 $H$（设 $H \lhd\!| G$）或一个新的右方选择 $\overline{H}$（$\overline{H} |\!\rhd G$），则 $G$ 值不变.

**礼品马原理**

新选择 $H$ 或$\overline{H}$就是**礼品马**：尽管它们有时是一种有用的馈赠. 然而，受礼者有时会发现它们的嘴巴里没有长牙齿. 例如，在差博弈

$$\{G^L, H | G^R\} + \underbrace{\{-G^R | -G^L\}}_{(-G)},$$

中，若 $H$ 是一匹礼品马，左方将会发现，走到 $H-G \lhd\!| 0$ 并无什么乐趣可言. 像双胞胎论证那样，左方与右方的其他选择都互相抵销了.

于是，由于我们已知$\{0|\uparrow\} = \Uparrow *$同$\uparrow$搅混在一起，因此，$\uparrow$对左方是一匹礼品马，$\{0|\uparrow\} = \{0, \uparrow | \uparrow\}$. 由于左方的旧走法 0 在新形式中被优超了，于是我们立即可以推出$\{0|\uparrow\} = \{\uparrow|\uparrow\}$. 这比以前提到的办法要简明得多. 另外，我们还有$\uparrow * \parallel \Uparrow$、$\uparrow * \parallel 3.\uparrow$，通过类似的论证将可得出

$$\Uparrow * = \{0|\uparrow\} = \{\uparrow|\uparrow\} = \{\uparrow * | \uparrow\} = \{3.\uparrow | \uparrow\}.$$

但另一方面看，$\Uparrow * < 4.\uparrow$，所以后者不会只是左方的一匹礼品马，事实上$\{4.\uparrow|\uparrow\}$是严格地大于$\Uparrow *$的.



# 增　　补

## 尼姆加法规则的几种不同形式

如果你想把尼姆加法表(见表 2)加以扩展，你将会发现：

若　　$a, b$ 都小于 $2^k$，

则　　$a \overset{*}{+} b$ 也是如此，

并且　$2^k \overset{*}{+} a = 2^k + a$.

由此你能推论出：

> 凡属 2 的不同乘幂之数，其尼姆和数就是它们的普通和数. 当然，两个相等的数，其尼姆和数为零.

**尼姆加法的基本法则**

可以利用上述两项基本性质来求出一些任意数字的尼姆和数，只要把它们表为 2 的不同乘幂之和，并消去其中成对的重复数目. 例如，

$$5 \overset{*}{+} 3 = (4+1) \overset{*}{+} (2+1) = 4 \overset{*}{+} \cancel{1} \overset{*}{+} 2 \overset{*}{+} \cancel{1} = 4 \overset{*}{+} 2 = 4+2 = 6,$$

$$11 \overset{*}{+} 22 \overset{*}{+} 33 = (8+\cancel{2}+\cancel{1}) \overset{*}{+} (16+4+\cancel{2}) \overset{*}{+} (32+\cancel{1}) = 8+16+4+32 = 60.$$

以上这些也可以直接表示为抨数，

$$*5 + *3 = *6 \text{ 与 } *11 + *22 + *33 = *60,$$

你们应当熟练地使用上述两种记法：

$$*9 + *25 + *49 = (*\cancel{8} + *\cancel{1}) + (*\cancel{16} + *\cancel{8} + *\cancel{1}) + (*32 + *\cancel{16} + *1)$$
$$= *32 + *1 = *33.$$

表格里头的大部分数目字显得很混乱，但惠德霍夫的**差数法则**告诉我们：表格里头的"0"这个数字，其坐标为

$$(0,0),\quad (1,2),\quad (3,5),\quad (4,7),\quad (6,10),\quad (8,13),\quad (9,15),\quad (11,18),\quad \cdots$$

其差为

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad \cdots$$

每对坐标中的第一数是迄今尚未出现的数目中的最小者。他还指出，第 $n$ 对坐标是

$$(\lfloor n\tau \rfloor, \lfloor n\tau^2 \rfloor) \quad n=0,1,2,\cdots$$

其中的 $\tau$ 是黄金分割数

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

## 图 8,9,11 的答案

既然我们现在已经知道 $\{0 \mid *\}=\uparrow, \{* \mid 0\}=\downarrow, \{\uparrow \mid \downarrow\}=*$，我们就能填出图 8 中前两行各局势的值。接着，在图 9 所给出的大型癞蛤蟆—青蛙游戏中，九个通道的值分别为 $*, 0, \uparrow, \frac{1}{2}, *, -1, *, \frac{1}{2}$，及 $\uparrow$，其总和等于 $\Uparrow *$，这就表明癞蛤蟆可赢。但当左方必须先走时，他必须很谨慎地在有"星"的一个通道里行动，要么在第一或第七通道里行走，使和为 $3.\uparrow$，要么在中间通道里行动，使总的值为 $\Uparrow$。

在图 11 的游戏大杂烩里，伐木游戏的一局之值为 $\uparrow *$；科尔游戏的值为 $1*$，而癞蛤蟆—青蛙一局的值为 $-1$。在求和时，1 同 $-1$ 互相抵销，两个"星"也相互抵销，只剩下 $\uparrow$，而这是左方可以赢的局势，不管谁先走。

## 癞蛤蟆对青蛙

我们能彻底分析清楚的癞蛤蟆—青蛙问题的一个特例是每条跑道中仅有一只癞蛤蟆与一只青蛙的情况。经过一阵子走动之后，青蛙与癞蛤蟆将会面对面碰头，任何一方都能跳向前去。由于一跳之后可以看得清清楚楚每只动物的前头还有多少步可走，从而有以下等式：

| $a+1$ 空格 | 癞蛤蟆 | 青蛙 | $b+1$ 空格 | = |
|---|---|---|---|---|

$$\left\{ \boxed{a+2 \text{ 空格}}\ \text{青蛙}\ \text{癞蛤蟆}\ \boxed{b \text{ 空格}} \;\middle|\; \boxed{a \text{ 空格}}\ \text{青蛙}\ \text{癞蛤蟆}\ \boxed{b+2 \text{ 空格}} \right\}$$

$$=\{b-a-2|b-a+2\}$$

所以对此局势，值为$\{d-2|d+2\}$，而 $d$ 表示下式之差：

（青蛙右面的空格数）－（癞蛤蟆左面的空格数）.

即使括弧中的数字为 0 时，规则也照样适用. 一般说，这两种动物在面对面相遇之前，中间留有 $c$ 个空格，不论谁走一步，中间的空格数就将减少为 $c-1$，但是当癞蛤蟆走一步时 $d$ 要减 1，而当青蛙走一步时，$d$ 要加上 1. 于是在表 5 中可以看到：当 $c=1,2,3,\cdots$ 时，表中各数字的左方选择与右方选择是它上面一行中对应数字的左、右两数字，而当 $c=0$ 时则为 $d-2$ 与 $d-2$.

| $d$ | … | 4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c=0$ | … | 3 | 2 | −1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $c=1$ | … | −3 | −2 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | * | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
| $c=2$ | … | −3 | −2 | −1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $c=3$ | … | −3 | −2 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | * | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
| ………… | | | | | | | | | | |

**表 5.** 癞蛤蟆逼近青蛙.

利用这一规则计算表中的值，容易看到各行的数字在反复地交替变化. 在图 16 的这一局势下，各跑道之值依次为 1，*，$-\frac{1}{2}$，0，$-\frac{1}{2}$，* 把它们相加起来，其和为 *. 因此无论哪一方，在第二跑道中采取行动，他就能赢.

---

* 译者注：今以第二跑道为例，说明这些值是怎样算出来的. 青蛙右面的空格数＝癞蛤蟆左面的空格数＝0，于是 $d=0$. 两种动物中间隔开三格，∴$c=3$. 查表 5，在 $c=3$ 与 $d=0$ 交叉处的数字为 *，这就是第二跑道的博弈值. 其他可依此类推.

除此之外，读者们能否发现左方唯一的另外取胜走法呢？

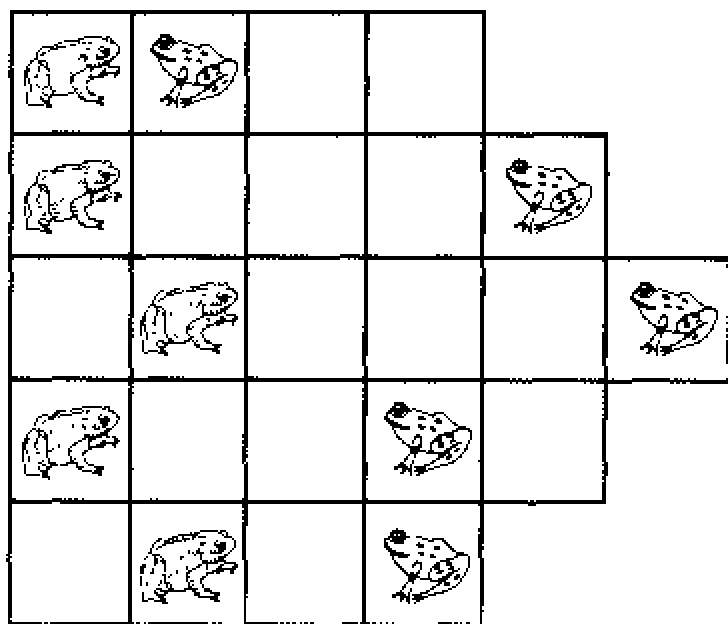


图 16. 一局五跑道癞蛤蟆青蛙游戏.

## 化简博弈的两个定理

我们可以证明，对具有很多局势的任一博弈，在删去一切被优超的选择并避开了可逆转的行动之后，我们确实能得出它的最简形式. 设 $G,H$ 为具有同一值的博弈，而且它们都没有任何被优超或可逆转的选择. 我们将要证明，对 $G$ 中的任一选择，必定在 $H$ 中存在着一个相应的选择，反之亦然. 所以 $G,H$ 不仅具有相同的值，而且还有相同的形式.

由于在差博弈

$$G-H=\{G^L|G^R\}+\{-H^R|-H^L\}$$

中，后手可赢，故对左方的任一选择 $G^L-H$，右方必存在某种足以取胜的反应

$$G^{LR}-H\leqslant 0 \text{ 或 } G^L-H^L\leqslant 0.$$

前者将蕴含 $G^{LR}\leqslant H=G$，这就意味着 $G^L$ 是从 $L$ 所得出的一种可逆转行动. 从而对任一 $G^{L_0}$ 必将有某个 $H^{L_1}\geqslant G^{L_0}$. 根据类似的论证又可推出，必将存在着某个 $G^{L_2}\geqslant H^{L_1}$ ($\geqslant G^{L_0}$)，但由于不存在被优超的选择行动，所以实际上 $G^{L_2}=H^{L_1}=G^{L_0}$.

在上述论证中，如果我们把 $G,H$ 变换地位，或者左方同右方对调，论证仍然同样有效.

我们的第二个定理是，通过加入礼品马的手段，人们将能从一种最简形式化到另一种最简形式，此时有可能删除某些被优超的选择动作. 例如，若 $G=\{G^L|G^R\}$ 是一博弈 $H=\{H^L|H^R\}$ 的最简形式，我们可以像以前一样，证明右方从 $G^L-H$ 的致胜动作必将导致某个博弈 $G^L-H^L$

$\leqslant 0$(而不是某个 $G^{LR}-H\leqslant 0$).

这就证明了,对每个 $H^L$ 必有某个 $H^L\geqslant G^L$,采用同样办法也可证得.对每个 $G^R$ 必有某个 $H^R\leqslant G^R$.另外,对每个 $H^L$ 必有 $H^L \lhd\!| H$,而对每个 $H^R$,有 $H^R |\!\rhd H$,由于任一局中人从 $H-H=0$ 中都不可能有什么取胜动作.最后一句话表明 $H$ 的选择行动等于是 $G$ 的一个礼品马,于是有

$$G=\{G^L,H^L\mid G^R,H^R\}.$$

这是可以从礼品马原理得出的推论.对此形式而言,$G^L$ 或 $G^R$ 的任一种选择都将被 $H^L$ 或 $H^R$ 的选择所优超,因而是可以省略的.

## 伐木游戏中确定灌木植株的伯莱坎普法则

怎样画出一个伐木游戏中的灌木植株以对应于一个给定的数字?接地的那条边,其颜色决定了数的符号,即正数为蓝边,负数为红边.下面让我们讲讲正数的情形.

将数的分数部分写成二进位数,例如

$$3\frac{5}{8}=3.101.$$

为了画出灌木植株,将整数部分代之以一串L,小数点代之以LR,在小数点后面的1与0分别代之以L,R,但必须略去最后一位的1:

$$3\frac{5}{8}=\quad 3\quad .\quad 1\ 0\ 1$$

$$\text{L L L}\quad \text{LR}\quad \text{L R}$$

当然啰,

$$-3\frac{5}{8}=\text{R R R}\quad \text{RL}\quad \text{R L}.$$

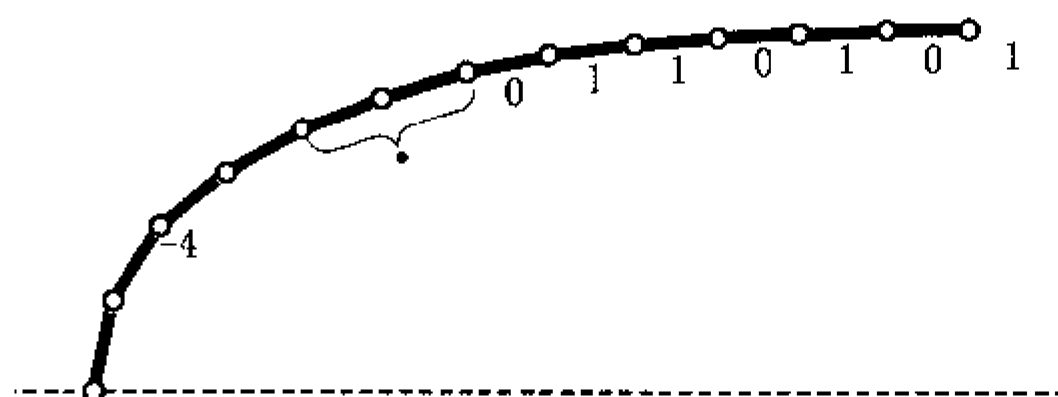
上述规则实际上也适用于不是有限小数的实数,但此时没有最后的1可以被省略了.例如:

$$\frac{1}{3}=\quad 0\quad .\quad 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \cdots$$

$$\text{L}\quad \text{R}\quad \text{R}\quad \text{L}\quad \text{R}\quad \text{L}\quad \text{R}\quad \text{L}\quad \cdots$$

反之,也可以倒过来应用上述规则,将任何一株蓝-红灌木植物转化成一个数.例如:






可以记为一系列 L，R 并将第一对不同颜色的分支代之以小数点，并按下列规则将随后的分支进行转换：

同接地颜色一致的分支为 1，

同接地颜色相反的分支为 0，

最后在尾巴上添加 1. 也就是说

| | | | |
|---|---|---|---|
| | R R R R | R L | L R R L R L |
| 将转换成 | −4 | . | 0 1 1 0 1 0 1 |

即 $-(4 \quad + \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128})= -4\frac{53}{128}$.

在某些应用场合，当人们想贮存一些满足已知分布的数目时，这种伐木游戏记数法同传统的计算机记数法(定点数或浮点数)相比，有着明显的优越性.

## 参考文献及进一步阅读材料

Claude Berge, "The Theory of Graphs and its Applications", Methuen, London, 1962, p. 53.

E. R. Berlekamp, The Hackenbush number system for compression of numerical data, Information and Control, **26**(1976)134—140.

Charles L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, Ann. of Math., Princeton(2), **3**(1901—02)35—39.

Ian G. Connell, Generalization of Wythoff's game, Canad. Math. Bull. **2**(1959)181—190.

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapter 10.

H. S. M. Coxeter, The golden section, phyllotaxis and Wythoff's game, Scripta Math. **19** (1953)135—143.

A. S. Fraenkel and I. Borosh, A generalization of Wythoff's game. J. Combin. Theory Ser. A. **15**(1973)175－191.

P. M. Grundy, Mathematics and games, Eureka, **2**(1939)6 8: reprinted *ibid.* **27**(1964)9—11.

V. E. Hoggatt, Marjorie Bicknell-Johnson and Richard Sarsfield, A generalization of Wythoff's game, Fibonacci Quart. **17**(1979)198—211.

V. E. Hoggatt and A. P. Hillman, A property of Wythoff pairs, Fibonacci Quart. **16**(1978)472.

A. F. Horadam, Wythoff pairs, Fibonacci Quart. **16**(1978)147—151.

J. G. Mauldon, Num, a variant of Nim with no first player win, Amer. Math. Monthly, **85**(1978)575—578.

T. H. O'Beirne, "Puzzles and Paradoxes", Oxford University Press, London, 1965, pp. 131—139.

Robert Silber, A Fibonacci property of Wythoff pairs, Fibonacci Quart. **14**(1976)380—384.

Robert Silber, Wythoff's Nim and Fibonacci representations, Fibonacci Quart. **15**(1977)85—88.

R. P. Sprague, Über mathematische Kampfspiele, Tôhoku Math. J. **41**(1935—36)438—444; Zbl. **13**, 290.

W. A. Wythoff, A modification of the game of Nim, Nieuw Archief voor Wiskunde(2), **7**(1905 07)199—202.

# 第4章

# 取子与分割

他忙于搞这些游戏，但总有一天我要把他导引到九柱戏上面来，使他大为惊喜.

亨利·J·拜伦，《我们的孩子》

我要同尼姆生活在一起，它也依傍着我；——难道不正是这样吗？……我不久就会是一个随军小贩.

威廉·莎士比亚，《英王亨利五世》，V，Ⅱ，i

## 开勒司游戏

在图1中我们看到左方与右方正在玩古老的英国游戏开勒司(Kayles)*. 他们的技巧已经高度熟练，以致可以随便踢出任意一只瓶状的木柱或者任意二只相邻的木柱. 木柱质地很轻，排列的间隔也很合理，即便世界冠军也不可能技胜一筹.

不可能击倒两只距离分得更开的木柱. 谁如果不能击倒木柱，他就输了.

我们将如何分析这种游戏呢？一般地说，可能有几组相邻木柱(例如，在图1中共有三组，其所含木柱数分别为1,7,3). 每步踢球动作势必影响其中的一组(设所含的木柱数为 $n$)，将它一分为二，而其所含球数 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ 相加起来等于 $n-1$ 或 $n-2$. 不含木柱的组当然忽略不计.

---

* 译者注：《新英汉辞典》及一般大型辞典中均未收入Kayles这一单词. 请参看上海教育出版社1992年出版的《数学加德纳》第1章.

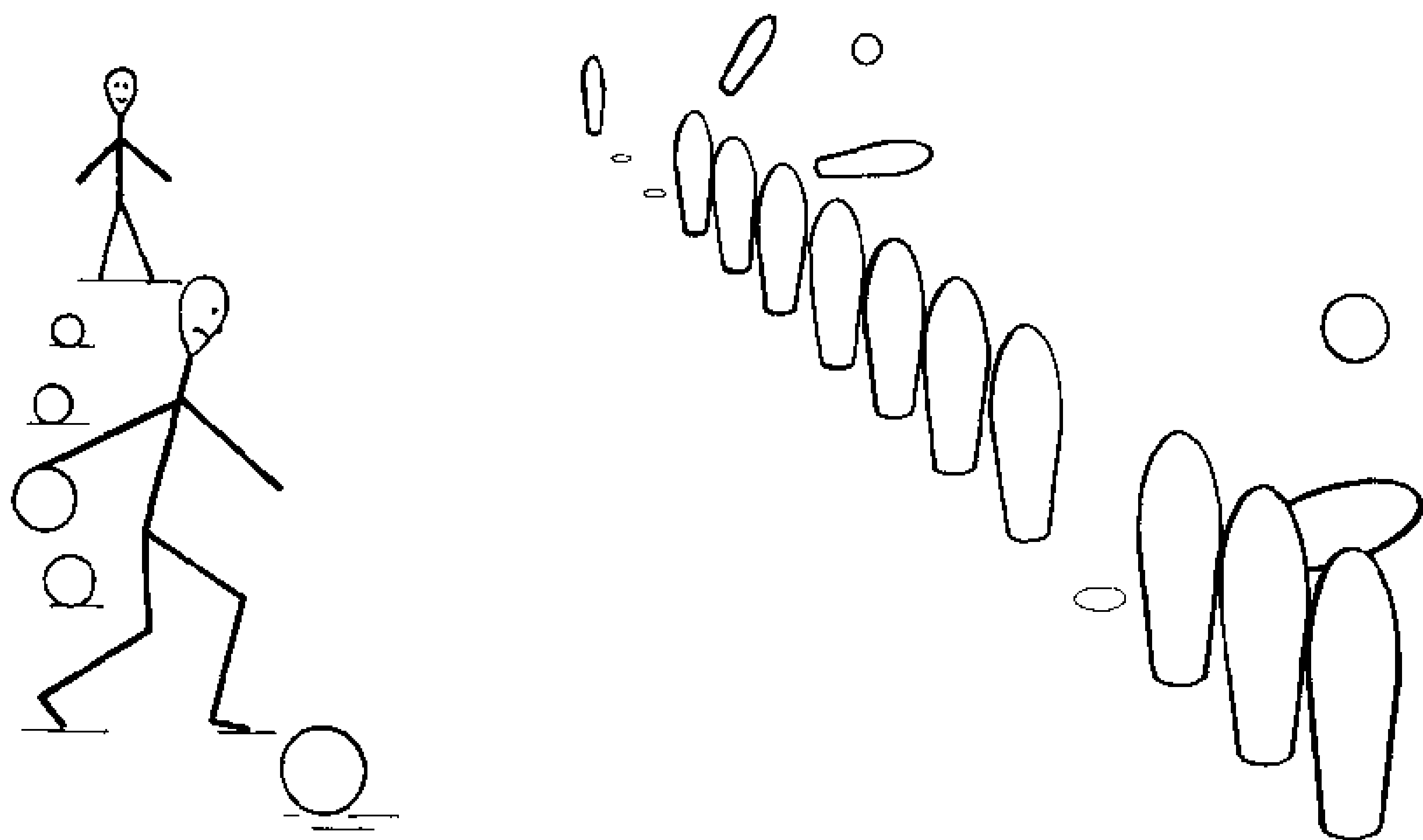


**图 1.** 开勒司游戏.

譬如说,所含木柱数为 7 的一组 $K_7$ 在一次击球动作后,可以有下面的几种情况:

$$K_6,\ K_5+K_1, K_4+K_2,\ K_3+K_3,$$
$$K_5,\ K_4+K_1,\ K_3+K_2.$$

我们在桌面上可以来玩同样的游戏,道具只是几堆豆子.每个局中人在轮到他走时,可以在一堆中取走一颗或二颗豆子,如果他高兴的话,也可以将取走豆子的堆分成两个较小的堆.在本章的其余部分我们将要分析这种"豆子模型"的开勒司游戏,并将发现图 1 中正在踢球的右方正处于一种失望的局势.

开勒司游戏由杜登尼及山姆·洛伊德引入,后者把它称为"李柏大梦游戏".*

## 堆上玩的游戏

现在考虑桌面上有几堆的游戏.每步行动只能影响到其中的一堆.任何局中人都能采取同

---

* 译者注:杜登尼(Dudency)英国游戏数学专家.山姆·洛伊德(Sam Loyd)美国游戏数学专家.这两人同马丁·加德纳一起,号称游戏数学界的三位大师.世界上已有许多国家出版了他们的全集,现有法、德、日、俄等各种文字的译本,我国也有少量引进.

样的行动.这种游戏的任何一种局势可以视为各堆局势的总和.因而,当每一个含 $n$ 粒豆子的堆的值求出来之后,问题就解决了.由于此种博弈是无偏的,所以每堆之值是一个尼姆值 $*m$.在这一章中,我们通常的写法是略去星号.因此,当大小为 0,1,2,3,…的各堆之值分别为 $*a$,$*b$,$*c$,$*d$,…时,我们将把这游戏称作**尼姆序列**为

$$a.bcd\cdots$$

(有时,我们将省略小数点),而把

$$\mathcal{G}(0)=a,\quad \mathcal{G}(1)=b,\quad \mathcal{G}(2)=c,\quad \mathcal{G}(3)=d,\cdots$$

作为**尼姆值**.利用尼姆序列中所含的信息,我们能够对任何局势进行分析.

大小为 $i,j,k,\cdots$的各堆,其总和的尼姆值是

$$\mathcal{G}(i)\overset{*}{+}\mathcal{G}(j)\overset{*}{+}\mathcal{G}(k)+\cdots \text{的尼姆和数.}$$

而每一个尼姆值 $\mathcal{G}(n)$的计算则是不在该堆中各种选择的尼姆数中的 0,1,2,3,…中的最小数.我们在第 3 章中已经讲过,这种在集合$\{x,y,z,\cdots\}$外面的最小数(从 0,1,2,3,…中挑出)叫做该集合的**局外最小数**,并记为 **mex**.例如

$$\text{mex}(0,1,3,7)=2,\quad \text{mex}(2,1,5)=0.$$

而空集的 mex 为 0.

## 𝒫—局势与𝒩—局势

无偏博弈只能有两类结果,我们把它们称为

𝒫—局势[×](在此以前采取行动的局中人是赢家);

𝒩—局势(正要采取行动的局中人是赢家).

在这一章中,我们经常在同拧数打交道,所以你必须懂得

值为 0 时,表明这是一个 𝒫—局势,而

值为 $*$,$*2$,$*3$,…时,表明这是一个 𝒩—局势.

在无偏博弈中不可能有其他的值.但应当记住你要把所有的博弈都加起来,需要求出确切的值,而不光是了解每一个分支博弈的结果.

---

× 译者注:此处作者故弄狡狯.实际上,𝒫—局势是后手可赢,而 𝒩—局势是先手可赢.其提法与我国习惯完全相反.如不掌握这一要点,则下文完全不可卒读,不能理解矣!

# 相减游戏

我们可以对通常的尼姆游戏加以适当修改，要求每次取走的豆子数最多不超过三颗. 这意味着应按照下式来求尼姆值：

$$\mathcal{G}(n)=\text{mex}(\mathcal{G}(n-1),\mathcal{G}(n-2),\mathcal{G}(n-3)),$$

于是尼姆序列如下：

$$n=0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\cdots$$
$$\mathcal{G}(n)=0.\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ 1\cdots$$

如果只有一堆，而所含豆子数为 4 的倍数，则它是一个 $\mathscr{P}$–局势(后手可赢). 当然我们也可以把游戏规则修改成：每堆豆子数的减少数最多不超过 $k$，在此种情况下，尼姆序列将是：

$$n=0\ \ 1\ \ 2\ \cdots\ k-1\ \ k\ \ k+1\ \ k+2\ \cdots\ \ 2k\ \ \ 2k+1\ \ 2k+2\ \ 2k+3\ \cdots$$
$$\mathcal{G}(n)=0.\ 1\ \ 2\ \cdots\ k-1\ \ k\ \ \ 0\ \ \ \ 1\ \ \cdots\ \ k-1\ \ \ \ k\ \ \ \ \ 0\ \ \ \ \ 1\ \ \cdots$$

此时，一堆豆子的个数为 $k+1$ 的倍数时将是一个 $\mathscr{P}$–局势.

以上这些结果都是已知的，很容易发现. 因此最好还是去玩一种窍门少为人知的游戏. 譬如说，把规则修改成：每次只能从一堆豆子中取走 2,5 或 6 颗豆子. 此时将有

$$\mathcal{G}(n)=\text{mex}(\mathcal{G}(n-2),\mathcal{G}(n-5),\mathcal{G}(n-6)).$$

而其尼姆序列为

$$n=0\ \ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15\ \ 16\ \ 17\ \ 18\cdots$$
$$\mathcal{G}(n)=\dot{0}.0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 0\ \ 2\ \ \dot{1}\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ .1\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 3\cdots$$

数字上面的循环节表明，前十一个数字是周期性出现，无限次重复的. 由此可知，当一堆豆子的个数按模 11，同余于 0,1,4,8 时，它肯定就是一个 $\mathscr{P}$– 局势. 当然我们也可以对不止一堆的同类博弈来做游戏.

让我们对豆子数为 5,7,9 的三堆所构成的局势进行分析. 由上面的尼姆序列可知(一查即得)其值为 2,3,2，要求我们把一切可以获胜的走法全部找出来.

在通常的尼姆游戏中，从局势 2,3,2 出发的取胜策略是设法走到

$$1,3,2\quad 或\quad 2,0,2\quad 或\quad 2,3,1.$$

由于取子数必须是 2,5,6 于是我们将有下列变动：

使 5 的一堆变成尼姆值为 1 的一堆，此堆的豆子数为 3 颗(5−2=3，故应从 5 的一堆中

取走 2 颗豆子)；

或:使 7 的一堆变成尼姆值为 0 的一堆,此堆的豆子数为 1 颗(7－6＝1,故应从 7 的一堆中取走 6 颗豆子)；

或:使 9 的一堆变成尼姆值为 1 的一堆,此堆的豆子数为 3 颗(9－6＝3,故应从 9 的一堆中取走 6 颗豆子).

更一般地,对任一**减数集合**

$$\{s_1, s_2, s_3, \cdots\},$$

可以定义对应的**相减游戏** $S\{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$为:每次从任一堆取子,其个数只限于 $s_1, s_2, s_3, \cdots$. 表 1 给出了某些相减游戏的尼姆序列.

对相减游戏 $S(2,5,6)$来说,我们发现 $\mathscr{G}(n)$永远不等于 $\mathscr{G}(n-9)$,由于添加 $\mathscr{G}(n-9)$决不会改变局外最小数 mex,所以 $S(2,5,6,9)$与 $S(2,5,6)$的尼姆序列完全相同. 一般情况下,如果对减数集$\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$能找到另一数 $s$,使 $\mathscr{G}(n)$永远不等于 $\mathscr{G}(n-s)$,则我们可以把 $s$ 添加到减数集合中去而不改变其尼姆序列. 在表 1 中,把此类添加值放入括弧中,此表给出了各种情况下的尼姆序列,其中减数集的成员可以多达 7 个.

**表 1.** 相减游戏的尼姆序列.

| 减数集(括弧内为添加值) | 尼 姆 序 列 | 周期 |
| --- | --- | --- |
| 1(3 5 7 9 11 ⋯) | $\dot{0}\dot{1}01\cdots$ | 2 |
| 2(6 10 14 18 ⋯) | $\dot{0}01\dot{1}0011\cdots$ | 4 |
| 1 2(4 5 7 8 10 11 ⋯) | $\dot{0}1\dot{2}012\cdots$ | 3 |
| 3(9 15 21 27 ⋯) | $\dot{0}0011\dot{1}000111\cdots$ | 6 |
| 2 3(7 8 12 13 17 18⋯) | $\dot{0}011\dot{2}00112\cdots$ | 5 |
| 1 2 3(5 6 7 9 10 11 13 ⋯) | $\dot{0}12\dot{3}0123\cdots$ | 4 |
| 4(12 20 28 36 ⋯) | $\dot{0}000111\dot{1}00001111\cdots$ | 8 |
| 1 4(6 9 11 14 16 19 ⋯) | $\dot{0}101\dot{2}01012\cdots$ | 5 |
| 2 4(3 8 9 10 14 15 16 ⋯) | $\dot{0}0112\dot{2}001122\cdots$ | 6 |
| 3 4(10 11 17 18 24 25 ⋯) | $\dot{0}00111\dot{2}0001112\cdots$ | 7 |
| 1 3 4(6 8 10 11 13 15 17 ⋯) | $\dot{0}10123\dot{2}0101232\cdots$ | 7 |
| 1 2 3 4(6 7 8 9 11 12 13 14 ⋯) | $\dot{0}123\dot{4}01234\cdots$ | 5 |
| 5(15 25 35 45 ⋯) | $\dot{0}00001111\dot{1}0000011111\cdots$ | 10 |
| 2 5(9 12 16 19 23 26 ⋯) | $\dot{0}01102\dot{1}0011021\cdots$ | 7 |
| 3 5(4 11 12 13 19 20 21 ⋯) | $\dot{0}001112\dot{2}00011122\cdots$ | 8 |

续表

| 减数集(括弧内为添加值) | 尼 姆 序 列 | 周期 |
|---|---|---|
| 2 3 5(4 9 10 11 12 16 17 18 19 …) | $\dot{0}01122\dot{3}0011223\cdots$ | 7 |
| 4 5(13 14 22 23 31 32 40 …) | $\dot{0}0001111\dot{2}000011112\cdots$ | 9 |
| 1 4 5(3 7 9 11 12 13 15 17 19 …) | $\dot{0}101232\dot{3}01012323\cdots$ | 8 |
| 2 4 5(3 9 10 11 12 16 17 18 19 …) | $\dot{0}01122\dot{3}0011223\cdots$ | 7 |
| 1 2 3 4 5(7 8 9 10 11 13 14 15 16 …) | $\dot{0}1234\dot{5}012345\cdots$ | 6 |
| 6(18 30 42 54 …) | $\dot{0}0000011111\dot{1}0000001111\cdots$ | 12 |
| 1 6(8 13 15 20 22 27 29 …) | $\dot{0}10101\dot{2}0101012\cdots$ | 7 |
| 1 2 6(5 8 9 12 13 15 16 19 20 …) | $\dot{0}12012\dot{3}0120123\cdots$ | 7 |
| 3 6(4 5 12 13 14 15 21 22 23 …) | $\dot{0}0011122\dot{2}000111222\cdots$ | 9 |
| 1 3 6(8 10 12 15 17 19 21 24 …) | $\dot{0}1010123\dot{2}010101232\cdots$ | 9 |
| 2 3 6(7 11 12 15 16 20 21 24 …) | $\dot{0}0112031\dot{2}001120312\cdots$ | 9 |
| 4 6(5 14 15 16 24 25 26 34 …) | $\dot{0}00011112\dot{2}0000111122\cdots$ | 10 |
| 2 4 6(3 5 10 11 12 13 14 18 19 …) | $\dot{0}011223\dot{3}00112233\cdots$ | 8 |
| 1 2 4 6(7 9 10 12 14 15 17 18 20 …) | $\dot{0}120123\dot{4}01201234\cdots$ | 8 |
| 5 6(16 17 27 28 38 39 49 50 …) | $\dot{0}000011111\dot{2}00000111112\cdots$ | 11 |
| 1 5 6(3 8 10 12 14 16 17 19 21 …) | $\dot{0}101012323\dot{2}01010123232\cdots$ | 11 |
| 2 5 6(9 13 16 17 20 24 27 28 …) | $\dot{0}011021302\dot{1}00110213021\cdots$ | 11 |
| 2 3 5 6(4 10 11 12 13 14 18 19 …) | $\dot{0}011223\dot{3}00112233\cdots$ | 8 |
| 1 4 5 6(3 8 10 12 13 14 15 17 19 …) | $\dot{0}1012323\dot{4}010123234\cdots$ | 9 |
| 1 2 4 5 6(8 9 11 12 14 15 16 18 19 …) | $\dot{0}1201234\dot{5}30120123453\cdots$ | 10 |
| 1 2 3 4 5 6(8 9 10 11 12 13 15 16 17 …) | $\dot{0}12345\dot{6}0123456\cdots$ | 7 |
| 7(21 35 49 63 …) | $\dot{0}000000111111\dot{1}00000001\cdots$ | 14 |
| 2 7(11 16 20 25 29 34 …) | $\dot{0}0110011\dot{2}00110012\cdots$ | 9 |
| 3 7(13 17 23 27 33 37 …) | $\dot{0}00111022\dot{1}0001110221\cdots$ | 10 |
| 4 7(5 6 15 16 17 18 26 27 28 …) | $\dot{0}000111122\dot{2}00001111222\cdots$ | 11 |
| 1 4 7(9 12 15 17 20 23 25 28 …) | $\dot{0}101201\dot{2}01012012\cdots$ | 8 |
| 2 4 7(10 13 16 19 22 25 28 31 …) | $00112203\dot{1}0\dot{2}102\cdots$ | 3 |
| 3 4 7(5 6 13 14 15 16 17 23 24 …) | $\dot{0}00111222\dot{3}0001112223\cdots$ | 10 |
| 1 3 4 7(5 9 11 12 13 15 17 19 20 …) | $\dot{0}101232\dot{3}01012323\cdots$ | 8 |
| 2 3 4 7(8 9 13 14 15 18 19 20 24 …) | $\dot{0}011220314\dot{2}00112203142\cdots$ | 11 |
| 5 7(6 17 18 19 29 30 31 41 …) | $\dot{0}0000111112\dot{2}0000011111\cdots$ | 12 |
| 2 5 7(11 15 17 20 24 27 29 33 …) | $\dot{0}01102132203100112233\dot{2}\cdots$ | 22 |
| 3 5 7(4 6 13 14 15 16 17 23 24 …) | $\dot{0}00111222\dot{3}0001112223\cdots$ | 10 |
| 2 3 5 7(4 6 11 12 13 14 15 16 20 …) | $\dot{0}0112233\dot{4}001122334\cdots$ | 9 |

续表

| 减数集(括弧内为添加值) | 尼　姆　序　列 | 周期 |
| --- | --- | --- |
| 2 4 5 7(3 6 11 12 13 14 15 16 20 …) | $\dot{0}0112233\dot{4}001122334\cdots$ | 9 |
| 6 7(19 20 32 33 45 46 58 …) | $\dot{0}000001111111\dot{2}000000111\cdots$ | 13 |
| 1 6 7(3 5 9 11 13 15 17 18 19 …) | $\dot{0}10101232323\dot{3}01010123 23\cdots$ | 12 |
| 2 6 7(11 15 19 20 24 28 32 33 …) | $\dot{0}01100112031\dot{2}001100112\cdots$ | 13 |
| 1 2 6 7(4 9 10 12 14 15 17 18 20 …) | $\dot{0}120123\dot{4}01201234\cdots$ | 8 |
| 3 6 7(4 5 13 14 15 16 17 23 24 …) | $\dot{0}00111222\dot{3}000111222 3\cdots$ | 10 |
| 1 4 6 7(9 12 14 17 19 20 22 25 …) | $\dot{0}10120123201\dot{2}010120123\cdots$ | 13 |
| 2 4 6 7(3 5 11 12 13 14 15 16 20 …) | $\dot{0}0112233\dot{4}001122334\cdots$ | 9 |
| 1 3 4 6 7(5 9 11 13 14 15 16 17 19 …) | $\dot{0}10123234\dot{5}010123234 5\cdots$ | 10 |
| 2 5 6 7(10 14 17 18 19 22 26 29 …) | $\dot{0}0110213222\dot{3}0011021322\cdots$ | 12 |
| 1 2 5 6 7(4 9 10 12 13 15 16 17 18 …) | $\dot{0}120123453\dot{4}01201234534\cdots$ | 11 |
| 1 4 5 6 7(3 9 11 13 14 15 16 17 19 …) | $\dot{0}10123234\dot{5}010123234 5\cdots$ | 10 |
| 1 2 3 4 5 6 7(9 10 11 12 13 14 15 17 …) | $\dot{0}123456\dot{7}01234567\cdots$ | 8 |

此表显示出许多规律性.除{2,4,7}以外,其他减数集合的尼姆数列具有完全的周期性,即对一切 $n\geqslant 0$ 的值,都能成立等式 $\mathcal{G}(n)=\mathcal{G}(n+p)$. 另外,除{2,5,7}以外,其他减数集合尼姆序列的周期 $p$ 都是减数集合中的两数之和.我们感到这种奇异现象理应有所解释,尽管这些企图解释的尝试不时遭到失败.容易证明此项性质对只有两个元素的减数集合以及具有属性 $s_{i+1}\leqslant s_i+s_1$ 的集合都是成立的.

很明显,肯定有若干新定理正等待着人们去发现.在本书第 15 章中,我们将要分析相减游戏 $S(a,b,a+b)$,现在让我们用一切相减游戏都具有的一项令人惊讶的结果来结束本节.

## 福格森的配对性质

T·S·福格森(T. S. Ferguson)发现并证明,任一相减游戏的尼姆值 0,1 之间存在着一种奇妙的配对关系,即

> $\mathcal{G}(n)=1$ 当且仅当 $\mathcal{G}(n-s_1)=0$,其中 $s_1$ 是减数集合中的最小数.

例如，相减游戏 $S(2,5,6)$ 的尼姆序列为：

$$0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 3\ 0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\cdots$$

此处 $s_1=2$，0 与 1 的配对如图所示.

我们可以通过以下的反证法（归谬证法）证明福格森的配对性质. 若 $n$ 是使方框中的命题不成立的最小数，则必属两种情况之一：

或者是

$\mathscr{G}(n)=1$ 而 $\mathscr{G}(n-s_1)\neq 0$；

或者是

$\mathscr{G}(n-s_1)=0$ 而 $\mathscr{G}(n)\neq 1$.

它们分别地蕴涵着如下命题：

对某个 $s_k$，有 $\mathscr{G}(n-s_1-s_k)=0$，而这递归地蕴涵 $\mathscr{G}(n-s_k)=1$，此式又蕴涵 $\mathscr{G}(n)\neq 1$；

或

对某个 $s_k$，有 $\mathscr{G}(n-s_k)=1$，而这递归地蕴涵 $\mathscr{G}(n-s_k-s_1)=0$，此式又蕴涵 $\mathscr{G}(n-s_1)\neq 0$.

在第 13 章中我们将阐述，福格森怎样运用这一配对关系来分析相减游戏的变异形式.

## 格隆第滑尺

如果我们使用**格隆第滑尺**，就可使尼姆序列的计算大为简化. 图 2 画出了用于相减游戏 $S(2,5,6)$ 的这种尺子. 把相继的数值填到小格子里，箭头所指的格子中的数值是底下画着双线的格子中各个数值的局外最小数 mex. 算出并填好之后，再把尺子向右移动一格. 例如在图 2

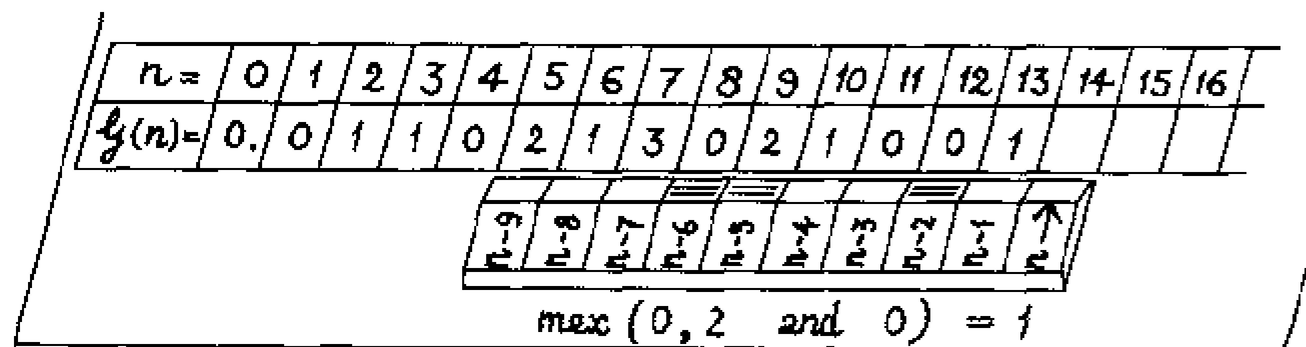



**图 2.** 利用格隆第滑尺.

中，$\mathscr{G}(14)=1$，它是从 0，2，0 的局外最小数 mex 算出来的. 图中用硬木精制的尺子代价较昂，但不妨使用有方格的纸条作为它的代用品.

## 其他取子游戏

也可将游戏规则稍作修改以适用于其性态略有逊色的一些游戏，上面的分析方法还是可以应用，但必须假定每次行动只能影响其中的一堆. 在一种名叫·**123** 的游戏中，规则所允许的行动如下：

当某一堆只有 1 颗豆子时，把这堆取走，

当某一堆有 2 颗以上豆子时，从此堆中取走 2 颗豆子，

从任一堆（豆子数在 3 颗或 3 颗以上）中取走 3 颗豆子.

只有 1 颗豆子的一堆，其尼姆值为 1，因为由第一种行动可将它一步就减少到 0. 第二种行动所规定的限制条件意味着，有 2 颗豆子的一堆，其尼姆值是 0，因为它根本不能从中取子. 至于豆子数在 3 颗以上的堆，我们可以应用图 3 中的格隆第滑尺，因为每次可以取走 2 或 3 颗豆子.

我们可以看到，在最初寥寥几项之后，序列的周期为 5，这一性质将一直维持下去不变. 这表明，同样的数（1，0）在五步以前是一致的，于是，$\mathscr{G}(13)$ 同 $\mathscr{G}(8)$ 一样，其值为 2.

| n= | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{G}(n)$= | 0. | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | n-5 | n-4 | n-3 | n-2 | n-1 | n | | |

图 3. ·**123** 游戏的尼姆序列.

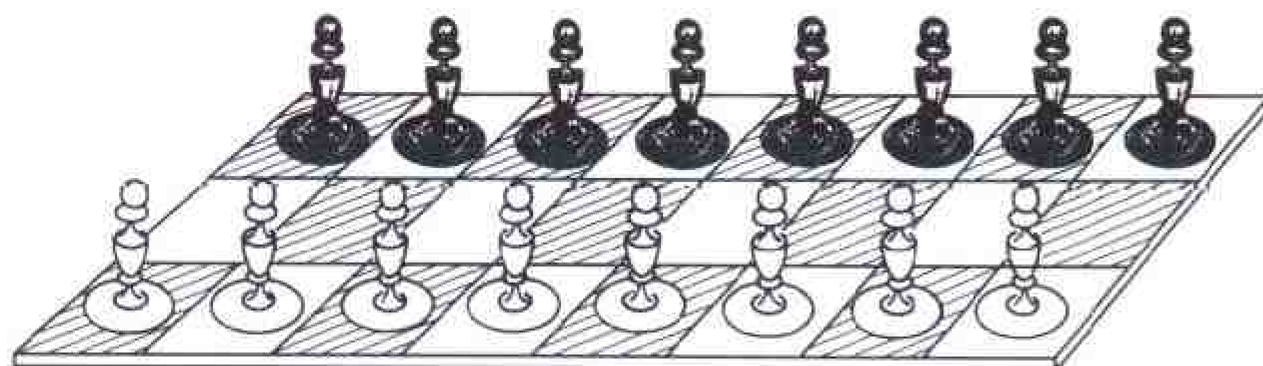


图 4. 准备下道森象棋.

## 道森象棋

T·R·道森(T. R. Dawson)发明了一种游戏，经过盖伊同史密斯的修改后，我们将称之为道森象棋. 它是在 $3\times n$ 棋盘上对弈的，白兵在底下第一行上，而黑卒位于第三行. 兵卒的行动(向前冲)与吃子(对角)同国际象棋的走法一样；不过，在这种游戏中，吃子是强制性的*，在正常情况下，最后能走子的一方是赢家. 在此种游戏中，决没有"兵卒升级为皇后"这种事情. 例如，若白方在 3×8 棋盘上以挺起他的 $a$ 兵开局，黑方必须用他的 $b$ 卒把它吃掉、然后白方又必须用其 $b$ 兵再吃掉它，结果如图 5(a)所示. 双方的 $a$ 路兵、卒形成"顶牛"状态，而下一步该轮到黑方走子了. 此时如果黑方挺起他的 $f$ 卒，则白方必须用他的 $e$ 兵或 $g$ 兵来吃掉它，然后黑方又必须再吃. 这样经过一来一往的两个回合，我们将得出图 5(b)的状态. 一对兵卒再次被"封死"，而走子权再次易手. 白方又可挺起他的 $h$ 兵，陷入"顶牛"后，下一步让黑方去走子.

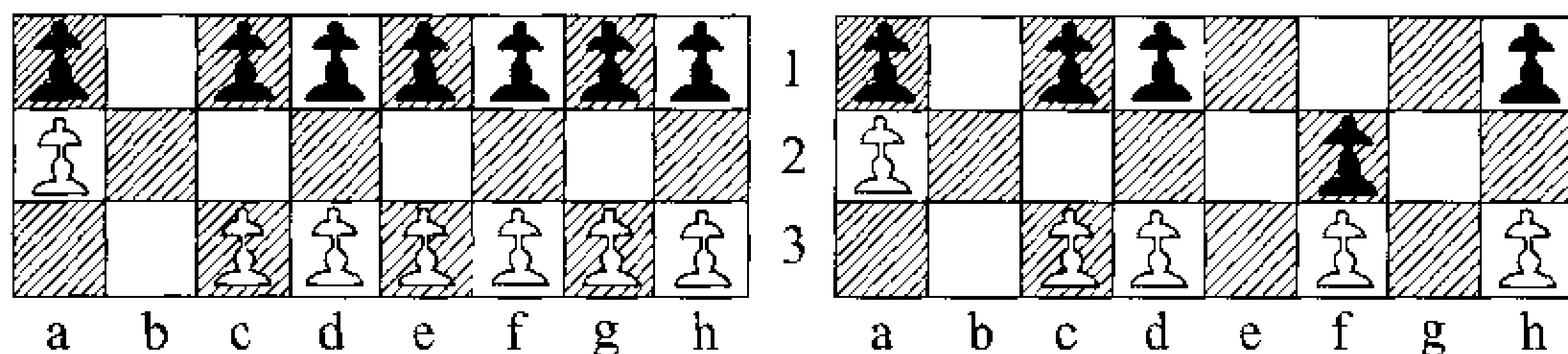



**图 5.** 在 3×8 棋盘上对弈的道森象棋.

一般地说，兵、卒的挺进必将带来双方的互相吃子，直到与之邻接的两列完全出空，使一对兵卒陷入"顶牛"状态，并将走子权转移给对方. 于是我们可以想像它也像开勒司游戏一样，由两位技术精湛的对手来击倒瓶状木柱. 其规则是，任何木球都能击倒，但它若有毗邻** 的木柱，则必须同时被取走. 如果场上已经没有木球可击，无法行动的局中人便是输家. 当我们用这种办法改造该游戏时，可以看出，它是一种无偏博弈. 尽管在象棋盘上操作时，较难看出这一特征. 另外，同开勒司游戏一样，开始时，各木球也可分成若干孤立的几堆，而整个局势之"值"是各堆之值的和.

---

* 译者注：在可以吃子的情况下**规定非吃不可，不能不吃**. 但中国象棋与国际象棋均无此种硬性规定，吃不吃听便，由局中人自行决定.

** 译者注：指左右均有毗邻的木柱或只有一侧有毗邻；若两侧均无毗邻时，孤立的一只木柱也可以击倒.

通过击球，11 只木球的初始状态可以转化到下列各种状态：

9，8，7 与 1，6 与 2，5 与 3，或 4 与 4 只木球，

于是得出

$$\mathscr{G}(11)=\operatorname{mex}(\mathscr{G}(9),\mathscr{G}(8),\mathscr{G}(7)\overset{*}{+}\mathscr{G}(1),\mathscr{G}(6)\overset{*}{+}\mathscr{G}(2),\mathscr{G}(5)\overset{*}{+}\mathscr{G}(3),\mathscr{G}(4)\overset{*}{+}\mathscr{G}(4)).$$

当然约定 $\mathscr{G}(-1)=\mathscr{G}(0)=0$. 一般地有

$$\mathscr{G}(n)=\operatorname{mex}(\mathscr{G}(a)\overset{*}{+}\mathscr{G}(b)),\text{其中}-1\leqslant a,b\text{ 且 }a+b=n-3.$$

| n | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{G}(n)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\mathscr{G}(n)$ |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | n |

图 6. 道森象棋中 $\mathscr{G}(11)$ 的计算.

将格隆第滑尺用于这种计算显得很方便，见图 6 所示. 尺子两头都有，刻有箭头的一把尺子要倒过来放. 把尺子在当中对齐之后，可以看出 $\mathscr{G}(11)$ 正是尼姆和 $\mathscr{G}(a)\overset{*}{+}\mathscr{G}(b)$ 的局外最小数 mex. 即

$$\mathscr{G}(a)=\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 3\ 1\ 1\ 0\ 3$$

$$\mathscr{G}(b)=\ 3\ 0\ 1\ 1\ 3\ 0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 0$$

$$\mathscr{G}(a)\overset{*}{+}\mathscr{G}(b)=\ 3\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 3$$

于是就有

$$\mathscr{G}(11)=\operatorname{mex}(3,0,1)=2.$$

拥有一把极长的格隆第滑尺时，坚持到底的读者将从表中（见表 2）出现的道森象棋的奇异模式中获得极大乐趣. 倘若我们不考虑表中的七个例外情况（在表中已用粗体字排出[×]），则尼姆

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | 11 | | 13 | | 15 | | 17 | | 19 | | 21 | | 23 | | 25 | | 27 | | 29 | | 31 | | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | **0** | 5 | **2** | **2** | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 | 5 | **2** | 7 | 4 |
| 34 | **0** | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | **2** | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 | 5 | 3 | 7 | 4 |
| 68 | 8 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | 9 | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 | 5 | 3 | 7 | 4 |
| 102 | 8 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | 9 | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 | 5 | 3 | 7 | 4 |
| 136 | 8 | 1 | … | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

表 2. 道森象棋的周期性特征.

---

× 译者注：表中的黑体字印得不大清楚. 它们所对应的 $n$ 值如下：$n=0,14,16,17,31,34,51$.

值的周期为 34. 如果它能一直维持下去不变的话，我们自然可以认为道森象棋的问题已经获得彻底解决.

它真的能坚持下去吗？让我们极其谨慎地来察看一把冗长的格隆第尺子，它是用来计算 $\mathcal{G}(174)$ 的，它是第一个我们不需要计算的值. 由尺子的安置可以看出，在最大的两处例外情况（即 $\mathcal{G}(51)=2$，一个在纸上，一个在尺子上）之间有两个正则值的完全周期（正则值有 34 个）. $\mathcal{G}(174)$ 的计算自然同 $\mathcal{G}(140)$ 完全一样，只要把滑尺向后移动 34 个位置，但那却是求 34 个正则值的尼姆和了. 所以，为了验证周期性，我们需要进行计算的最后一个值是 $\mathcal{G}(173)$. 数 173 由何而得？它是最大的一个例外数 51 的两倍，再加上周期数 34 的两倍，最后再加上 3，它是在一次击球行动中可以打倒的最大木柱数.

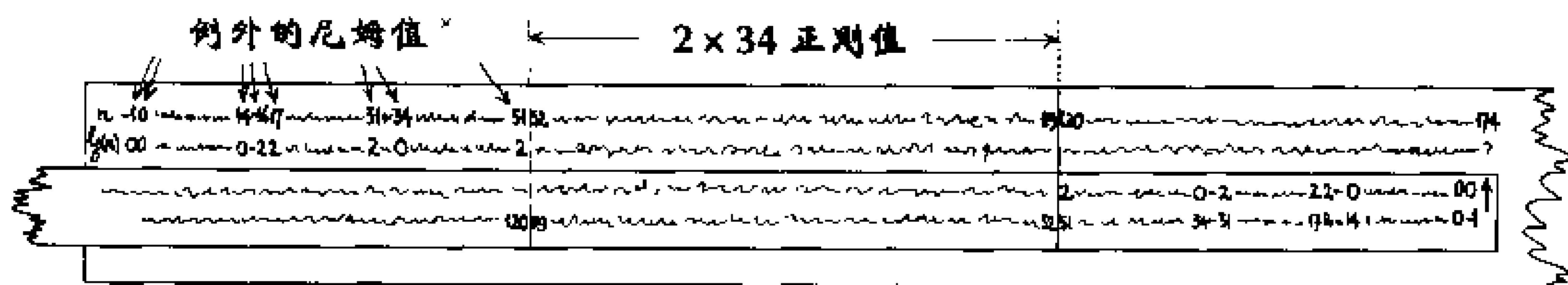



图 7. 为了验证周期性而使用的、一把吹毛求疵的格隆第滑尺.

## 开勒司游戏的周期性

看来似乎用格隆第滑尺对付开勒司游戏的原始形式有点困难. 在这种游戏中，任意一只或二只相邻的木柱可以移走，从而得出方程

$$\mathcal{G}(n)=\text{mex}(\mathcal{G}(a)\overset{*}{+}\mathcal{G}(b))，其中 0\leqslant a,b 而且 a+b=n-1 或 n-2.$$

我们可以先在一把尺子上记下满足 $a+b=n-2$ 的各种 $a,b$ 的尼姆和，然后对 $a+b=n-1$ 也来做同样的事情，完成这样的工序之后再来求局外最小数 mex. 但下面有一个取巧办法，只要把尺子放在中间位置，我们即可一举读出所有的尼姆和. 图 8 中的小箭头就告诉我们，在计算 $\mathcal{G}(11)$ 时哪些数需要配对以便去计算尼姆和.

自左至右，可以求出

---

* 译者注：图上的例外情况共有 8 处，但正文却说只有 7 个例外，是否前后矛盾呢？不，因为图 7 中额外添加上一个 $\mathcal{G}(-1)=0$.

$$\mathcal{G}(11)=\operatorname{mex}(2,4,5,0,3,0,1,0,2,5,0,5,2,0,1,0,3,0,5,4,2)=6.$$ *

图 8. 解决开勒司问题的格隆第尺子.

（明显的对称性意味着，我们只要检查半张表就行，但在手算时利用全表也有好处，因为可以校验结果.）开勒司游戏的尼姆值也表现出周期性（见表 3）. 其周期为 12，但表中共有 14 个例外情况，已用粗体字给出，其中最大的一个值为 $\mathcal{G}(70)=6$. 为了验证周期性，需要一直校验到

$$n=166=2(70)+2(12)+2.$$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0.** | 1 | 2 | **3** | 1 | 4 | 3 | 2 | 1 | **4** | 2 | **6** |
| 12 | 4 | 1 | 2 | **7** | 1 | 4 | **3** | 2 | 1 | **4** | **6** | 7 |
| 24 | 4 | 1 | 2 | 8 | **5** | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | **6** | 7 |
| 36 | 4 | 1 | 2 | **3** | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | 2 | 7 |
| 48 | 4 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | **4** | 2 | 7 |
| 60 | 4 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | **6** | 7 |
| 72 | 4 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | 2 | 7 |
| 84 | 4 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | 2 | 7 |
| 96 | 4 | 1 | 2 | … | | | | | | | | |

表 3. 开勒司游戏尼姆值的周期性.

这是由于最后一个例外数值在 $n=70$ 时出现，周期是 12，而每次行动所击倒的木柱数不多于 2 之故.

---

* 译者注：让我们略举数例来说明括弧里的数是怎样求出来的. 事实上，$0\overset{*}{+}2=2, 0\overset{*}{+}4=4, 4\overset{*}{+}1=5, 1\overset{*}{+}1=0, 1\overset{*}{+}2-3$，……，其他依此类推.

## 其他取子、分割游戏

让我们把道森象棋转化为击木柱游戏. 大家应当能回忆得起，一个木柱必须与其毗邻的木柱同时取走，也就是说，

如果行中只有一只木柱，那它可以取走，此时将不再剩下什么东西.

如果两只木柱位于长行的尽头处，或者一行只含有两只木柱，那就可以取走两只木柱，而使该行变短或不再剩下什么东西.

任意三只毗邻的木柱可以拿走，从而留出两个较短的行，也有可能只留下一个较短的行，甚至什么东西都没有留下来.

所以，如果我们通过从堆中取出豆子的办法来玩此游戏时，则行动的后果将是：

0 堆，若移走的是一颗豆子；

1 或 0 堆，若移走的是二颗豆子；

2，1 或 0 堆，若移走的是三颗豆子.

我们将使用代码来表示可以移走的豆子数. 对道森象棋来说，这些数字是：

**1** $2^0$ 移走 1 颗豆子；

**3** $2^1+2^0$ 移走 2 颗豆子；

**7** $2^2+2^1+2^0$ 移走 3 颗豆子.

于是该游戏可用符号表示为·**137** 游戏.

一般地说，如果在某一游戏中，从一堆中取走 $k$ 颗豆子将使剩下的豆子分为 $a$ 堆或 $b$ 堆或 $c$ 堆……(这里 $a$,$b$,$c$ 是不相等的数字)，则我们将对此游戏给以代码

$$\mathbf{d}_k=2^a+2^b+2^c+\cdots，取走 k 颗豆子时.$$

在开勒司游戏中，可以取走 1 或 2 颗豆子，使原有的一堆变作 2 堆，1 堆或 0 堆，于是 $\mathbf{d}_1=\mathbf{d}_2=\mathbf{7}$，因为 $2^2+2^1+2^0=7$. 在道森象棋中我们已经知道 $\mathbf{d}_1=\mathbf{1}$，$\mathbf{d}_2=\mathbf{3}$，$\mathbf{d}_3=\mathbf{7}$. 在一种称为·**123** 的博弈中，$\mathbf{d}_1=\mathbf{1}$，$\mathbf{d}_2=\mathbf{2}$，$\mathbf{d}_3=\mathbf{3}$. 一般地说，博弈

$$\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3\cdots$$

具有任意可能的代码序列. 根据上述记法，开勒司游戏便是

$$\cdot\mathbf{77}=\cdot\mathbf{77000}\cdots.$$

而道森象棋，则我们已经看到，它的代码为

$$\cdot\mathbf{137}=\cdot\mathbf{137000}\cdots.$$

若 $d_k=0$，则没有一种行动能正好取走 $k$ 颗豆子. 在相减游戏中，每一位代码不是 0 就是 3（$3=2^1+2^0$）；譬如说，S(2,5,6)的代码便是·030033. 在表 1 中，对 $d_k$ 的最小值作出了解释.

| $d_k$ 的值 | 从一堆豆子中取走 $k$ 颗豆子的条件 |
|---|---|
| 0 | 不允许取走. |
| 1 | 若取走的豆子是该堆的全部豆子. |
| 2 | 仅当有些豆子要剩下来，并形成一堆. |
| 3 | 剩下来的豆子，如果有的话，它们将形成一堆*. |
| 4 | 必须有豆子留下来并形成两堆（每堆都不是空堆）. |
| 5 | 如果有豆子留下来的话（也可不留），它们将形成两堆，而每堆都不空. |
| 6 | 必须有豆子剩下来，并形成一堆或二堆. |
| 7 | 剩下来的豆子至多能形成二堆（也可以全部取光或只剩一堆——译者注）. |
| 8 | 必须有豆子剩下来，并正好形成三堆，而这三堆都不空. |
| 等等 | |

**表 4.** 取子与分割游戏中代码意义的解释.

# 道森开勒司游戏

称为·07 的博弈对应于一种特殊的击木柱游戏，它的唯一的合法动作是击倒两只毗邻的木柱. 我们将把这种游戏命名为“道森开勒司”，因为它好像是道森象棋（代码为·137）的一个叔伯兄弟. 实际上，道森开勒司游戏中一排 $n$ 只木柱的尼姆值 $D_n$ 同道森象棋中（$n-1$）对兵卒的尼姆值是一模一样的：

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | … |
| $D_n=$ | 0. | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 0 | 5 | 2 | 2 | 3 | 3 | … |

由于它的游戏规则比道森象棋稍为简单一些，所以在许多书刊论文中，以及本书的第 8 章，第 13 章，第 15 章，第 16 章等，$D_n$ 这个符号是专指这一种游戏而言的.

# 变异

以上这些取子—分割游戏的尼姆序列经常以各种奇妙方式表现出它们之间的相互联系.

* 译者注：3 与 2 看来似乎矛盾，其实是相容的. 因为 3 意味着也可把豆子全部取光，一颗都不剩.

譬如说,代码为·**17** 的游戏,其尼姆值为

$$n= 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ \cdots$$
$$\mathcal{G}(\cdot\mathbf{17})= 0.\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 3\ 0\ 1\ 1\ 3\ 2\ 2\ 3\ 4\ 1\ 5\ 3\ 2\ 2\ 3\ \cdots$$

可由道森开勒司的值得出($n$ 为奇数时,把道森开勒司的尼姆值加上 1,$n$ 为偶数时不变;这里的加法当然指尼姆加法).

在其他情况下,则往往是尼姆值的复制或加倍,我们在以后将会遇到这类情况.

## 基尔司游戏*

这类游戏的大多数都容易算得其尼姆值,一般只要利用格隆第滑尺,并谨慎地处理其前面出现的数值.现在来介绍一下"基尔司游戏",它的走法是完全拿掉只有一颗豆子或二颗豆子的堆,或者在充分大的一堆中拿走二颗豆子,使留下来的豆子,形成两个较小的堆,但每堆都不是空堆.总之,用代码来表示时,它就是·**15** 游戏.

如同通常一样,$\mathcal{G}(0)=0$,由于只有一颗豆子或二颗豆子的堆需要全部取走,于是有 $\mathcal{G}(1)=\mathcal{G}(2)=1$.只有三颗豆子的堆无法可走,它不参与本游戏,所以 $\mathcal{G}(3)=0$.对豆子数较三颗更多的堆则有

$$\mathcal{G}(n)=\operatorname{mex}(\mathcal{G}(a)\overset{*}{+}\mathcal{G}(b)),\text{其中 } 1\leqslant a,b,\text{且 } a+b=n-2,$$

于是我们可以利用格隆第滑尺,如图 9 所示.它的尼姆序列为

0.11011221221101122122110⋯.

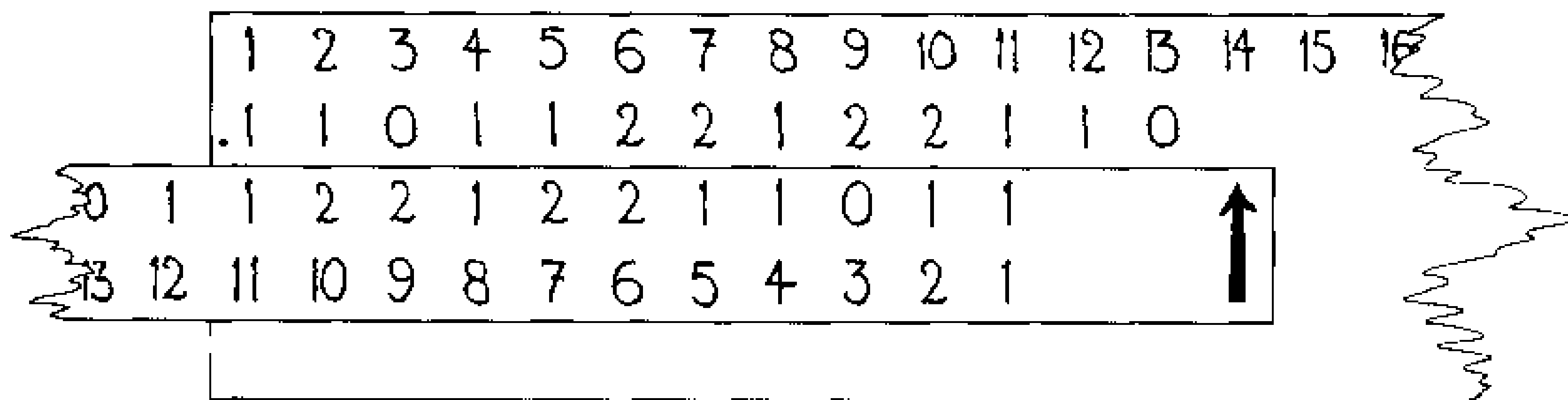



**图 9.** "基尔司"游戏.

---

* 译者注:原文为 Guiles,有奸诈,诡计多端等意思.在中文数学书刊中,迄今似乎无人提到过.由于此种游戏同其词义脱节,故而像 Kayles 游戏一样,只能改取音译.

在小数点之后的数值，其重复周期为 10.

## 三 X 游戏

三 X 游戏是在一条 $1\times n$ 纸带上玩的“九宫吃井字”* 游戏的变种，玩的时候，两位局中人都使用同一符号(X). 首先完成三个连续×的便是赢家. 我们怎样来分析这种游戏呢?

显然，在已有 X 记号的邻格或空开一格处再打上 X 号是笨拙透顶的举动，因为你的对手马上就赢了. 所以，如果我们只考虑明智走法的话，可以认为每个 X 也同时占据着其所在位置的左、右两格(其中的一格可能在“局外”，但决不可能有两格在局外)，另外，任何两个这样的三格相连的区域都不重迭在一起;按照这样的理解，我们的三 X 游戏实际上不过是詹姆士・邦德** 游戏(代号为•**007**)的伪装而已(见图 10). 于是我们可以把两个 X 之间的 $n$ 个空格记为 X$n$X，用[或]表示纸带的尽头，从而得出博弈的尼姆值如下：

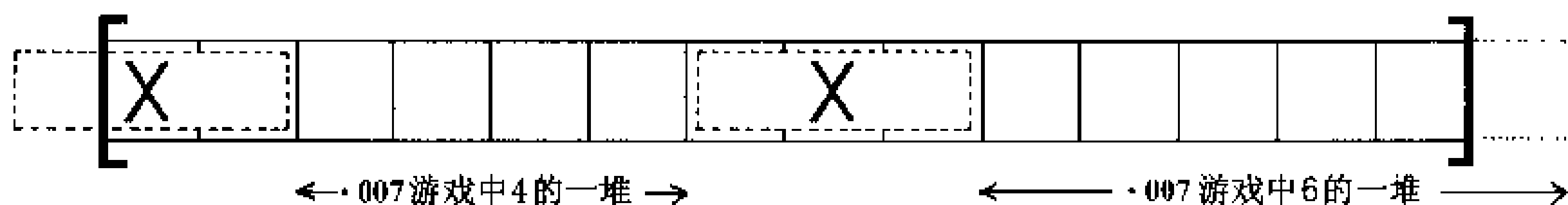



**图 10.** 三 X 游戏实际上就是•007 博弈披上了伪装.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [12] |
| 三 X 游戏 | X0] | X1] | X2] | X3] | X4] | X5] | X6] | X7] | X8] | X9] | X10] | X11] | X12] | X13] | X14] |
| | X2X | X3X | X4X | X5X | X6X | X7X | X8X | X9X | X10X | X11X | X12X | X13X | X14X | X15X | X16X |
| •**007** 游戏*** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 1 | 12 | 13 | 14 |
| 尼姆值 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 |

---

* 译者注:“九宫吃井字”游戏起源于西周，是世界上最古老的两人博弈. 周武王伐纣之后，建都镐京(今西安市附近)，实行井田制度，此游戏因此而得名. 两位局中人在九宫格 ╪ 中分别划上记号○或 X，首先将三个同一符号连成一直线者为赢家. 在电子计算机发展初期，曾对此种游戏进行过彻底的分析.

** 译者注:$n=8$ 时的•**007** 游戏如下图

○○○○○○○○　(共八颗豆子)

每次取相连的三颗豆子，最多剩两堆，显然这是一种“后发制人”的局势. 其尼姆值为 0，而它是与 X10X 的三 X 游戏同构的.

*** 译者注:詹姆士・邦德(James Bond)是这种古老英国游戏的发明者，一说即系英国国王詹姆士一世.

## 僚属问题

取子分割游戏经常出乎意外地在各种场合冒出头来.我们将会看到在本书第16章讲述点与盒的理论时会自然地出现开勒司与道森开勒司游戏,第8章讨论五口之家的就座问题(第2章中夫妻入席问题的一种变异)时道森开勒司游戏也将出现.第17章讨论斑点与豆芽问题时会出现一些其他几种取子分割游戏.让我们再看一个例子.

一支七人小部队陷于混乱状态,将军大为恼火,下令把所有的军官就地免职,使每个人都直接听命于他.后来,他接受了左、右两位军师的劝告,打算从部队外面招聘僚属,重建新的管理体系.

左军师与右军师交替地建议,目下直接管理着四个或四个以上官兵的僚属应当再招聘一位新的僚属.后者应直接听命于任命他的官吏,并直接管理三个或三个以上官兵,但不能把以前由其上级指挥的全部官兵都揽到他自己名下.当每位军官具有二或三名直接部属时,游戏即告终止,而最后提建议的左军师或右军师将会赢得将军的高度信任(即游戏的赢家——译者注).

我们可以用纸和笔来玩此游戏,把所有的人都圈进去的一个大圆表示将军,如图11所示.

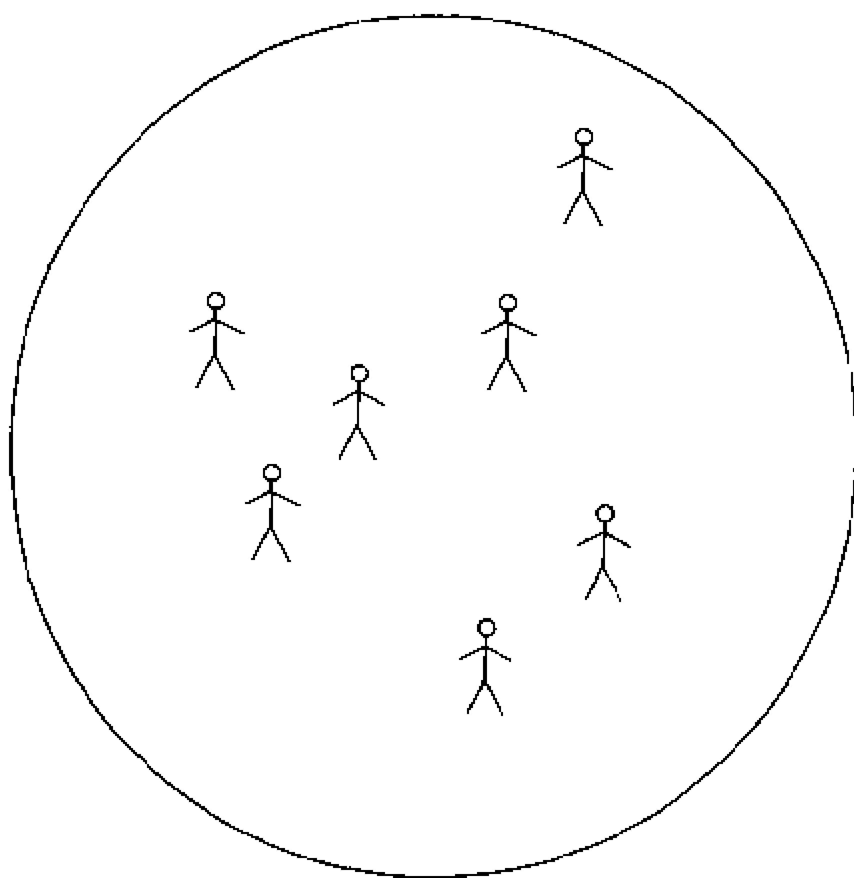


图11. 陷于混乱的一支七人部队.

每当一位新人招募进来时，我们就画一个圆，把他的部属都统统包进去. 图 12 画出了第一位招聘者及其所辖部属的四种不同办法.

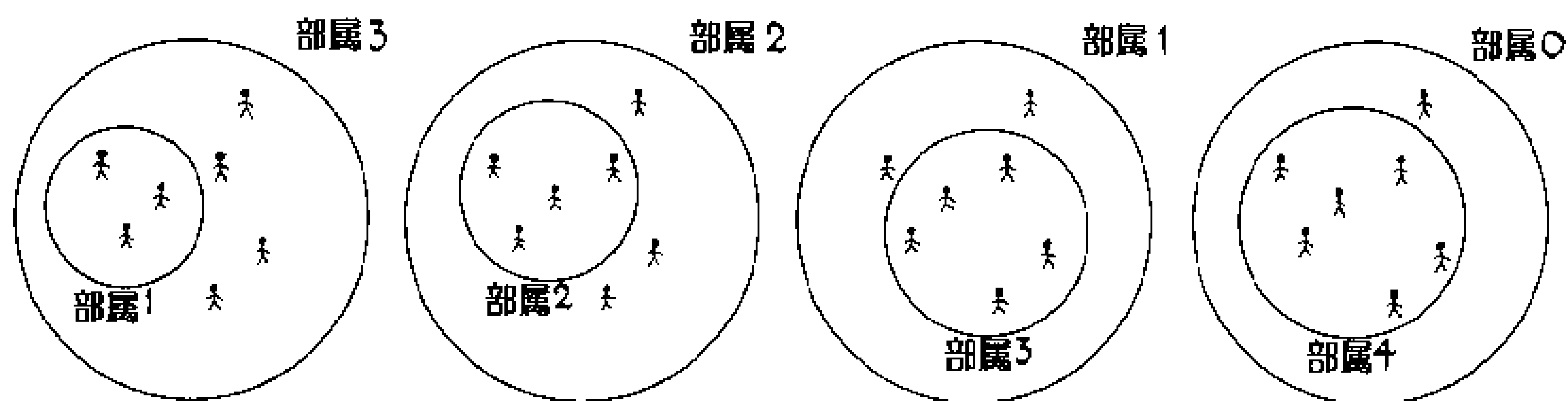



图 12. 第一位应聘军官及其部属.

为了便于管理，军官们需要分级，但并不按照他的军衔，而是根据其直接下属的人数. 一个 $n$ 级的军官应对 $n+2$ 名官兵负责. 所以图 11 中的那位将军是一位 5 级军官. 但在图 12 所示的第一次招聘行动(共有四种方式)其级别却有所降低. *

每次招聘行动将使某个军官的级别由 $n$ 降到 $a$，并募入一名级别为 $b$ 的新军官，这里的关系式是 $a+b=n-1$，而 $b$ 可以不是 0. 于是，本游戏实际上相当于取子—分割游戏中的、代号为·6的博弈，其游戏规则是每次必须从一堆中取出一颗豆子，而该堆剩下来的必须是二堆或一堆(每堆都不空)，即 $6=2^2+2^1$.

·6博弈的尼姆序列如下：

0.0 1 2 0 1 2 3 1 2 3 4 0 3 4 2 1 3 2 1 0 2 1 4 5 1
4 5 1 2 0 1 2 3 1 2 3 4 2 3 4 2 3 4 2 1 0 2 8 4 5 3
4 5 6 2 5 1 2 3 1 2 3 4 2 3 4 2 3 4 2 3 0 ···

序列开始时，其周期好像是 3，但马上就不灵了，它似乎有一种很强烈的趋向，表明其周期为 26. 理查德·奥斯丁(Richard Austin)曾不厌其烦地一直算到 $\mathcal{G}(10342)=256$；但本游戏的彻底分析仍有待于未来的研究家.

倘使军官们打算举办一个狂欢舞会来祝贺部队管理体制的重建，那么游戏本身就提供了一个极为美妙的华尔兹舞曲(注意，其中有一个音符跨越了第 7 与第 8 小节**).

---

* 译者注：图中大圆外面的记号即表示将军的级别.

** 译者注：指次页五线谱音符中的𝅗𝅥.

# ·6华尔兹*

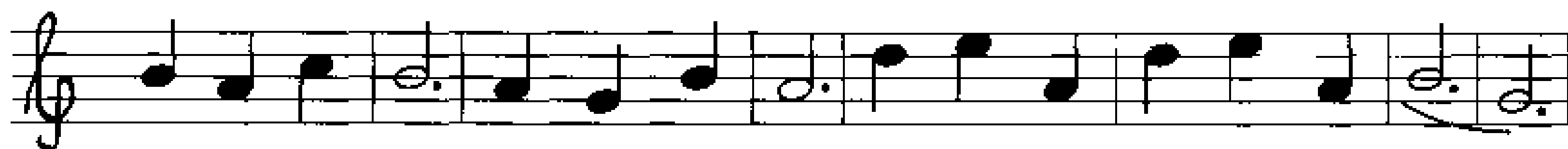
（未完成）

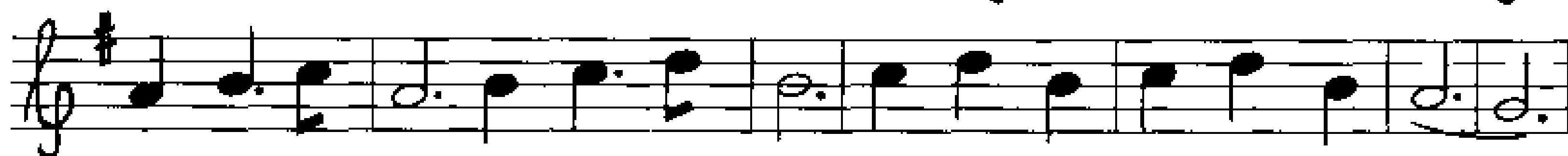
C·A·B·史密斯
（C. A. B. Smith）
作曲

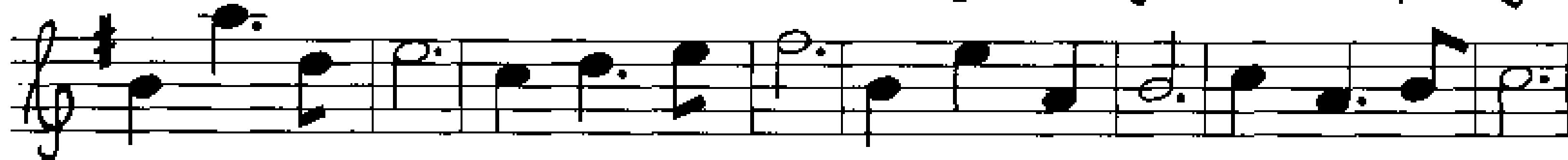
布朗歇·笛卡尔
（Blanche Descartes）
作词

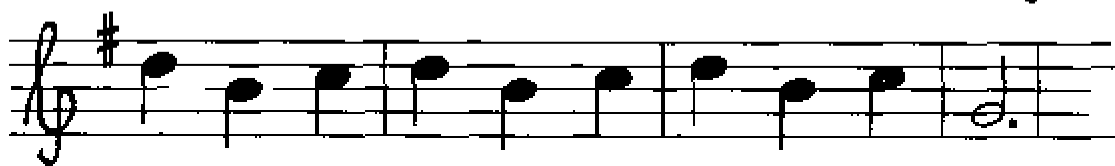
G 调




---

* 译者注：歌词大意如下：

如果我是一个光杆司令，那么我将永在；
但我若与别人作伴，我就可能走开.
作为小小的福利，这只曲子教你怎样去玩；
然而博弈之值使我神魂颠倒；我不知道
它们是否井然有序？或许仅仅是乱麻一堆.
………………………………………………

我们对布朗歇·笛卡尔(Blanche Descartes)产业集团的理事们及《尤里卡》杂志编辑部深为感谢，他们慨然应允我们复制·6华尔兹舞曲，并同意在字句安排上作一些细微改动.

## 格隆第游戏

格隆第游戏是一种分割性游戏，它的唯一合法行动是将一堆豆子分成大、小不等的两堆.最后，所有的堆都只有一颗或二颗豆子，它们不再可分.于是，最后一位分割者便是博弈的赢家.自然可以用格隆第滑尺来计算博弈之值，但必须记住，把一堆豆子分成大、小相等的两堆是不符合游戏规则的，因而是非法动作.下面给出此游戏的前面 101 个尼姆值：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n=$ | 0—19 | 0 0 0 1 0 2 1 0 2 1 | 0 2 1 3 2 1 3 2 4 3 |
| | 20—39 | 0 4 3 0 4 3 0 4 1 2 | 3 1 2 4 1 2 4 1 2 4 |
| | 40—59 | 1 5 4 1 5 4 1 5 4 1 | 0 2 1 0 2 1 5 2 1 3 |
| | 60—79 | 2 1 3 2 4 3 2 4 3 2 | 4 3 2 4 3 2 4 3 2 4 |
| | 80—100 | 5 2 4 5 2 4 3 7 4 3 | 7 4 3 7 4 3 5 2 3 5 2… |

数值算得越来越多，序列似乎表现出以 3 为周期的强烈倾向，然而，尽管许多人进行了大量计算，数列的周期性仍然未能确证.我们在 1973 年已经计算了二十五万个以上的数值，并发现了一些有趣现象，将在增补材料中告诉你.本游戏的一些变种也将在本书第 10 章，第 13 章，第 14 章中陆续出现.

## 互质取子与除数取子

在互质取子游戏(**Prim**)中，你可以从具有 $n$ 颗豆子的一堆中取走 $m$ 颗豆子，如果 $m,n$ 互质(即 $m,n$ 之间没有大于 1 的公约数)的话.在除数取子游戏(**Dim**)中则规定：若 $d$ 能整除 $n$，则你可从 $n$ 颗豆子的一堆中取走 $d$ 颗.

以上两游戏，每一个都有两个变种：

如果，由 1 到 0 视为合法动作，则为 $\text{Prim}^-$；否则为 Prim .

由 $n$ 到 0 为合法动作，则为 $\text{Dim}^+$；否则为 Dim .

下面给出一些尼姆值：

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | … | $n>0$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prim$^-$ | 0. | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 | 2 | … | $j$ | … |
| Prim$^+$ | 0. | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 4 | 0 | 2 | 0 | 5 | 0 | 6 | 0 | 2 | … | $j'$ | … |
| Dim$^-$ | 0. | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | … | $k$ | … |
| Dim$^+$ | 0. | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | … | $k+1$ | … |

其中第$j$个素数为$n$的最小素数除数,*

$j'$由$j$交换 0 与 1 而得出,

$2^k$ 为可以整除$n$的 2 的最大乘幂.

## 尼姆值的重复

易知相减游戏 $S(4,10,12)$的尼姆序列为

0.00011110022113300221100001 1…

它竟是把相减游戏 $S(2,5,6)$的尼姆序列

0. 0 1 1 0 2 1 3 0 2 1 0 0 1…

中的每个数码都重复一遍而得出来的.

一般地说,博弈 $S(ms_1,ms_2,\cdots,ms_k)$的尼姆序列是博弈 $S(s_1,s_2,\cdots,s_k)$的尼姆序列的$m$ **重**,将后者的每一个数码重复 $m$ 遍,就得到前者.

任何游戏,只要其代码全由 **0** 与 **7** 组成,而且没有单个孤立的 **7**,例如博弈**·777077**,都有着$m$重尼姆序列.只要原来的博弈中在 $\mathbf{d}_v$ 与 $\mathbf{d}_{v+1}$之间(包括首、尾在内)有一串 7,那么在由此派生出来的 $\mathbf{d}_{mv}$ 与 $\mathbf{d}_{mv+1}$之间(也包括首尾在内)也将有一串重复 $m$ 遍的 7. 否则就只有 **0**. 由改变某些代码而得出的博弈,只要变动不在一串 7 的尽头,而改变的代码又不超过 $2m-2$ 个接连不断的数码,仍将具有同样的尼姆序列.

## 双重与四重开勒司

双重开勒司就是博弈**·7777**,它的游戏规则允许把四粒及四粒以下的豆子从一堆中取出,并

* 译者注:今以 $n=15$ 为例来解释一下,由上表,此时 $j=2$,第二个素数为 3,而 3 正是 15 的最小素数除数,其他可依此类推.

使剩下的豆子不超过两堆. 让我们列出一张表, 把它的尼姆序列同开勒司游戏(代码为·77)的尼姆序列作一对比:

| 双重开勒司 | 0, 1 | 2 3 | 4 5 | 6 7 | 3 2 | 8 9 | 7 6 | 5 4 | 3 2 | 8 9 | 4 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 开勒司 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 | … |

读者们将会发现, 开勒司游戏中的每个尼姆值 $g$, 在博弈·7777 中将变成一对数值 $2g$, $2g+1$, 有的顺序, 有的逆序. 盖伊同史密斯指出, 这种情况将无限地持续下去, 而其顺序模式则由表 5 给出. 这张表格也适用于四重开勒司游戏(·77777777), 但这时, 开勒司中的 $g$ 将代之以 $4g$, $4g+1$, $4g+2$, $4g+3$ 或其逆序, 模式也与上面的情况一致. 有着 $2^{m+1}$ 个 7 的博弈·77…7 可以称为 $2^m$ 重开勒司, 它的尼姆序列也同样地可将 $g$ 代之以

$$2^m g,\quad 2^m g+1,\quad \cdots,\quad 2^m(g+1)-1$$

或其逆序而得出.

表中看来有点不规则的情况可以巧记如下: 将开勒司游戏中的值 $\mathcal{G}(n)=g$ 表为二进位数, 然后略去 2 的那一位数字(例如 7=01$\not{1}$1); 如果剩下的二进数位数为偶数, 而 $n$ 也是偶数的话, 则尼姆序列为顺序; 如果剩下的二进数位数及 $n$ 均为奇数, 则尼姆序列也为顺序; 在一奇、一偶的情况下则是逆序.

| $\mathcal{G}(n)$ | $n$ 偶 | $n$ 奇 | 博弈·7777 $n$ 偶 | 博弈·7777 $n$ 奇 | 博弈·77777777 $n$ 偶 | 博弈·77777777 $n$ 奇 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 顺 | 逆 | 0,1 | 1,0 | 0,1,2,3 | 3,2,1,0 |
| 1 | 逆 | 顺 | 3,2 | 2,3 | 7,6,5,4 | 4,5,6,7 |
| 2 | 顺 | 逆 | 4,5 | 5,4 | 8,9,10,11 | 11,10,9,8 |
| 3 | 逆 | 顺 | 7,6 | 6,7 | 15,14,13,12 | 12,13,14,15 |
| 4 | 逆 | 顺 | 9,8 | 8,9 | 19,18,17,16 | 16,17,18,19 |
| 5 | 顺 | 逆 | 10,11 | 11,10 | 20,21,22,23 | 23,22,21,20 |
| 6 | 逆 | 顺 | 13,12 | 12,13 | 27,26,25,24 | 24,25,26,27 |
| 7 | 顺 | 逆 | 14,15 | 15,14 | 28,29,30,31 | 31,30,29,28 |
| 8 | 逆 | 顺 | 17,16 | 16,17 | 35,34,33,32 | 32,33,34,35 |

**表 5.** 多重开勒司游戏的值.

## 拉斯克尼姆

标准的尼姆游戏实际上就是相减游戏 $S(1,2,3,\cdots)$，因此它可以记为 **·333…** 或 **$\cdot\dot{3}$**. 埃德 · 拉斯克(Ed. Lasker)建议再加进一种走法：把一堆分为两个不空的堆而不取走任何豆子. 显然，新走法可用代码 $\mathbf{d}_0=\mathbf{4}$ 来表示. 于是，拉斯克尼姆即为博弈 **4·333…** 或 **$4\cdot\dot{3}$**，它的尼姆序列为

$$0.1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 7\ 9\ \cdots$$

其中数 $4m$ 与 $4m-1$ 的出现顺序与通常情况相反. 此种游戏是有着无限多个非零代码游戏之一，它们大都能表现出**算术周期性**. 如果对一切充分大的 $n$ 有下列等式成立：

$$\mathcal{G}(n+p)=\mathcal{G}(n)+s,$$

则我们称 $\mathcal{G}(n)$ 最终有一个**周期** $p$ 及**跃度** $s$.

当然，$s=0$ 就意味着是通常所说的周期性. 我们将把博弈 **$4.\dot{3}$** 的尼姆序列记为 $0.\dot{1}24\dot{3}\ (+4)$，其中括弧里的 4 是每个周期要加上去的数. 对于其他显示算术周期性的游戏，情况也大体类似.

在本章增补材料中还要讲一些这种类型的其他游戏.

奇数，则我们可以拿走这孤零零的一颗豆了，而 $\mathscr{G}(1)=1$. 在后一种情况（$\mathbf{d}_1$ 为奇数），我们将认为博弈 $\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3\cdots$ 已是标准形了.

$\mathbf{d}_1$ 为偶数时，博弈 $\mathbf{D}=\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3\cdots$ 通过反复施行下列法则足够多次，可将它化为**标准形**.

由 $\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3\cdots$ 可以构造以下的新代码 $\mathbf{E}=\cdot\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\cdots$，

其中，

$\mathbf{e}_r$ 含 **1**（即奇数），若 $\mathbf{d}_{r+1}$ 含 **1**

$\mathbf{e}_r$ 含 **3**（即为 $4m+3$ 的形状），若 $\mathbf{d}_r$ 含 **2**（即为 $4m+2$ 或 $4m+3$ 形状的数）

$\mathbf{e}_r$ 含 **7**（即 $8m+7$ 形状的数），若 $\mathbf{d}_{r-1}$ 含 **4**（即 $8m+4,5,6,7$ 形状的数）

$\mathbf{e}_r$ 含 **f**（$=15$，即 $16m+15$ 形状的数），若 $\mathbf{d}_{r-2}$ 含 **8**；

一般情况为：

$$\mathbf{e}_r \text{ 含 } \mathbf{2}^{h+2}-\mathbf{1} \text{ 若 } \mathbf{d}_{r-h} \text{ 含 } \mathbf{2}^{h+1}\ (h\geqslant -1).$$

不难证明

$$\mathscr{G}_{\mathbf{E}}(n)=\mathscr{G}_{\mathbf{D}}(n+1).$$

如果 $\mathbf{e}_1$ 现在是奇数，则 **E** 已为标准形，于是我们将把 **D** 称为它的**叔伯兄弟**. 若 $\mathbf{e}_1$ 为偶数，则我们再次应用上面的变换规则. 如果必须反复应用变换规则 **t** 次之后才能把博弈 **D** 变为标准形，则称 **D** 是其标准形的 **t 级从兄弟**. 例如，道森开勒司游戏是道森象棋的叔伯兄弟，而 **·4** 则为其表兄弟. 若我们把规则应用于 **D**＝**·04** 或 **D**＝**·042** 则得出 **E**＝**·007**，再变换两次而得出 **·0137** 及 **·11337**. 所以 **·04** 及 **·042** 是从兄弟，而 **·007** 为表兄弟，**·0137** 是 **·11337** 的叔伯兄弟*.

## 八码游戏纲鉴

表 6 与表 7 对一切八码游戏（每一个代码都小于 8）中形式为 $\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2$，$\mathbf{4}\cdot\mathbf{d}_1$，$\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3$，$\mathbf{4}\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2$ 各个种类给出了有关信息. 循环节给出第一个完整的周期. 表中的"值域"一栏则是目前已经计算过的值的总数.

如果你在表 6(b) 中一时找不到你的游戏 $\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2$ 或 $\mathbf{4}\cdot\mathbf{d}_1$，则可先利用表 6(a) 来检索合适的一行.

与此类似，表 7(a) 可用来检索三个代码的游戏，为了简化起见，表中已省去小数点. 符号 §

---

* 译者注：按照关系的亲疏，我国向来的习惯是：叔伯兄弟，表兄弟，从兄弟，族兄弟……

则指示读者参看下面的附加说明.

| d \ $d_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 4•$d_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | •02 | | | | | •05 |
| 1 | •01 | | | •02 | | | | | •51 |
| 2 | •05 | •05 | | •22 | •05 | •05 | | •06 | •05 |
| 3 | •05 | | | •22 | | | | | |
| 4 | •07 | •17 | •07 | •17 | | | •44 | •45 | •77 |
| 5 | •05 | | | | | •51 | | | •51 |
| 6 | •37 | •37 | •37 | •37 | | •64 | •64 | •64 | •77 |
| 7 | •05 | | | •26 | | | | | •75 |

**表 6a.** 表 6(b)的博弈指引图(冷索表).

# 附加说明

表 8 给出了一些博弈的周期,它们太长了,以致在表 7 中没有显示出来. 此表后面的几行实际上都涵盖了无限多的博弈,因为每只方括弧[ ]里面的数字可以允许重复 $k$ 次($k \geqslant 0$). 盖伊同史密斯对•**177** 博弈已作了彻底分析,它也许可以叫做"$\frac{5}{3}$重开勒司",(周期 20),它的最后一个例外值为 $\mathcal{G}(497)=8$. 表 8 的最后一行是一种名叫"$\left(k+1\frac{2}{3}\right)$重开勒司"之类的玩意儿.

杰克・肯荣(Jack Kenyon)发现了•**156** 博弈的极长周期 349,理查德・奥斯丁(Richard Austin)其后又发现了•**356**,•**055**,•**644**,•**165** 诸博弈的周期142,148,442,与 1550. 表 9 指出了这些长周期的一些惹人注目的结构. 但长达 1550 的周期此表不载,你们可查阅奥斯丁本人的论文. •**055**博弈的后半个周期,正如你们所看到的那样,除个别例外情况以外,可由其前半个周期加 5(尼姆加法)而得. 由于同样的理由,表中只给出了博弈•**356** 与•**644** 的半个周期,除了博弈•**356**的两处例外(S=16),另一半数值均可由前一半数值加 7(指尼姆加法)而得.

在周期结构及游戏规则中,其中不乏引人入胜之处. 汤姆・谢弗(Tom Schaefer)对此已进行过不少研究. 勤奋的读者们将能自己发现一些有趣的特征:亚周期,反射,重复,尼姆数相加等等.

| 游戏名称 | 近表兄弟 | 亲叔伯兄弟 | 标准形 | 尼姆序列，由 G(1)−1 起 | | 周期 | 值域 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·01 | ·001 | ·01 | ·1 | 1$\dot{0}$ | | 1 | |
| ·02 | ·02y | ·03y | ·13 | $\dot{1}$10$\dot{0}$ | | 1 | |
| ·04 | ·007 | ·0137 | ·11337 | 1112203311 1043332224 4055222330 5011133356 | | | 3216 |
| ·05 | | ·05W·2YW<br>·012 4·WY | ·U0X<br>·10U | $\dot{1}\dot{0}$ | | 2 | |
| ·06 | ·06x | ·03T | ·1337 | 1122031122 3311053342 2113022114 4552617581 | | | 17999 |
| ·07 | ·4Wx | ·07x | ·137 | 1120311033 2210522330 1130211045 2740112031 | | 34 | |
| ·11 | | ·011 | ·11 | 11$\dot{0}$ | | 1 | |
| ·12 | | | ·12 | $\dot{1}$00$\dot{1}$ | | 4 | |
| ·14 | | | ·14 | 1001021221 0414412212 0104126.64 1401021261 | | | 35949 |
| ·15 | | | ·15 | $\dot{1}$10112212$\dot{2}$ | | 10 | |
| ·16 | | | ·16 | 1001221401 1211012414 2102142115 1421421423 | | | 50171 |
| ·17 | | ·4Vy | ·17 | 1.02130113 2234153223 1103120114 4264110213 | | 34 | |
| ·22 | | ·2Sy | ·33 | $\dot{1}$2$\dot{0}$ | | 3 | |
| ·26 | | ·2Tx<br>4·WN | ·33U<br>·73X | $\dot{1}$23$\dot{0}$ | | 4 | |
| ·31 | | ·2y1 | ·31 | 12$\dot{0}\dot{1}$ | | 2 | |
| ·32 | | | ·32y | $\dot{1}$0$\dot{2}$ | | 3 | |
| ·34 | | | ·34y | 10120$\dot{1}$0312 120$\dot{3}$ | | 8 | |
| ·35 | | | ·35 | $\dot{1}$2010$\dot{2}$ | | 6 | |
| ·36 | | | ·36y | 1021021321 3243043241 2312012415 4154152102 | | | 17999 |
| ·37 | | ·6xy | ·37 | 1201231234 0342132102 1451451201 2312312342 | | | 10342 |
| ·44 | ·4Qx | ·07Z | ·1377 | 1122331144 3322114422 6614112277 11.4332211 | | 24 | |
| ·45 | | ·4Rx | ·177 | 1122311443 2211422614 1122711443 2211482711 | | 20 | |
| ·51 | | | ·5PY 4·PY | $\dot{1}$ | | 1 | |
| ·52 | | | ·52x | 102$\dot{2}$10$\dot{3}$ | | 4 | |
| ·53 | | | ·53y | 1122102240 $\dot{1}$2211224$\dot{1}$ | | 9 | |
| ·54 | | | ·54x | 10$\dot{1}$22241$\dot{1}$ | | 7 | |
| ·56 | | | ·56x | 1022411324 4662117684 116518117T4 56113T6689 | | | 19999 |
| ·57 | | | ·175<br>·53z ·57Y<br>4·1T 4.5N | $\dot{1}$12$\dot{2}$ | x=11, T=12 | 4 | |
| ·64 | | ·6Zx | ·377 | 1234153215 1268123745 8295476811 6274x23854 | | | 1127 |
| ·71 | | ·2y3<br>·2zV | ·31M<br>·71X | 12$\dot{1}\dot{0}$ | X=10, x=11 | 2 | |

续表

| 游戏名称 | 近亲 表兄弟 | 近亲 叔伯兄弟 | 标准形 | 尼姆序列，由 $\mathcal{G}(1)=1$ 起 | 周期 | 值域 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ·72 | | | ·32N·72X | $\dot{1}02\dot{3}$ | 4 | |
| ·74 | | | ·74x | 1012324146 2321517685 1Xx26845X6215156268l | | 101 |
| ·75 | | | 4·7Y{·35R, ·75X} | $\dot{1}\dot{2}$ | 2 | |
| ·76 | | | ·76x | 1023416234 1673216752 89652871X4 371X428613 | | 1875 |
| ·77 | | 4·Qx | ·77y | 1231432142 6412714321 4671128547 2186741231 | 12 | |
| 4·3 | | | ·352 4·3Y | $1\dot{2}\dot{0}$ | 2 | |

M=1,3,5,7　R=5,7　V=1,3　Y=0,1,4,5

N=2,3,6,7　S=2,3　W=0,2　y=0,1

P=1,5　T=6,7　X=0,1,2,3,4,5,6,7　Z=4,5,6,7

Q=4,6　U=3,5,7　x=1,2,3　z=4,5

表 6(b). 有两个编码数字的八码游戏.

| $d_1d_2$ | $d_3=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $d_1d_2$ | $d_3=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 01 | | 002 | — | · | | 04 | 10 | — | — | 05 | | 05 | | 05 |
| 01 | 11 | 05 | 002 | — | | | — | 11 | — | — | 002 | | | · | 051 |
| 02 | 02 | | 022 | — | 024 | | 026 | 12 | — | — | — | — | — | — | · |
| 03 | 02 | 022 | 022 | · | 034 | 06 | 06 | 13 | | | 022 | — | — | — | 07 |
| 04 | 017 | 04 | 017 | — | — | 044 | 045 | 14 | — | — | — | — | — | — | — |
| 05 | | 05 | 051 | — | | 054 | 055 | 15 | 51 | — | — | — | 51 | | |
| 06 | 06 | 06 | 06 | — | 064 | 064 | 064 | 16 | | | | — | — | — | — |
| 07 | 07 | 07 | 07 | 44 | 44 | 44 | 44 | 17 | | | — | — | 57 | — | 45 |
| 20 | 31 | 05 | 71 | — | — | — | — | 30 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 |
| 21 | 31 | 05 | 71 | 204 | 205 | 206 | 207 | 31 | 71 | — | 71 | 31 | 71 | | 71 |
| 22 | 22 | 26 | 26 | — | 224 | | 226 | 32 | 32 | 72 | 72 | — | 324 | 72 | 72 |
| 23 | 22 | 26 | 26 | 224 | 224 | 226 | 226 | 33 | | | 26 | | 26 | — | 26 |
| 24 | 71 | 05 | 71 | | — | 244 | 245 | 34 | 34 | — | 342 | — | 344 | | 346 |
| 25 | 71 | 05 | 71 | 244 | 245 | 244 | 245 | 35 | | 4·3 | | · | 75 | — | 75 |
| 26 | 26 | 26 | 26 | — | 264 | 264 | 264 | 36 | 36 | | 362 | | 364 | | 366 |
| 27 | 26 | 26 | 26 | 264 | 264 | 264 | 264 | 37 | — | 332 | | | | | 64 |
| 40 | 07 | 07 | 07 | | 404 | 404 | 404 | 50 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 |
| 41 | 17 | 173 | 173 | — | 414 | | 416 | 51 | 51 | — | 512 | 51 | 51 | 157 | 157 |

续表

| $d_3=1$ | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $d_3=1$ | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1d_2$ | | | | | | | | $d_1d_2$ | | | | | | | |
| 42 | 07 | 07 | 07 | 404 | 404 | 404 | 404 | 52 | 52 | 52 | 52 | | 524 | 524 | 524 |
| 43 | 17 | 173 | 173 | 414 | 414 | 416 | 416 | 53 | 53 | — | 532 | 57 | 57 | — | 536 |
| 44 | 44 | 44 | 44 | — | 444 | 444 | 444 | 54 | 54 | 54 | 54 | 147 | 147 | 147 | 147 |
| 45 | 45 | 45 | 45 | - | 454 | 454 | 454 | 55 | 51 | 157 | 157 | 51 | 51 | 157 | 157 |
| 46 | 44 | 44 | 44 | 444 | 444 | 444 | 444 | 56 | 56 | 56 | 56 | — | 564 | 564 | 564 |
| 47 | 45 | 45 | 45 | 454 | 454 | 454 | 454 | 57 | 57 | 536 | 536 | 57 | 57 | 536 | 536 |
| 60 | 37 | 373 | 373 | — | 604 | — | 606 | 70 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 | 05 |
| 61 | 37 | 373 | 373 | 604 | 604 | 606 | 606 | 71 | 71 | 71 | 71 | 71 | 71 | 71 | 71 |
| 62 | 37 | 373 | 373 | 604 | 604 | 606 | 606 | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 |
| 63 | 37 | 373 | 373 | 604 | 604 | 606 | 606 | 73 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 |
| 64 | 64 | 64 | 64 | — | 644 | 644 | 644 | 74 | 74 | 74 | 74 | — | 744 | 744 | 744 |
| 65 | 64 | 64 | 64 | 644 | 644 | 644 | 644 | 75 | 75 | 75 | 75 | 75 | 75 | 75 | 75 |
| 66 | 64 | 64 | 64 | 644 | 644 | 644 | 644 | 76 | 76 | 76 | 76 | | 764 | 764 | 764 |
| 67 | 64 | 64 | 64 | 644 | 644 | 644 | 644 | 77 | 77 | | 772 | — | 774 | — | 776 |

| $4\cdot d_1$ | $d_2=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4·0 | 05 | 26 | 26 | 05 | 05 | 26 | 26 |
| 4·1 | 51 | — | 4·12 | 51 | 51 | 57 | 57 |
| 4·2 | 05 | 26 | 26 | 05 | 05 | 26 | 26 |
| 4·3 | 4·3 | 332 | 332 | 4·3 | 4·3 | 332 | 332 |
| 4·4 | 77 | 77 | 77 | 776 | 776 | 776 | 776 |
| 4·5 | 51 | 57 | 57 | 51 | 51 | 57 | 57 |
| 4·6 | 77 | 77 | 77 | 776 | 776 | 776 | 776 |
| 4·7 | 75 | — | 4·72 | 75 | 75 | 4·72 | 4·72 |

**表** 7(a)、表 7(b)与表 6(b)的博弈指引图(检索表).

| 游戏名称 | 近表兄弟 | 亲叔伯兄弟 | 标准形 | 尼姆序列,由 $\mathcal{G}(1)-1$ 起 | 周期 | 值域 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ·002 | ·003 | ·013 | ·113 | $\dot{1}1100\dot{0}$ | 6 | |
| ·004 | ·00137 | ·011337 | ·1113337 | 1111222033 3111104433 3322224440 5552222333 | | 14999 |
| ·005 | ·005 | ·0107 | ·10137 | 1011222033 4110154333 2221601045 2216657010 | | 19999 |
| ·006 | ·0037 | ·01337 | ·113337 | 1112220331 1122433355 2144333222 1114050222 | | 14999 |
| ·014 | | ·014 | ·1007 | 1001012212 3401051212 5303151211 2303323451 | | |
| ·015 | | ·015 | ·1107 | 1101021223 0142145122 3234014512 5123423401 | | |
| ·016 | | ·016 | ·1037 | 1012220101 4422161604 2127661512 8461210845 | | 19999 |



续表

| 游戏名称 | 近表兄弟 | 亲叔伯兄弟 | 标准形 | 尼姆序列,由 $\mathcal{G}(1)=1$ 起 | 周期 | 值域 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ·017 | | ·017 | ·1137 | 1112023114 0451320211 1402616404 1112026154 | 60 | § |
| ·022 | ·02S | ·03S | ·133 | $\dot{1}120\dot{0}$ | 5 | |
| ·024 | ·02z | ·0307 | ·13137 | 1122301112 532115560 3125118112 1967122168 | | |
| ·026 | ·02T | ·0337 | ·13337 | 1122304112 5334112530 4421133412 1156322815 | | |
| ·034 | | ·03z | ·1307 | 1102231401 1312210511 3632481102 7621584113 | | |
| ·044 | ·0077 | ·01377 | ·113377 | 1112223331 1141133322 2111111222 6651441112 | 36 | |
| ·045 | ·04R | ·0177 | ·11377 | 1112223311 1441332221 1144222664 4411122277 | 32 | |
| ·051 | | ·05V | ·117 | 1110221340 1113222340 1543222310 1043222010 | 48 | § |
| ·054 | | ·05Q | ·1077 | 1012223441 1163222411 6667344511 1673544187 | | |
| ·055 | | ·05R | ·1177 | 1112223111 4443222111 4222641111 1222711144 | 148 | § |
| ·064 | ·06Z | ·0377 | ·13377 | 1122334115 5332211514 2266841122 3374455872 | | |
| ·101 | | | ·101 | $101\dot{0}$ | 1 | |
| ·102 | | | ·102 | $\dot{1}0001\dot{1}$ | 6 | |
| ·104 | | | ·104 | 1000102212 2410401566 1228104015 6625481010 | | 50000 |
| ·106 | | | ·106 | 1000122214 4010621242 1045166512 4510653015 | | 53199 |
| ·111 | | | ·111 | $111\dot{0}$ | 1 | |
| ·112 | | | ·112 | $\dot{1}1000\dot{1}$ | 6 | |
| ·114 | | | ·114 | 1100112021 2041104115 2413211120 1120132244 | | 5121 |
| ·115 | | | ·115 | $\dot{1}110111222122\dot{2}$ | 14 | § |
| ·116 | | | ·116 | 1100212021 1044132411 2041204115 4425202154 | 96 | § |
| ·121 | | | ·121y | $102\dot{1}00\dot{1}$ | 1 | |
| ·122 | | | ·122y | $\dot{1}002\dot{1}$ | 5 | |
| ·123 | | | ·123y | $1022\dot{1}002\dot{1}$ | 5 | |
| ·124 | | | ·124y | 1001102130 2130113023 3223425042 5322332031 | 62 | § |
| ·125 | | | ·125y | 1021102130 1130231223 4253225320 3110312011 | | |
| ·126 | | | ·126y | 1002133210 4250315041 5041304130 2234453722 | | |
| ·127 | | | ·127y | 1022104412 2014461770 1226144812 7810726814 | | 17999 |
| ·131 | | | ·131 | $112\dot{0}01\dot{1}$ | 4 | |
| ·132 | | | ·132 | $\dot{1}100\dot{2}$ | 5 | |
| ·134 | | | ·134 | 1100112031 2031103122 3322435143 5223322130 | 62 | § |
| ·135 | | | ·135 | 1120112031 1031224322 4352235221 3011302110 | | 5112 |
| ·136 | | | ·136 | 1100213021 1022334251 4223342011 2031205144 | | 3889 |
| ·141 | | | ·141y | 1011012212 $410\dot{1}121221$ $241\dot{2}$ | 11 | |
| ·142 | | | ·142y | 1002221103 3241063231 0162240115 3384062355 | | 2039 |
| ·143 | | | ·143y | 1012220104 2215047228 0412228104 2215047228 | | 50000 |
| ·144 | | | ·144y | $100\dot{1}22224111\dot{1}$ | 10 | § |
| ·145 | | | ·145y | $10\dot{1}1222241\dot{1}$ | 9 | § |
| ·146 | | | ·146y | 1002224111 3324446662 3111766842 1176534811 | | 2075 |
| ·147 | | | ·54Zy | $10\dot{1}222441\dot{1}$ | 8 | § |

续表

| 游戏名称 | 近表兄弟 | 亲叔伯兄弟 | 标准形 | 尼姆序列,由 𝒢(1)—1 起 | 周期 | 值域 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ·351 | | | ·351y | 12120102 | 8 | |
| ·353 | | | ·353y | 12120 | 2 | |
| ·354 | | | ·354y | 1201243123 5243513524 7247864762 786836T712 | | |
| ·356 | | | ·356y | 1202124516 7312826281 5x79581212 T258561812 | 112 | § |
| ·362 | | | ·36Sy | 1023410234 1523714237 0123750132 5186254872 | | 5101 |
| ·364 | | | ·36zy | 1021321345 3123125125 7457482962 968764721X | | |
| ·366 | | | ·36Ty | 1023451623 1576891276 85432915x3 284Xx3659X | | |
| ·371 | | | ·371y | 1231032402 3401211632 0123413421 0734162187 | | 500 |
| ·373 | | ·6xS | ·373y | 1234012341 5231472104 321402640 | 28 | |
| ·374 | | | ·374y | 1201243123 5213513524 7247864762 7869369742 | | |
| ·375 | | | ·375y | 1231243213 4274814812 4814381182 1181481248 | 18 | § |
| ·376 | | | ·376y | 1203124352 4351432645 867X827362 7465392534 | | |
| ·404 | ·4WZx | ·07x7x | ·13737 | 1122334115 6332211087 7255401122 8845566772 | | |
| ·414 | | ·4Vzx | ·1707y | 1102234401 1322344566 3223118763 XX01187644 | | |
| ·416 | | ·4VTx | ·1737y | 1122341166 3221066844 5X17833241 66884XXT18 | | |
| ·444 | ·4QZx | ·0777x | ·13777 | 1122334115 6332211887 7655141122 8845566778 | | |
| ·454 | | ·4RZx | ·1777y | 1122341166 3221166844 5X11833447 6688411678 | | |
| ·512 | | | ·51Sy | 11122210 | 6 | |
| ·524 | | | ·52Zy | 1022104416 7012261446 870187614 7610781671 | 52 | § |
| ·532 | | | ·53Sy | 1122401224 1 | 5 | |
| ·536 | | | ·53Ty<br>·57Ny | 11224 …… | 5 | |
| ·564 | | | ·56Zy | 1022441132 5476823X76 8932T65432 11945XXT9 | | |
| ·604 | | ·6xzW | ·3707y | 1201231234 5345321321 0254754768 9201239671 | | |
| ·606 | | ·6xTx | ·3737y | 1234012345 1234562345 6734167891 6789113755 | | |
| ·644 | | ·6ZZx | ·3777y | 1234516325 896X5496FX42367S49FX Ss94Ff19S2 | 442 | § |
| ·744 | | | ·74Zy | 1012324516 723218967X 45981XxX45961Xx39896 | | |
| ·764 | | | ·76Zy | 1023451623 4576891X76 8543261543 28FXx59SFf | | |
| ·772 | | | ·77Sy | 12341624163 | 4 | |
| ·774 | | | ·77zy | 1231456713 289546T219 645Tt23895 6tT3296XST | | |
| ·776 | | 4·QZy | ·77Ty | 1234163216 74581X5476 1236143218 X4FS123416 | | |
| 4·12 | | | 4·1Sy | 1122042111221 | 7 | |
| 4·72 | | | 4·7Ny | 124 | 3 | |

X=10 x=11 T=12 t=13 F=14 f=15 S=16 s=17

表 7(b). 有三个编码数字的八码游戏

| 游戏名称 | 周期 $p$ | 正则尼姆值，$\mathcal{G}(n)$<br>$n=1,2,\cdots,p$，mod $p$. | 例外的尼姆值，$\mathcal{G}(0)=0$，$\mathcal{G}(1)=1$<br>以及表中特别指出者 |
|---|---|---|---|
| **·017** | 60 | 1112026114 0451320211 1402616104<br>1112026154 0451320211 1802616104 | $\mathcal{G}(7)=3$,<br>$\mathcal{G}(13)=5$. |
| **·051** | 48 | 10102323 40101323 23401043<br>23231010 43232010 10432310 | $\mathcal{G}(6)=\mathcal{G}(16)=\mathcal{G}(26)=\mathcal{G}(36)=2$,<br>$\mathcal{G}(2)=\mathcal{G}(7)=\mathcal{G}(12)=1$, $\mathcal{G}(22)=\mathcal{G}(46)=5$. |
| **·116** | 96 | 1120X120 61104115 24112041<br>50411524 25X0X154 2T582855<br>24X1X0X5 24251140 51202114<br>X5142011 20X120X8 18981T20 | $\mathcal{G}(3)=0$, $\mathcal{G}(5)=\mathcal{G}(9)=\mathcal{G}(25)=$<br>$=\mathcal{G}(35)=\mathcal{G}(37)=\mathcal{G}(47)=2$,<br>$\mathcal{G}(31)=\mathcal{G}(41)=4$, $\mathcal{G}(42)=\mathcal{G}(94)=$<br>$=\mathcal{G}(138)=8$, $\mathcal{G}(88)=1$. |
| **·124** | 62 | 58411 02130 21301<br>1302 3322 7465 4455<br>79633 20311 03120<br>3120 1140 5547 5647 | $\mathcal{G}(2)=\mathcal{G}(3)=\mathcal{G}(28)=\mathcal{G}(64)=0$,<br>$\mathcal{G}(24)=\mathcal{G}(32)=\mathcal{G}(121)=3$,<br>$\mathcal{G}(26)=\mathcal{G}(30)=\mathcal{G}(33)=$<br>$=\mathcal{G}(34)=\mathcal{G}(59)=\mathcal{G}(95)=2$. |
| **·134** | 62 | 51401 12031 2031<br>0312 2332 6475 4475<br>62732 21301 13021<br>3021 1041 5446 3746 | $\mathcal{G}(3)=0$,<br>$\mathcal{G}(28)=1$,<br>$\mathcal{G}(24)=\mathcal{G}(32)=\mathcal{G}(59)=2$,<br>$\mathcal{G}(26)=\mathcal{G}(30)=\mathcal{G}(34)=3$. |
| **·152** | 48 | 01022201 04323101 32210104<br>22310132 34010222 01043234 | 没有其他例外值. |
| **·173** | 40 | 01223 10462 01122 75147<br>22110 23741 32210 46274 | $\mathcal{G}(9)=\mathcal{G}(16)=\mathcal{G}(20)=3$. |
| **·375** | 18 | 121814<br>781482<br>148174 | $\mathcal{G}(4)=1$, $\mathcal{G}(5)=\mathcal{G}(8)=2$,<br>$\mathcal{G}(3)=\mathcal{G}(7)=\mathcal{G}(10)=\mathcal{G}(25)=3$,<br>$\mathcal{G}(11)=\mathcal{G}(7)=\mathcal{G}(35)=4$,<br>$\mathcal{G}(13)=7$, $\mathcal{G}(18)=\mathcal{G}(36)=8$. |
| **·524** | 52 | 1022104416701 2261446187018<br>7614761078167 4107210781678 | 没有其他例外值. |
| **·1[1]5** | $4k+10$ | 11[1]01[1]12[2]21[2]22 | 无例外. |
| **·1[1]44** | $4k-10$ | 11[1]11[1]22[2]22[2]44 | $\mathcal{G}(k+2)=\mathcal{G}(k+3)=0$. |
| **·1[1]45** | $4k+9$ | 11[1]11[1]22[2]22[2]4 | $\mathcal{G}(k+2)=0$. |
| **·1[1]47** | $3k+8$ | 111[1]22[2]24[4]4 | $\mathcal{G}(k+2)=0$. |
| **·[1]53** | $5k+9$ | 1[1]12[2]21[1]12[2]24[4] | $\mathcal{G}(3k+6)=\mathcal{G}(5k+10)=0$. |
| **·[1]54** | $4k-7$ | [1]11[1]12[2]22[2]4 | $\mathcal{G}(k+2)=0$. |
| **·[1][3]77** | $12k+20$ | 1[1]12[2]28[8]1[1]14[4]47[7]<br>2[2]21[1]18[8]2[2]27[7]44[4] | 例外情况不胜枚举，此处恕不一一指出. |

**表 8.** 某些八码游戏的周期.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 1 | | 4 4 4 | 7 2 |
| 1 1 1 | | 4 4 4 | 8 |
| 1 1 | 2 | 4 4 4 | |
| 1 1 1 | 2 7 | 4 4 4 | |
| 1 1 1 | 7 | 4 | 7 2 |
| 1 1 1 | | 4 4 4 | 7 |
| 1 1 | 2 8 | 4 4 | |
| 1 1 1 | 2 7 | 4 4 4 | |
| 1 1 1 | 8 | 4 4 | 2 |
| 1 1 1 | | 4 4 4 | 7 2 |
| 1 | 2 8 | | |
| 4 4 | | 1 1 1 | 2 7 |
| 4 1 4 | | 1 1 1 | 2 8 |
| 4 4 | 7 | 1 1 1 | |
| 4 1 4 | 7 2 | 1 1 1 | |
| 4 4 4 | 2 | 1 | 2 7 |
| 4 4 | | 1 1 1 | 2 2 |
| 4 4 | 7 8 | 1 1 | |
| 4 4 4 | 7 2 | 1 1 1 | |
| 4 4 4 | 8 | 1 1 | 7 |
| 4 4 4 | | 1 1 1 | 7 |
| 4 | 7 8 | | |

**· 055 博弈的周期**

| | | |
|---|---|---|
| x=11 | f=15 | τ=23 |
| T=12 | S=16 | σ=27 |
| F=14 | V=20 | α=28 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| S f x | 5 1 5 1 | T 8 | 6 2 6 2 |
| S x f | 1 5 1 5 | 8 T | 2 6 2 6 |
| x f x | 5 1 5 1 | T 8 | 6 2 6 2 |
| f x f | 1 5 1 5 | 8 T | 2 6 2 6 |
| x f x | 5 1 5 1 | T 8 | 6 2 6 2 |
| f x f | 1 5 1 | | |

**· 356 博弈的半周期**

| | | | |
|---|---|---|---|
| T 5 5 5 | 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| T 5 | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 2 |
| 5 T | 6 6 x | 1 | 8 2 2 |
| T T | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 2 |
| 5 | 6 6 | 8 8 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 [illegible] | 8 8 | 2 2 2 |
| T 5 | 6 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| T 5 | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 2 |
| 5 5 5 | 6 | 8 1 | 8 2 2 |
| T T | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 2 |
| 5 | 6 6 | 8 8 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 f | 8 8 1 | 2 2 |
| T 5 | 6 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| f 5 | 6 6 6 | 1 | 2 2 2 |
| T 5 | 6 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 6 6 | 8 1 | 1 x 2 |
| 5 T | 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 2 |
| 5 | 6 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| f 5 | 6 6 6 | 8 | 2 2 2 |
| T 5 | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 |
| T T T | 6 6 | 8 1 | 2 2 x |
| T T | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 2 |
| 5 T | 6 6 S | 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 2 |
| 5 | 6 6 6 | 8 1 | 1 x 2 |
| T 5 | 6 6 6 | 8 | 2 2 2 |
| T 5 | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 x |
| T T | 6 6 | 8 1 | 2 2 x |
| T 5 T | 6 6 S | 8 | 2 2 2 |
| 5 T | 6 6 x | 1 | 8 2 2 |
| V T | 6 6 6 | 8 8 | 2 2 2 |
| 5 T | 6 6 | 8 1 | 2 2 2 |
| T T | 6 6 6 | 8 | 2 2 2 |

**· 156 博弈的周期**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| S | 5 | F | τ | 9 | 2 |
| S | 5 | F | | 9 | 2 |
| S | 5 | F | τ | 2 | 9 |
| S | F | 5 | τ | | 2 |
| S | F | 5 | τ | 2 | 9 |
| S | 5 | F | | 2 | 9 |
| S | σ | 5 | τ | 2 | 9 |
| S | 5 | F | τ | 2 | 9 |
| S | | 5 | τ | α | 2 |
| S | F | 5 | τ | 2 | 9 |
| S | 5 | F | τ | 2 | 9 |
| | 5 | F | τ | α | 2 |
| S | 5 | F | τ | 2 | 9 |
| S | 5 | F | τ | | 2 |
| S | σ | 5 | τ | 9 | 2 |
| S | 5 | F | τ | 2 | 9 |
| S | | 5 | τ | 2 | 9 |
| S | F | 5 | | 2 | 9 |
| S | σ | 5 | τ | α | 2 |
| S | 5 | F | τ | 2 | 9 |
| S | 5 | F | τ | | 2 |
| S | σ | 5 | F | 2 | 9 |
| S | 5 | F | τ | 2 | 9 |
| S | | 5 | τ | α | 2 |
| S | F | 5 | τ | 2 | 9 |
| S | 5 | F | τ | | 2 |
| S | σ | 5 | τ | α | 2 |
| 9 | 5 | F | τ | 2 | 9 |
| S | | 5 | | τ α | 2 |
| S | F | 5 | τ | 2 | 9 |
| S | | 5 | τ | 2 | 9 |
| S | F | 5 | τ | 9 | 2 |
| S | 5 | F | τ | | 2 |
| S | σ | 5 | τ | 9 | 2 |
| S | 5 | F | τ | 9 | 2 |
| S | 5 | F | | 9 | 2 |
| S | σ | 5 | τ | 2 | 9 |
| S | F | 5 | τ | 2 | 9 |
| | F | 5 | τ | α | 2 |
| S | 5 | F | | | |

**· 644 博弈的半周期**

表 9. 八码游戏中的某些长周期.

合(**稀疏空间**),而普通值则构成上述集合的补集(**普通陪集**).

这事是怎么发生的呢?让我们来看一看某些取子—分割游戏的尼姆值

$$\mathscr{G}(0),\mathscr{G}(1),\mathscr{G}(2),\cdots,\mathscr{G}(n-1).$$

设想有一种办法把所有的拧数分成稀有与普通两半,而稀有的那一半是关于尼姆加法运算的一个封闭子空间,所含的尼姆数较为稀少,则

$$\mathscr{G}(n)=\mathbf{mex}\,\mathscr{G}(i)\overset{*}{+}\mathscr{G}(j),\quad(i,j<n).$$

将根据游戏规则,取遍所有的各对$(i,j)$.这时,绝大部分的排除值将是

$$普通\overset{*}{+}普通=稀有,$$

仅当$\mathscr{G}(i)$与$\mathscr{G}(j)$中的一个为稀有值时,排除值才有可能是普通值.由于$\mathscr{G}(n)$是第一个未被排除的值,所以它十之八九是在普通陪集之中.*

| 稀疏空间将一直保持稀疏. |
|---|

由此可见,一旦序列中的尼姆值开始凝聚在一个普通值的适当陪集内时,此种凝聚倾向势将继续维持下去.凝聚倾向的出现通常要比最终的周期性早得多.例如,在"开勒司"游戏的前25个尼姆值中,1,2,4,7一共出现了19次,而0,3,5,6只出现6次,所以稀疏空间已经很好地建立起来了.

将$0,1,2,\cdots,2^n-1$分割为稀疏空间与普通补集的办法可以推广到$0,1,2,\cdots,2^{n+1}-1$,它有两种不同途径.例如,将前25个"开勒司"值分为

稀疏:0,3,5,6　　　　普通:1,2,4,7

可以推广到十六个值,即

(办法一)稀疏:0,3,5,6,9,10,12,15　　　　普通:1,2,4,7,8,11,13,14

或者是

(办法二)稀疏:0,3,5,6,8,11,13,14　　　　普通:1,2,4,7,9,10,12,15

但是,超过7的前几个值多半可能成为8,因为大于8的拧数仅当8被排除时才会出现,而这需要前面有个8的值或者更多时才有可能.一般地说,

| 一个新的、2的乘幂十之八九会变成一个新的普通值. |
|---|

---

* 译者注:此处不是严格证明,而是波利亚(G. Pólya)所谓的"似然推理"(Plausible Reasoning).

所以，在前25个"开勒司"值的基础上，以下的猜测是合理的：即其稀疏空间中将不含有

1,2,4,8,16,…

从而对邪恶—可憎分割给出了一种解释.

## 格隆第游戏最终有无周期?

稀疏空间现象是在我们计算格隆第游戏（将一堆豆子分成不同大小的两堆）的前25万个尼姆值时开始露头的. 这个稀疏空间与上文提到的不一样，它包含的数目所具有的特征为：其相应的二进位数在删去末位数后，含有偶数个"1"，即：

| 普通值 | 稀有值 |
|---|---|
| …0010=2 | …0000=0 |
| …0011=3 | …0001=1 |
| …0100=4 | …0110=6 |
| …0101=5 | …0111=7 |
| …1000=8 | …1010=10 |
| …1001=9 | …1011=11 |
| …………… | …………… |

前25万个格隆第游戏的尼姆值中，最大的一个为230，其中出现的稀有值仅有1 273次. 而在36 184<$n$≤250 000这一范围内，仅出现过一个稀有值$\mathcal{G}$(82 860)=108.

如果我们假定尼姆值为有界数，而稀有值一去不复返（开勒司游戏确是如此，而格隆第游戏似乎也是这种样子），则尼姆值序列最终必有周期，这是因为$\mathcal{G}(n)$的值都是从有限多个尼姆值$\mathcal{G}(n-r)$（其中$\mathcal{G}(r)$为稀有值）算出来的. 于是我们猜想，本节标题上的提问，其答案为

**是!**

## 稀疏空间要求人们快速处理

天真而幼稚的想法是，为了算出$\mathcal{G}$(250 001)，将要去做125 000次尼姆求和计算，但实际上

只要做 1 273 次尼姆加法即可求出第一个未排除的普通值，而 $\mathcal{G}(250\ 001)$ 要末就是这个值，要末是一个较小的稀有值. 现在我们继续进行计算，直到所有较小的稀有值都被排除（这种情况可能很快就会出现），或者（也有可能）把所有 125 000 尼姆和统统做完，而找到一个新的稀有值为止. 大体说来，我们希望用这种方法，在几千次运算之后就能求得 $\mathcal{G}(n)$.

我们曾经计算过博弈

**·0007，·00007，·000007**

的尼姆值结果如下：

| $m$ | 使 $\mathcal{G}(n)=m$ 的最小 $n$ 值 | | |
|---|---|---|---|
| | **·0007** | **·00007** | **·000007** |
| 1 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 8 | 10 | 12 |
| 4 | 20 | 25 | 30 |
| 8 | 75 | 95 | 115 |
| 16 | 157 | 190 | 230 |
| 32 | 508 | 437 | 530 |
| 64 | 1521 | 1257 | 1125 |
| 128 | 5894 | 3368 | 2691 |
| 256 | 22337 | 11776 | 5425 |
| 512 | 65758 | 31700 | 15858 |
| 1024 | 157185 | 85891 | 74667 |
| 表观稀疏空间 | ···11111000 | ···??? 10000 | ···11011110 |

# 显示算术周期性的游戏

如果游戏名称中含有无限多个非零代码，则尼姆值通常是无界的. 有时会表现出如同我们在讨论拉斯克尼姆时所看到的那种算术周期性. 在下面的表 10(a) 与表 10(b) 中我们将给出一切形如 $\cdot \mathbf{d}_1\dot{\mathbf{d}}_2$（$=\cdot \mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_2\mathbf{d}_2\cdots$），$\cdot \dot{\mathbf{d}}_1\dot{\mathbf{d}}_2$（$=\cdot \mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\cdots$）以及 $\mathbf{4}\cdot\dot{\mathbf{d}}_1$（$=\mathbf{4}\cdot \mathbf{d}_1\mathbf{d}_1\mathbf{d}_1\cdots$）等游戏的有关性质. 在表 10(a) 中同一位置的两个数字表示 $\cdot \mathbf{d}_1\dot{\mathbf{d}}_2$ 及 $\cdot\dot{\mathbf{d}}_1\dot{\mathbf{d}}_2$ *；也有一个数字而兼顾

* 译者注：如第二行与第三列交叉处的 $\cdot \mathbf{1}\dot{\mathbf{2}}$，$\cdot \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}$ 等.

两者的. * 星号则表示有界的尼姆值.例如

$\cdot\dot{1}$, $\cdot\dot{5}$, $\cdot1\dot{5}$, $\cdot\dot{1}\dot{5}$, $\cdot5\dot{1}$, $\cdot\dot{5}\dot{1}$, $4\cdot\dot{1}$, $4\cdot\dot{5}$ 都各有一个尼姆序列 $0.\dot{1}$;

$\cdot3\dot{1}$, $\cdot\dot{3}\dot{1}$, $\cdot3\dot{5}$, $\cdot\dot{3}\dot{5}$, $\cdot7\dot{1}$, $\cdot\dot{7}\dot{1}$, $\cdot7\dot{5}$, $\cdot\dot{7}\dot{5}$ 都各有一个尼姆序列 $0.\dot{1}\dot{2}$;

而 $\cdot\dot{0}\dot{5}$, $\cdot\dot{2}\dot{0}$, $\cdot\dot{2}\dot{1}$, $\cdot\dot{2}\dot{4}$, $\cdot\dot{2}\dot{5}$ 各有一个尼姆序列 $0.\dot{0}\dot{1}$. 所以它们可视为 $\cdot1\dot{0}\dot{7}$, $\cdot\dot{3}\dot{0}$, $\cdot3\dot{0}\dot{7}$, $\cdot\dot{5}\dot{0}$, $\cdot\dot{7}\dot{0}$ 的叔伯兄弟,而后者的别名为"她爱我"与"她不爱我"**;最后,博弈 $\cdot4\dot{1}$ 的尼姆序列为 $0.0\dot{1}12\dot{2}$.

| $d_1$ \ $d_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $4\cdot d_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | * | * | $0\dot{2}$ | $0\dot{2}$ | $0\dot{4}$ | $0\dot{5}$, * | $0\dot{2}$ | $0\dot{2}$ | * |
| 1 | * | * | $1\dot{2}$, $\dot{1}\dot{2}$ | $0\dot{2}$ | $1\dot{4}$, $\dot{1}\dot{1}$ | * | $1\dot{6}$, $\dot{1}\dot{6}$ | $1\dot{7}$ | * |
| 2 | * | * | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $2\dot{4}$, * | $2\dot{5}$, * | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ |
| 3 | * | * | $3\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $3\dot{4}$ | * | $3\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $4\cdot\dot{3}$ |
| 4 | *, $0\dot{2}$ | *, $1\dot{7}$ | $0\dot{2}$ | $1\dot{7}$ | $0\dot{2}$ | $1\dot{7}$ | $0\dot{2}$ | $1\dot{7}$ | $\dot{2}$ |
| 5 | * | * | $5\dot{2}$, $5\dot{6}$ | $5\dot{3}$, $5\dot{7}$ | $5\dot{1}$ | * | $5\dot{6}$ | $5\dot{7}$ | * |
| 6 | *, $\dot{2}$ | ?, $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ |
| 7 | * | * | $3\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $7\dot{4}$ | * | $3\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $4\cdot\dot{7}$ |

**表 10(a).** 在表 10(b)中列举的 $\cdot d_1\dot{d}_2$, $\cdot\dot{d}_1\dot{d}_2$ 及 $4\cdot\dot{d}_1$ 的索引.

表 10(a)中的记号? 表示博弈 $\cdot6\dot{1}$ 的情况不明.人们曾对它一直算到 $n=14\ 999$;它的尼姆值可能有界.

在表 10(b)中, $\cdot0\dot{2}$, $\cdot0\dot{4}$, $\cdot\dot{2}$, $\cdot2\dot{4}$ 及 $4\cdot\dot{3}$ 分别为二重尼姆、三重尼姆、通常尼姆、翻倍二重尼姆及拉斯克尼姆等游戏. ***

---

* 译者注:如表中的 $7\dot{4}$ 既表示 $\cdot7\dot{4}$,又表示 $\cdot\dot{7}\dot{4}$ 等.

** 译者注:这些取子—分割游戏都与西欧民间传说中的婚恋故事有关,故而得名.

*** 译者注:这些都是通常尼姆或其变种,详见康威的专著《数与游戏》(ONAG).

| 游戏名称 | 近亲：从兄弟 | 近亲：表兄弟 | 叔伯兄弟 | 标准形 | 尼姆序列，由𝒢(1)=1起 | p | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·02̇ | | ·02̇ ·0̇2̇<br>·06̇ ·0̇6̇<br>·42̇ ·4̇Ẇ<br>·4Q̇ ·4̇Q̇ | ·03̇ ·0̇3̇<br>·07̇ ·0̇7̇ | ·13̇<br>·1̇3̇ | 1̇1̇(+1) i.e. 0.1122331455… | 2 | 1 |
| ·04̇ | ·04̇<br>·0̇4̇ | ·007̇ | ·0137̇ | ·11337̇ | 1̇11̇(−1) i.e. 0.111222333… | 3 | 1 |
| ·05̇ | | | ·05̇ | ·117̇ | 111̇222̇(+2) i.e. 0.11122231115666… | 4 | 2 |
| ·12̇ | | | | ·12̇ | 1002̇2̇(−1) | 2 | 1 |
| ·14̇ | | | | ·14̇ | 10012̇22444̇(−4) | 7 | 1 |
| ·16̇ | | | | ·16̇ | 1002̇23̇(+2) | 3 | 2 |
| ·17̇ | | | ·4U̇· 4̇U̇<br>·41̇ | ·17̇<br>·17̇ | 112̇23̇(+2) | 3 | 2 |
| ·2̇ | | | ·23̇ ·2̇Ṡ<br>·2Ṫ ·2̇Ṫ<br>·6Ṡ ·6̇Ẋ<br>·6Ż<br>4·2̇ 4·Q̇ | ·3̇7̇<br>·37̇<br>·3̇7̇<br>·73̇<br>·7̇3̇ | 1̇(+1) | 1 | 1 |
| ·24̇ | | | ·24̇ | ·307̇ | 1̇012̇(+2) | 4 | 2 |
| ·25̇ | | | ·25̇ | ·317̇ | 121̇23454̇(+4) | 6 | 4 |
| ·32 | | | | ·32̇ ·3̇2̇<br>·36̇ ·3̇6̇<br>·72̇ ·7̇2̇<br>·76̇ ·7̇6̇ | 102̇(+1) | 1 | 1 |
| ·34̇ | | | | ·34̇ ·3̇4̇ | 1012̇32̇(+2) | 3 | 2 |
| ·52̇ | | | | ·52̇ | 1022443355 7̇688XX99xxtṪ(+8) | 12 | 8 |
| ·53̇ | | | | ·53̇ | 1122446335577 88XXT99xxtṫFFSSAffssaaV̇(+8) | 13 | 8 |
| ·54̇ | | | | ·54̇ | 10122̇241̇4(+4) | 5 | 4 |
| ·56̇ | | | | ·56̇ | 102̇2̇(+2) | 2 | 2 |
| ·57̇ | | | | ·57̇ | 112̇2̇(+2) | 2 | 2 |
| ·74̇ | | | | ·74̇ ·7̇4̇ | 1012324̇5467̇(+4) | 5 | 4 |
| ·1̇2̇ | | | | ·1̇2̇ | 1̇0̇(+1) | 2 | 1 |
| ·1̇4̇ | | | | ·1̇4̇ | 101121223̇2414466̇(+4) | 7 | 4 |
| ·1̇6̇ | | | | ·1̇6̇ | 1021̇321̇15(+2) | 3 | 2 |
| 4·3̇ | | | | 4·3̇ | 1̇241̇3(+4) | 4 | 4 |
| 4·7̇ | | | | 4·7̇ | 1̇2(+2) | 1 | 2 |

X=10, x=11, T=12, t=13, F=14, f=15, S=16, s=17, A=18, a=19, V=20.

表 10(b). 八码游戏·$d_1 \dot{d}_2$, ·$\dot{d}_1 \dot{d}_2$, 4·$\dot{d}_1$ 纲鉴*.

* 译者注：表中 Q, V, W, Z 等符号的意义请读者参考表 6(b).

# 一个非算术周期性的定理

我们已经看到一些以无限循环小数定义的八码取子—分割游戏，对充分大的 $n$，表现出算术周期性

$$\mathcal{G}(n+p)=\mathcal{G}(n)+s,\quad s>0$$

但杰克·肯荣指出，对有限八码游戏来说，这种事情不大可能会发生，现在来说明其理由.

同通常情况一样，游戏规则告诉我们，$\mathcal{G}(n)$是一些值

$$\mathcal{G}(i)\overset{*}{+}\mathcal{G}(j)$$

的局外最小值 **mex**. 此处 $i+j=n-c$，而 $c$ 为一系列有限值中之一. 如果尼姆值具有算术周期性质，则普通的和数

$$\mathcal{G}(i)+\mathcal{G}(j)$$

也只能取有限多的值，其形式为 $\lambda n+\mu$.

但我们将要说明，在满足

$$x+y=\lambda n+\mu$$

的各对 $x,y$，具有不同的尼姆和

$$x\overset{*}{+}y$$

的个数，若与 $n$ 相比，是一个很小的数目. 于是 $\mathcal{G}(n)$若同 $n$ 相比，也将是一个很小的数，这就违背了设想中的算术周期性.

与给出的通常和数 $N$ 相应的尼姆和个数，可从尼姆加法表的对角线读出(见图 13).

| 即 $N=$0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | …时, |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(N)=$1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 5 | 2 | 5 | 3 | 4 | 1 | 5 | … |

它将满足关系式

$$f(2n+1)=f(n),$$
$$f(2n)=f(n)+f(n-1).$$

由于 $n$ 与 $n-1$ 中，必有一个为奇数，于是有

$$f(N)=f(a)\text{或}f(a)+f(b)\text{，其中 }a\leqslant\frac{1}{2}N,b\leqslant\frac{1}{4}N.$$

从而有

$$f(N)\leqslant\frac{5}{4}N^{\theta}\quad(N=1,2,3,\cdots).$$

此处可以算出

$$\theta=0.694\cdots\left(\text{因有关系式}\left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}=\sigma\right),$$

和 $$\sigma=0.618\cdots(\text{因有关系式}\ \sigma^2+\sigma=1).$$

在 $N=1,2$ 的不等式证明能够成立之后，我们可以用数学归纳法证明对一切正整数 $N$，不等式均能成立：

$$\begin{aligned}f(N)&\leqslant f(a)+f(b)\\&\leqslant\frac{5}{4}\left[\left(\frac{1}{2}N\right)^{\theta}+\left(\frac{1}{4}N\right)^{\theta}\right]\\&=\frac{5}{4}(\sigma N^{\theta}+\sigma^2N^{\theta})\\&=\frac{5}{4}N^{\theta}.\end{aligned}$$

| | 得出1 | 得出1 | 得出2 | 得出1 | 得出3 | 得出2 | 得出3 | 得出1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N= | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
| N= | 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | … | |
| N= | 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 7 | … | | |
| N= | 3 | 2 | 1 | 0 | 7 | … | | | |
| N= | 4 | 5 | 6 | 7 | … | | | | |
| N= | 5 | 4 | 7 | … | | | | | |
| N= | 6 | 7 | … | | | | | | |
| N= | 7 | … | | | | | | | |

**图 13.** 从尼姆加法表的对角线读出 $f(N)$.

| 游戏名称 | 尼姆序列 | |
|---|---|---|
| ·8 | $0.\dot{0}0\dot{0}(+1)$ | 二重尼姆游戏的叔伯兄弟 |
| ·9 | 0.1000122234445666783838XXXT7T7T5F5FS… | |
| ·X | $0.\dot{0}\dot{1}$ | "她爱我"、"她不爱我"游戏的叔伯兄弟 |
| ·x ·t ·f | $\dot{0}.\dot{1}$ | "她爱我"、"她不爱我"游戏 |
| ·T | $0.\dot{0}\dot{0}(+1)$ | 二重尼姆游戏的叔伯兄弟 |
| ·F | 0.01234153215826514… | $\mathcal{G}(216)=128$. |
| ·18 | 0.10000122223444456666678838… | |
| ·19 | 0.11000022223344445556666888899XXXXTTTT77… | |
| ·1X | $0.1001\dot{2}\dot{2}(+1)$ | |
| ·1x | $0.1100\dot{2}\dot{2}(-1)$ | |
| ·1T | 0.100102222444666688833333X… | |
| ·1t | 0.11012222444466668333… | $\mathcal{G}(240)=128$. |
| ·1F | 0.1001223445667883… | |
| ·1f | 0.1102234456673885… | $\mathcal{G}(207)=128$. |
| ·38 | 0.101021010232345343456… | $\mathcal{G}(301)=128$. |
| ·39 | 0.12010120315343478… | $\mathcal{G}(164)=77$. |
| ·3X | 0.1021023453456876… | $\mathcal{G}(190)=121$. |
| ·3x | 0.1201203453456786789X… | $\mathcal{G}(206)=128$. |
| ·3T | 0.10120103234534547678… | |
| ·3t | 0.120103453426276… | 肯荣游戏：从一堆中取出一颗豆子，或 |
| ·3F | 0.102102345345768… | 者取出二颗豆子，而将剩下的豆子分成 |
| ·3f | $\dot{0}.1201\dot{2}(+3)$ | 至多三堆. |

**表 11.** 十六码游戏甚至比八码游戏更不规则.

# 某些十六码游戏

十六码游戏是指一个或多个代码 $d_k$ 能满足关系式 $8\leqslant d_k\leqslant 15$（请与表 4 对照）的游戏. 据此，某些走法将把原先的一堆分割为三堆. 这一来将导致较大的尼姆值. 杰克·肯荣已证明某些十六码游戏具有算术周期性质，其中包括·3f(f=15)博弈，其周期为 6，跃度为 3，从而推翻了盖伊与史密斯的猜想，他们曾经认为跃度恒为 2 的乘幂. 理查德·奥斯丁找到了某些制约条件以保证游戏的算术周期性. 但一般说来，十六码游戏较诸八码游戏更不守规矩. 表 11 中举出了一

此实例，其中的记号同表 10(b)是一样的. 表中的尼姆值已给得足够多，足以使你的关于游戏性态的不成熟猜想破绽百出.

## 参考文献及进一步阅读材料

E. W. Adams and D. C. Benson, Nim-type games, Carnegie Inst. Tech., Report 13, 1956.

R. B. Austin, Impartial and Partisan Games, M. Sc. Thesis, University of Calgary, 1976.

W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter, "Mathematical Recreations and Essays", 12th edition, University of Toronto, 1974, pp. 36—40.

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapter 11.

T. R. Dawson, Fairy Chess Review(Dec. 1934)p. 94, problem 1603.

T. R. Dawson, "Caissa's Wild Roses", 1935, p. 13.

Blanche Descartes, Why are series musical? Eureka, **16**(1935)18—20; reprinted *ibid.* **27**(1964)29—31.

H. E. Dudeney, "Canterbury Puzzles", London, 1910, pp. 118, 220.

T. S. Ferguson, On sums of graph games with last player losing, Internat. J. Game Theory, **3**(1974)159—167.

Richard K. Guy and Cedric A. B. Smith, The *G*-values of various games, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52**(1956)514—526.

John C. Holladay, Cartesian products of termination games, Ann. Math. Studies, Princeton. **39**(1957)189—199.

J. C. Kenyon, Nim-like Games and the Sprague-Grundy Theory, M. Sc. Thesis, University of Calgary, 1967.

J. C. Kenyon, A Nim-like game with period 349, Universty of Calgary Math. Research Paper No. 13, Feb. 1967.

E. Lasker, "Brettspiele der Volker", Berlin, 1931, pp. 183—186.

Sam Loyd, "Cyclopedia of Tricks and Puzzles", New York, 1914, p. 232.

Thomas J. Schaefer, Self-sustaining periods in the G-series of Kayles-like games, (unpublished notes, Jan. 1977).

Fred. Schuh, "The Master Book of Mathematical Recreations"(tr. F. Göbel, ed. T. H. O' Beirne). Dover, New York, 1968, Chapters VI, XII.

Neil Y. Wilson, A number problem, Proc. Edinburgh Math. Soc., Vol. II, Part 4(Nov. 1959) 11—14.

# 第5章

# 数,拧数以及不大像数的怪物

好朋友我会有,但依靠的不是其数量,而重在选择.

——阿伯拉罕·考莱,《我自己》

对数量而言,我是没有限制的.

—— 查理·亨伦莱·威廉斯勋爵,《摹拟战争的民歌》

## 骨牌游戏*

果朗·安德逊(Goran Anderson)曾研究过此种游戏,其别名是"交叉填塞"或"骨牌"游戏.左、右两位局中人在棋盘**上轮流放置骨牌,左方只能直放(南北方向放置),而右方只能横摆(东

---

* 译者注:原文 Domineering 的意思为飞扬跋扈,盛气凌人.局中人通过横梗或直阻,放置骨牌,以迫使对方就范,故可意译为"梗阻".实际即是一种骨牌游戏.

** 译者注:一般指标准的国际象棋 8×8 正方形棋盘,并打好了黑、白格子.

西方向放置）. 每只骨牌必须正好覆盖棋盘上的两个方格，不准重叠，如果某一方在轮到他走时，棋盘上已经放不下一只骨牌，那他便是输家.

游戏进行了一段时间以后，可以活动的空间已经被分割为若干互相不连通的区域，而全局性博弈之值即可视为相应的子博弈值之和. 在图 2 中我们已经标明了五格及五格以下的各个区

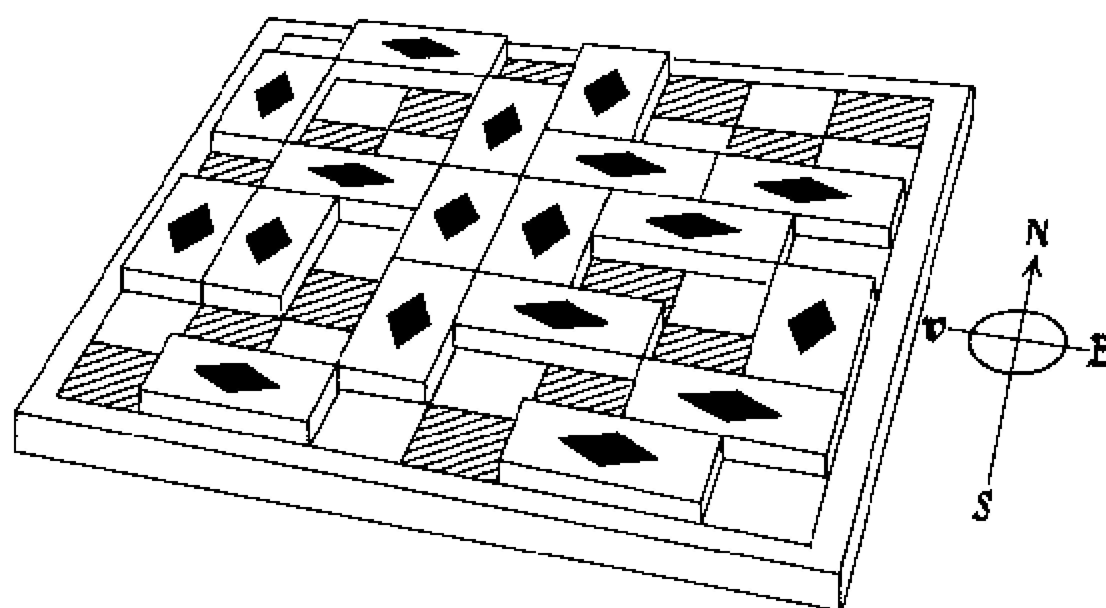



图 1. 骨牌游戏.

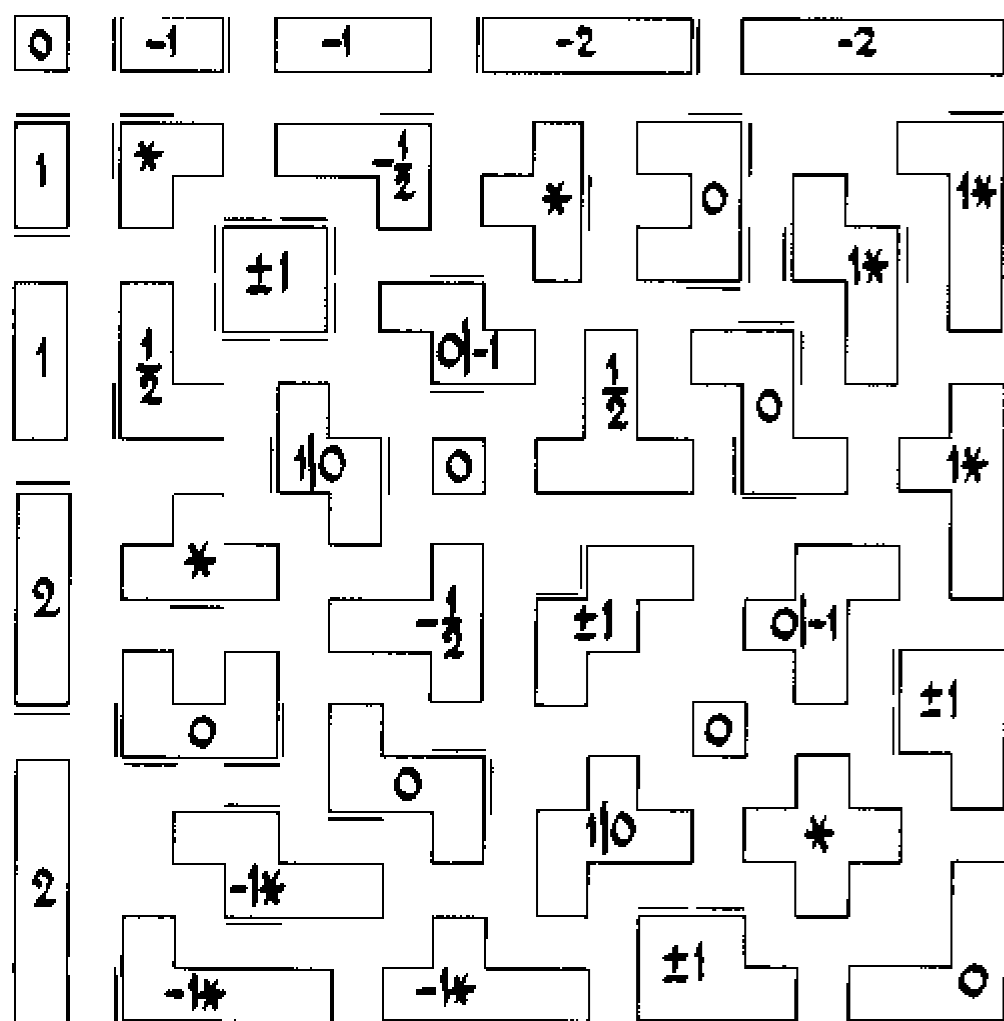



图 2. 骨牌游戏中各种局势的值.

域之值. 在图中标出记号的任意一个边上可以添加一个方格[*]而不影响区域的值. 另外一些区域的值请参看本章增补材料.

我们将进而讨论其中几个有趣的局势:

$$= \{0|0\} = *$$

$$= \{-1, 0|1\} = \frac{1}{2}$$

它们的值是我们已熟悉的两位老朋友. 但是我们也能看到某些新出现的博弈值:

$$= \{1|-1\}$$

$$= \{1|0\}$$

我们怎样来记录它们呢?

## 转换游戏[**]

对局势$\{x|y\}$而言(其中$x$, $y$为数,而且$x \geqslant y$),每个局中人都想先走,因为他宁愿看到自己的行动所造成的后果而不是对方的. 尽管这一特征在实际生活的游戏中带有普遍性,我们还是想在经过谨慎挑选的例题中力求避免. 这类**转换值**同普通的数相比,情况又将如何呢? 作为一

---

* 译者注:指图上有一短划的地方.

** 译者注:转换游戏是本书的又一个重点. 原文为 Switch,但此处当然不能译为"开关"或与之类似的字眼. 鉴于此种游戏与围棋术语中的"转换"有微妙的相通之处,故而采用"转换"一词.

个有趣的例子，让我们来看 $=\left\{2\middle|-\frac{1}{2}\right\}$，这时，左方的最佳行动当然是走到 $+$ $=2$，而右方的行动是走到局势 ，其值为 $-\frac{1}{2}$，即局势 $=\frac{1}{2}$ 之负.

若 $z$ 是一个数，则左方由 $\left\{2\middle|-\frac{1}{2}\right\}-z$ 出发的最佳行动是走到 $2-z$，故而仅当 $z\leqslant 2$ 时他才能赢. 而右方的最佳行动是走到 $-\frac{1}{2}-z$，此时仅当 $z\geqslant -\frac{1}{2}$ 时，他才能取胜. 于是我们可得出以下的结论：

若 $z>2$， 则 $z>\left\{2\middle|-\frac{1}{2}\right\}$；

若 $z<-\frac{1}{2}$， 则 $z<\left\{2\middle|-\frac{1}{2}\right\}$；

若 $-\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 2$， 则 $z \parallel \left\{2\middle|-\frac{1}{2}\right\}$.

如图3所示.

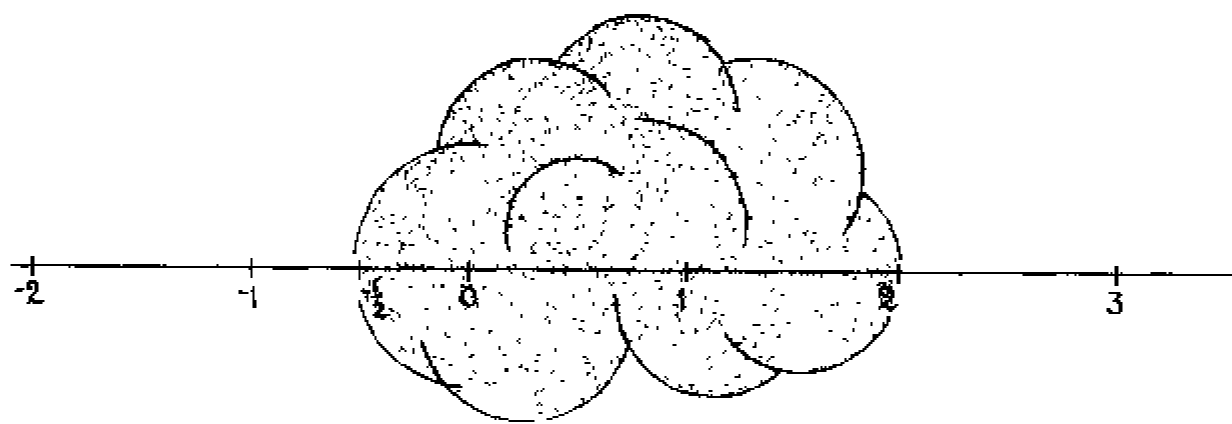



**图3.** $=\left\{2\middle|-\frac{1}{2}\right\}$ 究竟躲藏在哪里？

更一般地：

> 若 $x$，$y$ 为数，而且 $x\geqslant y$，则对任意的数 $z$：
>
> $z>x$ 蕴涵 $z>\{x|y\}$；
>
> $z<y$ 蕴含 $z<\{x|y\}$；
>
> $y\leqslant z\leqslant x$ 蕴含 $z \parallel \{x|y\}$.

**比较数与转换的大小**

# 支票兑现

图 4 给出了图 1 骨牌游戏的几个可以放置骨牌的区域,并附带指明了它们的博弈值.哪一方将能获胜呢?

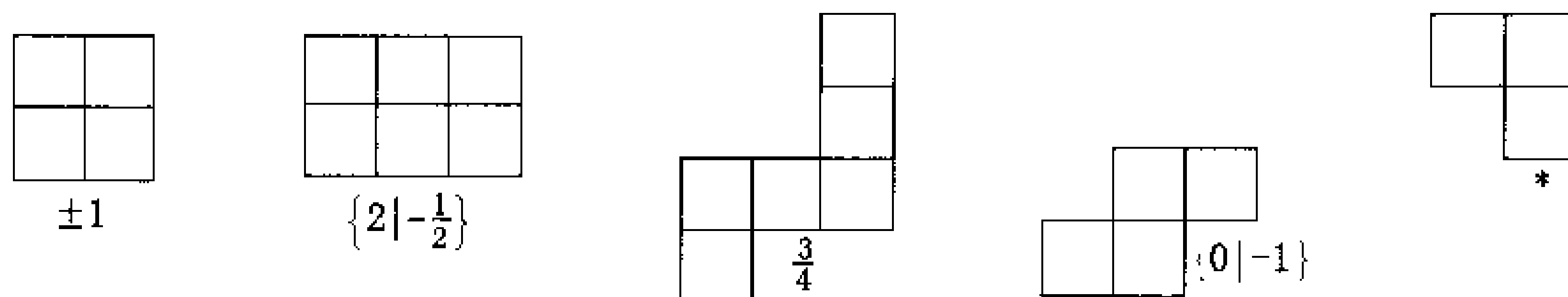



**图 4.** 图 1 中几个可利用的区域.

更一般地说,我们将怎样处理任何博弈值之和,它们中间有的可能是数 $z$,而有的则可能是转换 $\{x|y\}$? 就特殊情况而言,我们要问:博弈 $\{x|y\}+z$ 将有什么样的结果? 人们也许能猜到这个问题的答案:

> 若 $x$、$y$、$z$ 为数,而 $x\geqslant y$,则每个局中人都将宁愿在 $\{x|y\}$ 中采取行动,而不是在 $z$ 中行动.如用记号表示,即
>
> $$\{x|y\}+z=\{x+z|y+z\}.$$

**数与转换的相加**

这也容易证明.因为 $\{x|y\}$ 将小于严格大于 $x$ 的任一数,左方的其他选择 $\{x|y\}+z^L$ 将要小于比 $x+z^L$ 大的任一数,从而将小于他的合理选择 $x+z$.例如,我们有

$$\left\{2\left|-\frac{1}{2}\right.\right\}+5=\left\{7\left|4\frac{1}{2}\right.\right\},\left\{2\left|-\frac{1}{2}\right.\right\}-\frac{3}{4}=\left\{1\frac{1}{4}\left|-1\frac{1}{4}\right.\right\}.$$

我们将利用这一原理消除由 $\{x|y\}$ 这类值所引起的偏差:

> 若 $x$,$y$ 为数,而且 $x\geqslant y$,则 $\{x|y\}=u+\{v|-v\}=u\pm v$,其中 $u=\frac{1}{2}(x+y)$,$v=\frac{1}{2}(x-y)$.

**转换的集中化**

于是,这些项的和最终可以化为形如 $\{v|-v\}$ 的各项($v$ 取不同的数值)与一个普通数目的

和，而我们将用 $\pm v$ 来表示 $\{v|\quad v\}$，一般地，将用

$$z\pm a\pm b\pm c\pm\cdots$$

来代表

$$z+\{a|-a\}+\{b|-b\}+\{c|-c\}+\cdots.$$

我们可以将值 $\pm v$ 看作能兑现 $v$ 步的一张支票，以便偿付给持票人，而通常的数目则表示左、右双方在银行里存款余额之差.

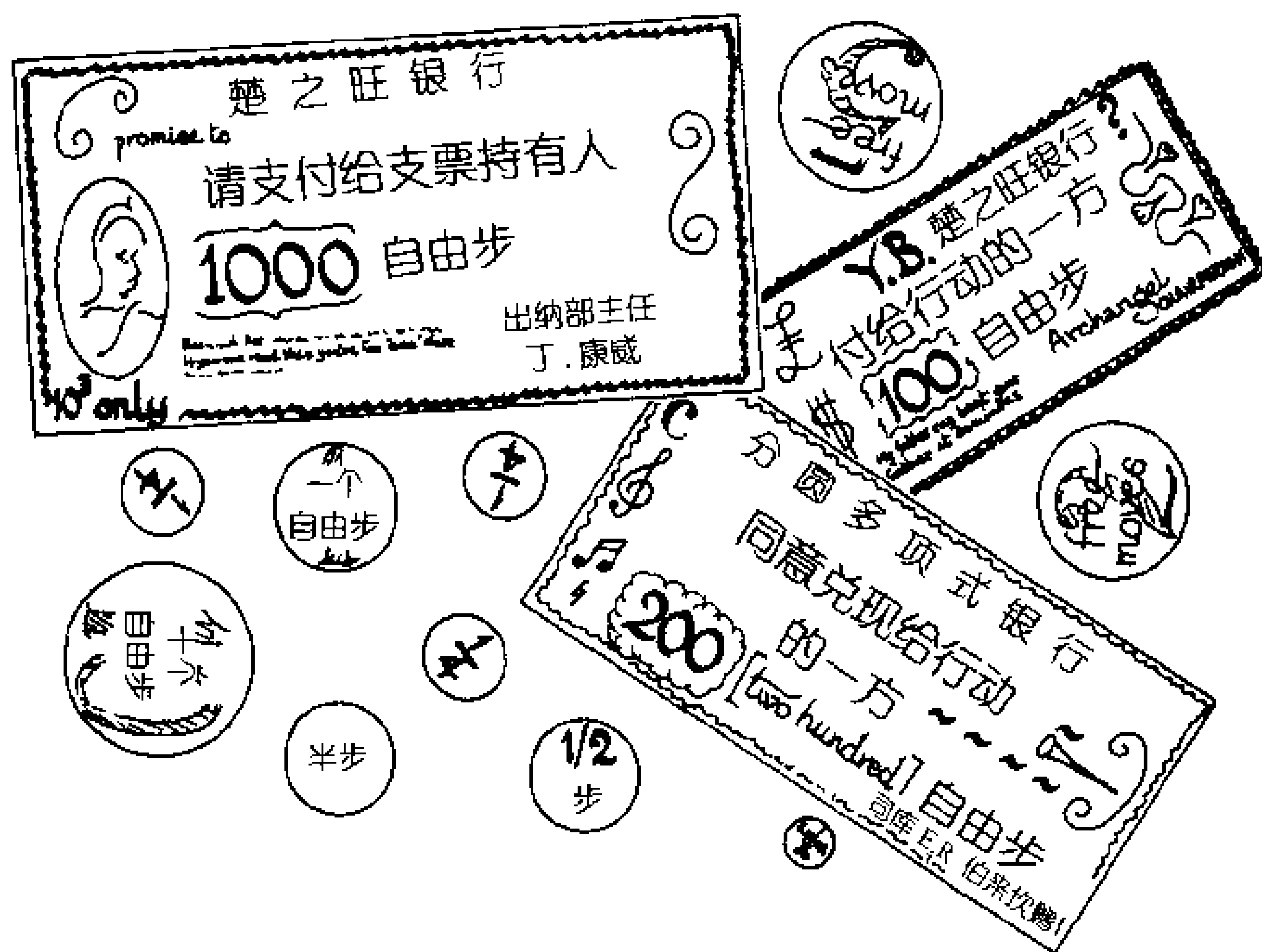



**图 5.** 准备兑现的支票.*

在**支票兑现**游戏中，每位局中人开始时手头都有点钱，桌上还有一些支票(或硬币)，金额有多有少，已经开好. 局中人轮流地拿走支票，游戏结束时，谁拥有的总金额较多，谁就是赢家. 如果钱数相等，那么最后兑现一张支票的算赢.

对于此种游戏，世上稍懂事理的读者不会有任何困难. 显然，先走者会攫取最大的金额，而其对手则把次大的金额赶快抢到手，这样一直下去，直到最后，为争夺角、分等零钱而斤斤计较. 于是博弈

---

* 译者注：此图极为幽默.

$$z \pm a \pm b \pm c \pm \cdots (a \geqslant b \geqslant c \cdots \geqslant 0)$$

若由左方先走，将立即变成

$$z - a - b + c \quad \cdots;$$

而在右方先走时，立即变成

$$z - a + b - c + \cdots.$$

另外，我们也能说出下一步该轮到谁走，因为迄今所走的步数仅不过是形如 $\pm v$ 的项的总数. 懂得这一点之后，就能判定在任何特定情况下哪一方能赢.

在应用此种方法以前，没有必要把转换 $\{x|y\}$ 统统化成 $u \pm v$ 的形式. 由于 $v$ 的值等于 $\frac{1}{2}(x-y)$，我们将称之为转换 $\{x|y\}$ 的**热度**[×]，于是，所采取的策略十分简单，它仅不过是：

> 在处理所有的转换 $\{x|y\}$ 之和时（可能同时还有通常的数要参与），应首先在具有最大热度 $\frac{1}{2}(x-y)$ 的转换 $\{x|y\}$ 中采取行动. 当这些行动全部结束，局面平静下来之后，结果将得出一个数，它能告诉我们谁是赢家. 当此数为零时，胜负结果取决于轮到谁走.

**处理转换时所奉行的"热度"方针**

图 4 中的值，可按热度递减顺序排列如下，普通的数排在最后：

$$\left\{2 \middle| -\frac{1}{2}\right\}, \{1|-1\}, \{0|-1\}, \{0|0\}, \frac{3}{4}.$$

故若左方先走，经四步后可得出数

$$2-1+0+0+\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}.$$

若右方先走，则经过对抗的四步后将导致

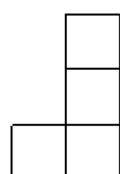
$$-\frac{1}{2}+1-1+0+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

由于以上两数都是正数，所以不管谁先走，左方总是能赢.

---

× 译者注：在新闻报道及其他场合，常提到"热点"、"热门"、"集邮热"等等. 此处的 temperature 即有这种意思，故而译成"热度".

但若左方技术拙劣,走出了"大恶手"*,在左下角采取了行动,以致把值为$\frac{3}{4}$的区域变成了



(值为$\frac{1}{2}$).我们要问,如果左方不再犯其他错误,右方能赢吗?答案是否定的,尽管此时右方处境较为顺利,经四步后,最后得出的博弈值为 0 而不是$\frac{1}{4}$,但他还是要输,因为此时要轮到他走.如果左方的第一步是在中走了右上角,造成第二个(值为±1),情况又将如何呢?

## 一些简单的热点博弈

我们刚才讨论过的一类局势是双方都急于采取行动的,自然就成为刺激比赛的热点,所以可称为热点博弈.例如±1 可算是热的,但是±1000 却比它热得更多,好比有 1000℃的高温.在图 6 中出现了一些新的热点局势.它们都具有$\{x|y*\}$,$\{x*|y\}$,$\{x*|y*\}$等形式,其中$x \geqslant y$.我们以前讲过的,处理普通$\{x|y\}$的热度方针也可适用于这些带有星号的转换:请记住,我们仍然在有着最大热度$\frac{1}{2}(x-y)$的博弈中采取行动,但在两个博弈具有同等热度时需要审慎处理.

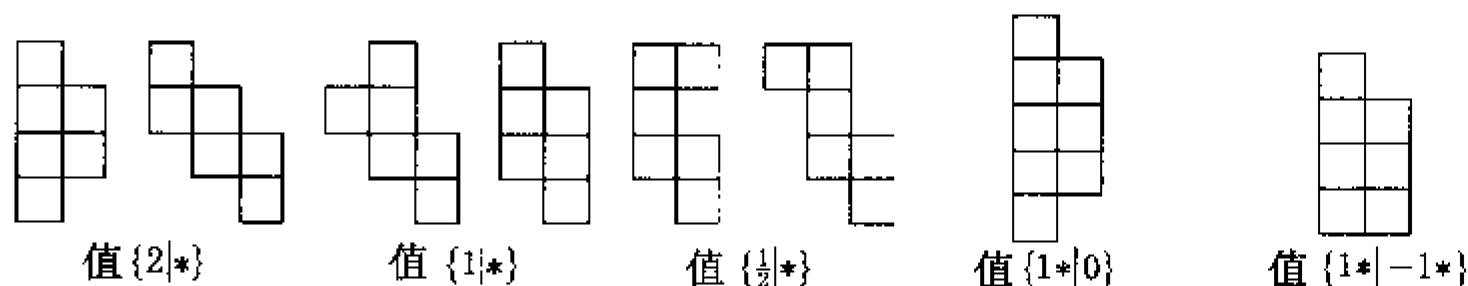



**图 6.** 带有星号的转换热度.

我们有以下恒等式:

$$\{x|y\}+*=\{x*|y*\},(x \geqslant y);$$
$$\{x|y*\}+*=\{x*|y\},(x>y).$$

* 译者注:此处借用了围棋术语.事实上转换游戏与围棋进入残局"收官"阶段时的情况极其类似.

于是,图 5 中最后哪个区域的值可以写成几种形式:

$$=\{1*|-1*\}=\pm(1*)=\pm1+*=\pm1*.$$

## 微不足道的博弈

易知下列局势的值为

$$=\left\{0,\quad\{2|0\}\ \middle|\ \{0|-2\},\left\{\tfrac{1}{2}\middle|-2\right\}\right\}.$$

避开了左方的可逆转走法以及省略了右方被优超的走法之后,它可以简化为

$$\{0|\{0|-2\}\}.$$

这就表明,此值虽然是正的,却是极其微小,甚至要比↑小得多,于是我们将把它记为$+_2$,并称之为"睇你二"(小二)*. 一般地说,有着一类"睇你 $x$"博弈,即

$$+_x=\{0|\{0|-x\}\}.$$

当 $x$ 变大时,$+_x$ 将迅速地变小. 实际上,若 $x$,$y$ 都是数,而且 $x>y\geqslant0$,则$+_x$ 要比$+_y$ 远远小得多,以致于无论加上多少个$+_x$,其和还是要比$+_y$ 来得小. 所以$+_1$的任意倍数都将小于↑,这是由于

$$+_0=\{0|\{0|0\}\}=\{0|*\}=\uparrow.$$

至于$+_x$ 的负,那当然是

$$-_x=\{\{x|0\}|0\}.$$

---

* 译者注:"睇你"(tiny)与下文之"迷你"(miny)成为一对,前者之值为极其微小的正数,而后者是极其微小的负数,它们都不能用实数来表示. 翻译时也曾考虑用"正微子"或"负微子",但似乎也不妥. 鉴于"miny"又可译为"迷你"裙,而处处表现幽默诙谐风趣又为本书之一大特点,故最后决定采用音译.

我们将称之为“迷你 $x$”[*]！

如被加数中具有“睇你”或“迷你”，而欲求和时，我们将使用自然缩记法，例如：

$$1+_2=1+(+_2)=1+\{0|\{0|-2\}\}=\{1|\{1|-1\}\}=\{1\|\pm 1\},$$

$$\frac{1}{2}-_{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\{-_{\frac{1}{4}}\}=\frac{1}{2}+\left\{\left\{\frac{1}{4}\middle|0\right\}\middle|0\right\}=\left\{\left\{\frac{3}{4}\middle|\frac{1}{2}\right\}\middle|\frac{1}{2}\right\}.$$

## 现代理财术

睇你游戏

$$-_{500}=\{0|\{0|-500\}\}$$

可以解释为印刷精美的合同上的一段话：

> 如果左方还没有提出正式申请，则右方可以签发一项正式请求，在它正式发出之后，如果左方仍然置诸不理，不提出正式申请，则右方可以申请法院判决，迫令左方支付罚金 500 步．

这段话对右方来说，不见得能带来多大好处，其理由是，提出正式申请所花费的代价同填表不相上下．谨慎小心的分析表明，合同里的这一段话对左方还是有一点极微薄的利益，因为他在提出申请之前有着填表的权利．并不奇怪的是，这种微小利益会衰减得很快，因为如果他不履行正式申请的话，罚金将会迅速增大．

在“睇你”与“迷你”求和时，每位局中人的行为都像是竭力模仿现代精明生意人的所作所为：“开帐单雷厉风行，付钞票拖拖拉拉”，即便开张发票所花的劳动力同开张支票也差不多，现代最高明的经营方针也许是：尽量推迟每笔支付，直到罚款已经迫在眉睫．任何一笔开销都恰好在截止期到来之前一分钟付出去，于是罚款也就与之无缘．发出一份正式通知，威胁对方将面临巨额罚款，总是要比回答只有较少罚金的未付款，处理起来更带急迫性．所以，在任何玩得很巧妙的“睇你”与“迷你”求和时，博弈一般总是按值的递增顺序来完成的．数值最微不足道的“睇你”与“迷你”总是得到最优先的处理，因为此种交易同最大数额的罚金联系在一起．最后，求和的结果仅仅是取决于最大分支博弈的值的正、负号．赢家自然就是善于理财的经理人，他能保持推迟付款的最高纪录而又同罚款沾不上边．他的成功在于：他能够履行购销合同，罚款的威胁对他实际上不起作用．

---

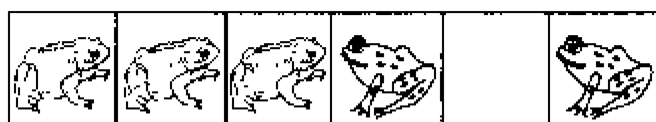
[*] 译者注：“迷你”本有极其微小的意思．例如，“迷你裙”实际上就是超短裙．总之，“睇你”，“迷你”都是本书作者铸造出来的新单词，辞典或数学手册里是根本查不出的．

# 微妙的癞蛤蟆—青蛙游戏

让我们再次回到癞蛤蟆—青蛙游戏，考虑一些局势，其中青蛙与癞蛤蟆的只数不一定要求相等，但是每个通道只能有一个空格. 所谓$(l,r)$博弈就是，初始位置为



左方有 $l$ 只癞蛤蟆，右方有 $r$ 只青蛙. 从(3,2)博弈出发，右方走出第一步而造成的局势(见下图).



其时的博弈值为一÷. 当癞蛤蟆与青蛙的只数更多时，还会产生其他的“睇你”与“迷你”值. 让我们来瞧瞧.

**死跳原理**

> 就某种局势而言，如果唯一合法的走法是“跳”，则博弈值为 0.

它正好适用在空格左面没有一只癞蛤蟆，而右面没有一只青蛙的场合. 在此种情况下第一位局中人后续的走法也必然是“跳”，而每次总是留出一个空格来让对方作出回应. 现在我们可以导出以下结论：

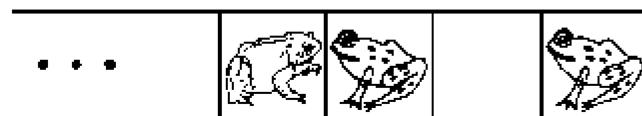
> 下列局势
>
> 
>
> 的值为－ $x$，其中 $x$ 为走了两步癞蛤蟆所得局势之值：如果只能走一步癞蛤蟆，则局势之值为$-\frac{1}{2}$(=－ 2).

图 7 对此作了说明.

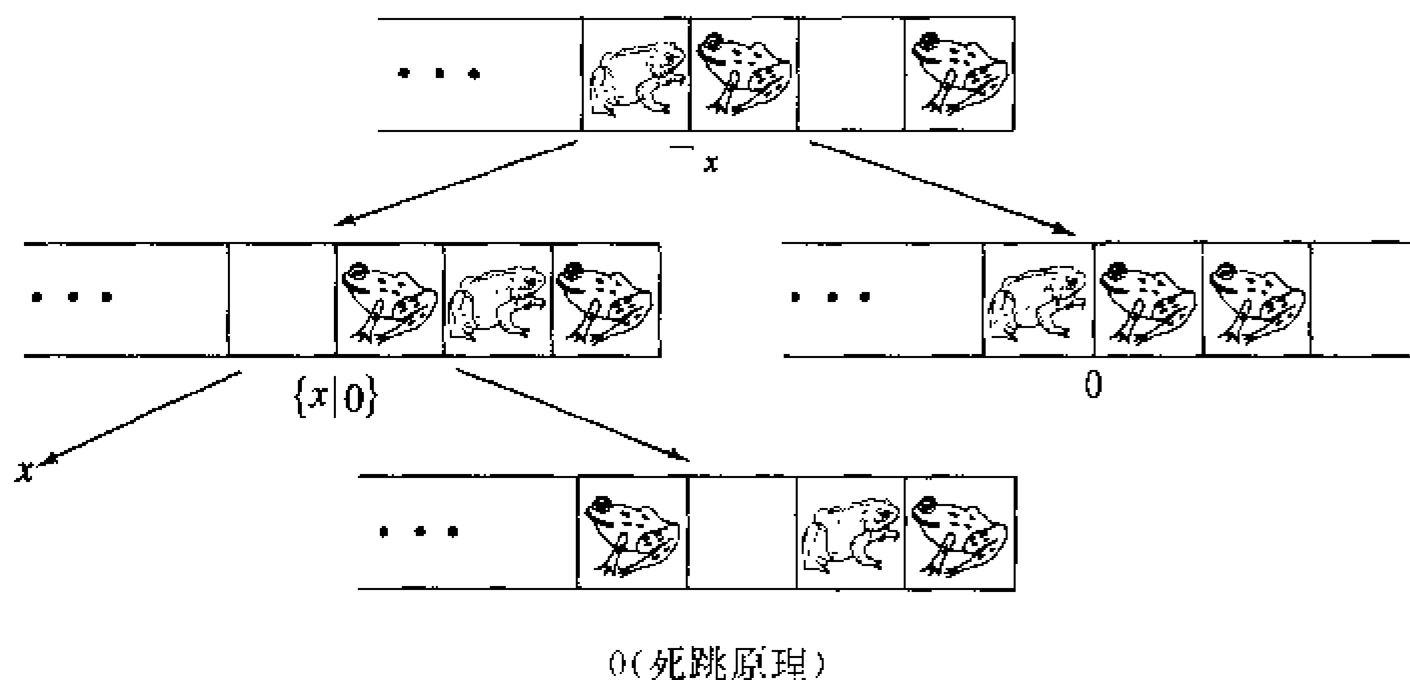



**图 7.** 迷你型癞蛤蟆—青蛙游戏.

## 癞蛤蟆—青蛙游戏开局形势解剖

我们现在能够分析只有一个空格的任何癞蛤蟆—青蛙游戏$(l,r)$的开局形势了.

平凡解：

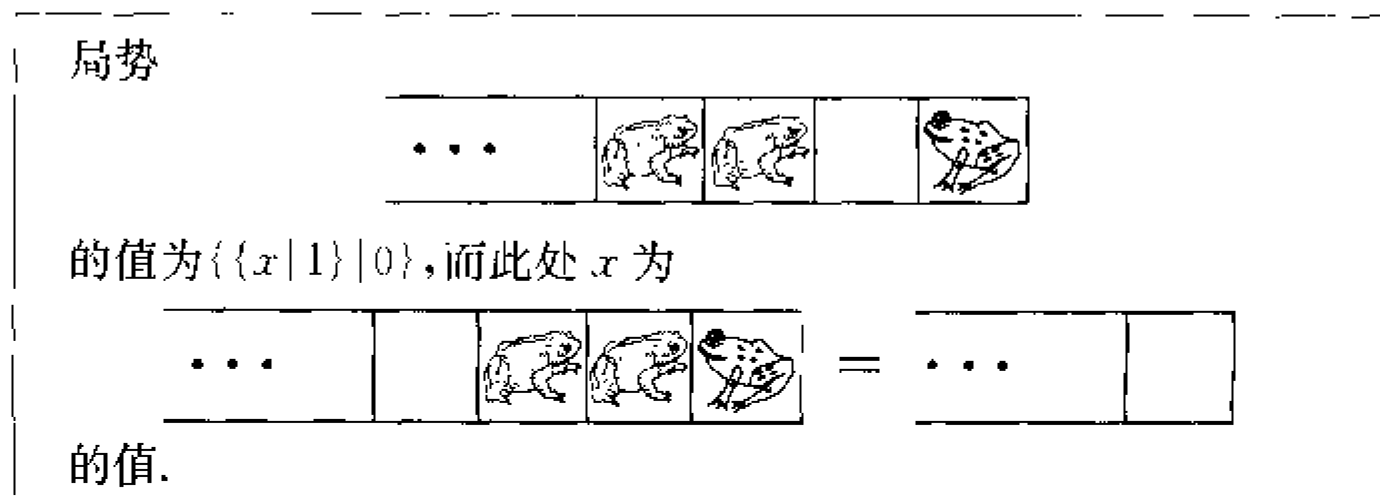
> 若 $r=0$，则博弈值为 $l$.

但

> 若 $r=1$，$l\geqslant 1$，则博弈值为$\{\{l-2|1\}|0\}$.

这一结果可以通过图 8 加以证明($l\geqslant 2$ 的情形).

实际上，该图还证明了下列更一般的结果：



局势

的值为$\{\{x|1\}|0\}$，而此处 $x$ 为

的值.

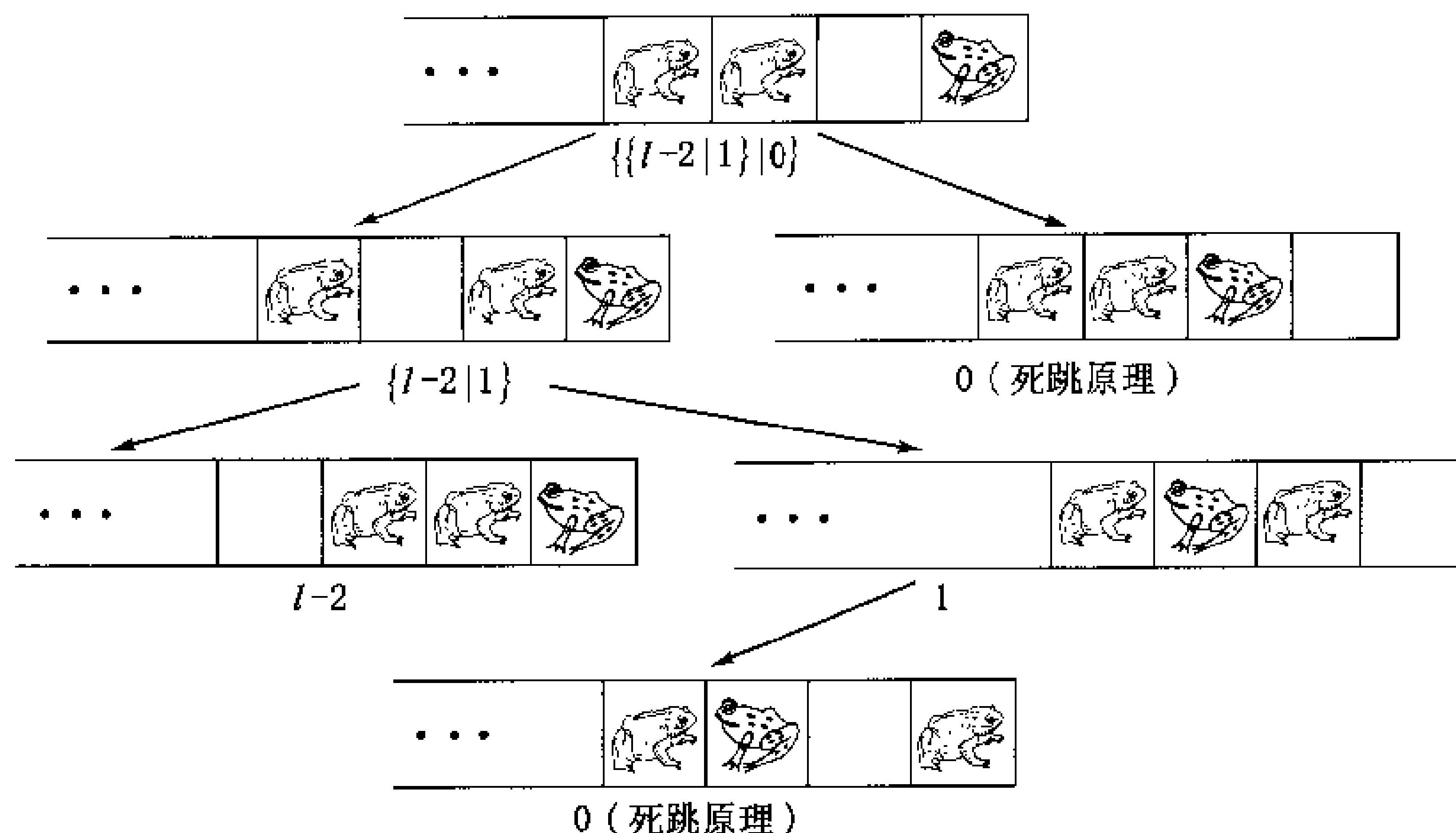



图 8. 一只孤单的青蛙面对成群癞蛤蟆.

剩下的一些开局状态则都被以下事实所覆盖：

> 若 $r\geqslant 2$，$l\geqslant 2$，则 $(l,r)$ 初始状态的博弈值为 $*$.

持怀疑态度的读者可作为第二局中人来参与下面的博弈：




如果可能的话，他应尽量去玩癞蛤蟆—青蛙这个分支博弈. 他将发现，在不多几步之后即可应用“死跳原理”.

有关各种开局的研究结论已列举于表 1 之中. 为了节省篇幅起见，我们将省略括弧，例如{1 * |0}就记为 1 * |0，如此等等. 由于 2|1|0 这种记法含有歧义，我们将引入记号 ‖，以作为 | 的一种强化形式，这样一来，2|1 ‖ 0 的意思就是指{{2|1}|0}，而 2 ‖ 1|0 的意思是指{2|{1|0}}.

表 1. 癞蛤蟆—青蛙游戏的初始值

| | $r=0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l=0$ | 0 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ | $-6$ |
| 1 | 1 | $*$ | $0 \mid -\frac{1}{2}$ | $0 \mid -1*$ | $0 \| -1 \mid -2$ | $0 \| -1 \mid -3$ | $0 \| -1 \mid -4$ |
| 2 | 2 | $\frac{1}{2}$ 0 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ |
| 3 | 3 | $1* \mid 0$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ |
| 4 | 4 | $2 \mid 1 \| 0$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ |
| 5 | 5 | $3 \mid 1 \| 0$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ |
| 6 | 6 | $4 \mid 1 \| 0$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ |

在本章增补材料中我们将要去计算其他各种形状的癞蛤蟆—青蛙游戏的博弈值. 譬如说，具有两个空格的下列局势



其值等于$\left\{\frac{1}{4} \mid \downarrow\right\}$. 对于含有这一类数值的博弈和，我们以前所讲的尽量先玩最热游戏的方针依然适用，但在几个分支博弈都具有同样热度时，作出正确选择是不容易的.

为了弄清楚这些概念，让我们来分析图 9 的癞蛤蟆—青蛙游戏. 假定轮到左方先走，为了

| | | | | | | 值 | 热度，$\frac{1}{2}(x-y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | | F | F | $* \quad -1$ | $\frac{1}{2}$ |
| | F | T | T | | F | $-\frac{1}{2} \mid -1$ | $\frac{1}{4}$ |
| T | F | T | | F | F | $0 \mid -\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| T | T | | F | F | | $\frac{1}{4} \mid \downarrow$ | $\frac{1}{8}$ |
| F | T | T | | T | F | $1,1=1*$ | 0 |
| T | | T | F | F | T | $0 \mid * = \uparrow$ | 0 |

图 9. 左方先走可赢.

帮助他起见，我们有意补充了一些博弈值（见本章增补材料），并按照热度的递降顺序来安排它们的跑道．试问，左方应采取何种行动呢？

对两位局中人来说，第一步自然不存在什么问题．左方在最热的游戏 $*\,|\,-1$ 中走到 $*$，而右方自然着眼于次热的游戏 $-\frac{1}{2}\,|\,-1$，走到 $-1$．现在左方将面临一个两难处境，这是由于接下来的两个博弈 $0\,\Big|\,-\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{4}\,\Big|\,\downarrow$ 是同等热度的．若左方在 $0\,\Big|\,-\frac{1}{4}$ 中行动而右方应之以 $\frac{1}{4}\,\Big|\,\downarrow$，值将变为

$$*-1+0+\downarrow+1*+\uparrow=0,$$

显然作为最后一个能采取行动的右方将是赢家．但当初如果左方在 $\frac{1}{4}\,\Big|\,\downarrow$ 中采取行动，而右方的回应是 $0\,\Big|\,\frac{1}{4}$，则其值将是

$$*-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1*+\uparrow=\uparrow,$$

显然是左方可赢．我们也许能猜到这一结果，因为 $\frac{1}{4}$ 与 $\downarrow$ 的差要大于 0 与 $-\frac{1}{4}$ 之差，所以值 $\frac{1}{4}\,\Big|\,\downarrow$ 实际上要比值 $0\,\Big|\,-\frac{1}{4}$ 稍为热一点，或许要把它放在前面．但是 $1\,|\,*$ 与 $0\,|\,-1$ 则难分高下，说不上哪个更热一些，因为在它们的和

$$\{1\,|\,*\}+\{0\,|\,-1\}$$

中，左方宁愿先走后者，而右方则宁取前者．

在图 10 所示的三通道癞蛤蟆-青蛙游戏中，试为每个局中人找出最佳的第一步动作：

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | T | | F | F | F | 值 0 −1 * |
| T | | F | | F | T | 值 −1 * |
| T | T | T | | T | F | 值 2\|1 |

图 10. 应采取何种最佳行动？

含有"瞇你"与"迷你"的局势也许更难处理，热度方针有时也会作出错误选择．例如在以下博弈中，若左方先走，双方都奉行热度方针：

| | | | | | | 值 | 热度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | T | T | | F | T | $\frac{1}{2}\mid 0$ | $\frac{1}{4}$ |
| T | F | T | | F | F | $0\mid -\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| T | | T | F | F | F | $+_{\frac{1}{4}}$ | 0 |
| | T | T | F | | F | $-\frac{1}{4}$ | 0 |

走两步以后，其值将是

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}++_{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=+_{\frac{1}{4}},$$

此时左方可赢. 然而，当左方开局后，若右方的回应是在

$$+_{\frac{1}{4}}=\left\{0\middle|\left\{0\middle|-\frac{1}{4}\right\}\right\}$$

中采取行动，走到 $0\left|-\frac{1}{4}\right.$的话，此时的值将会是

$$\frac{1}{2}+\left\{0\middle|-\frac{1}{4}\right\}+\left\{0\middle|-\frac{1}{4}\right\}-\frac{1}{4}.$$

再经过两步以后便成为

$$\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0,$$

此时最后采取行动的右方可以取胜. 因而我们可以认为 $-\frac{1}{4}$ 具有**潜热**，因为它有着较热的选择 $0\left|-\frac{1}{4}\right.$. 所谓“热度”方针，只是对下面这类博弈

$$x, x+*, x+\uparrow, x+*2, x+\uparrow+*$$

(其中 $x$ 可为任何数目)有效，因为这些东西都没有潜热.

## 安排男女孩子入席

让我们举办一个孩子们的宴会以庆贺本章结束. 左方专门负责安排男孩，右方安排女孩，使他们在一张圆桌前就座，见图 11 所示. 为了维持“正派”名声，任何孩子都不准与异性坐在相邻的位置上. 不论是左方还是右方，首先无法作出安排时，他就必须向气恼的家长们引咎自责.

本问题同第 2 章中曾讲过的夫妻入席问题有点类似，差异在于：局中人的行动有效地保留

# 增　补

在图 10 中，左方的唯一好着法是在第一通道中，右方的好着法则在最后一个通道.

在图 11 所示的安排男、女孩子入席问题中，左方应付不了 R5R，R4L，L3R 这种局势. 此时的博弈值将是

$$\{\pm 1,0 \mid -4\}\pm 2\pm 1.$$

倘使左方在第一分支中采取行动(在圆桌的较远一侧安排男孩就座)，则右方可以在近处的柠檬汁边座位安插一个女孩，不论男孩坐在什么位置上，右方可在远处柠檬汁对面的位置上安排一个女孩，这样就为女孩们保留了四个更多的位子.

## 癞蛤蟆—青蛙游戏的全面解剖

图 12 所表示的是来自一空格癞蛤蟆—青蛙游戏$(l,r)$的初始状态的各种走法.

每条边上都注明了下标，以表示走动的是哪一只动物，(每种动物都从初始状态由内至外加以编号)，字母顶上的声调符号(好像法文元音字母上附加的^)表示这动作是一步跳跃. 只有两种途径才能脱离图上的锯齿形主干；注明 C 的局势是死跳原理的例子，而那些标上整数

$l-2, l-3, l-4, \cdots$ 或 $2-r, 3-r, 4-r, \cdots$

的是今后只能是癞蛤蟆或青蛙才可走动的情况. 任一特殊情形下的博弈值均可求得，只要略去那些不

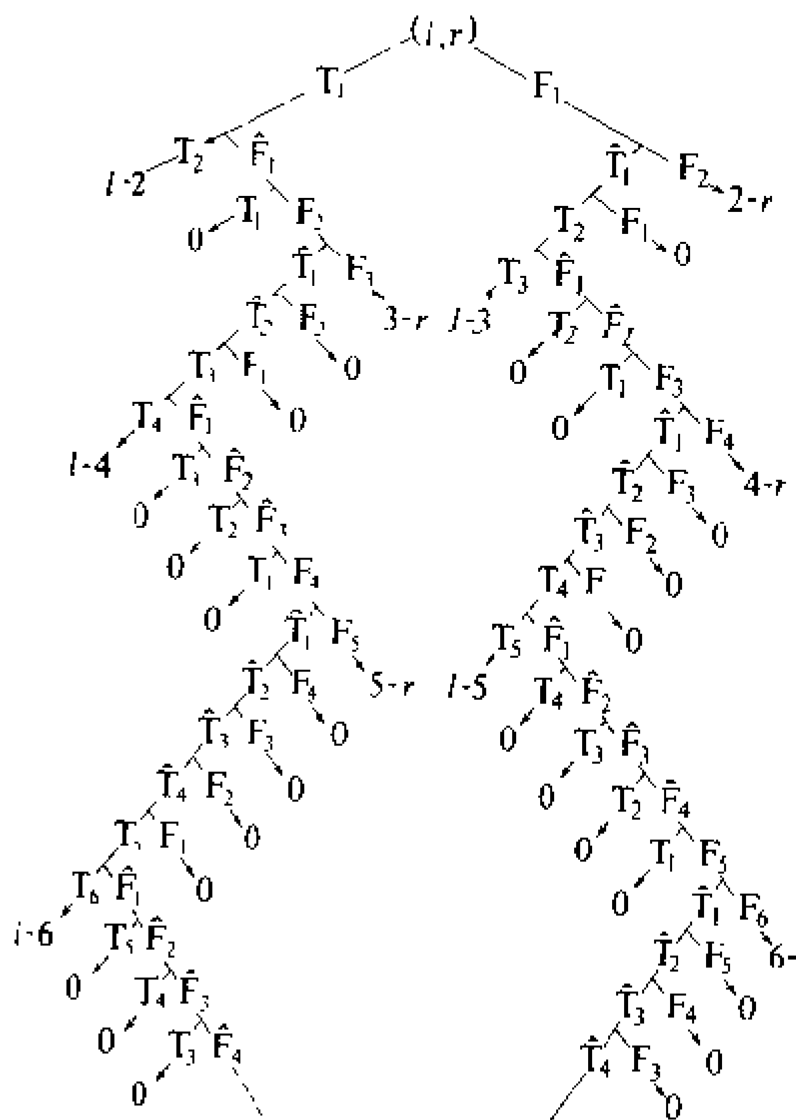



图 12. 一空格癞蛤蟆—青蛙游戏的一般分析.



存在的动物所做的行动就行. 图 13 至 16 已详细列举了$(l,r)=(2,2),(3,2),(4,2)$以及$(3,3)$等各种情形，再加上$(l,1)$(我们以前已讲过这种情形)以及它们的负博弈，我们就把七格以下(其中有一空格)的这类游戏统统列举出来了. 图中，凡是不能行动的**死动物**，我们将用小写字母来表示. 可以进一步应用"死跳原理"的局势则在它的外面打上了方框.

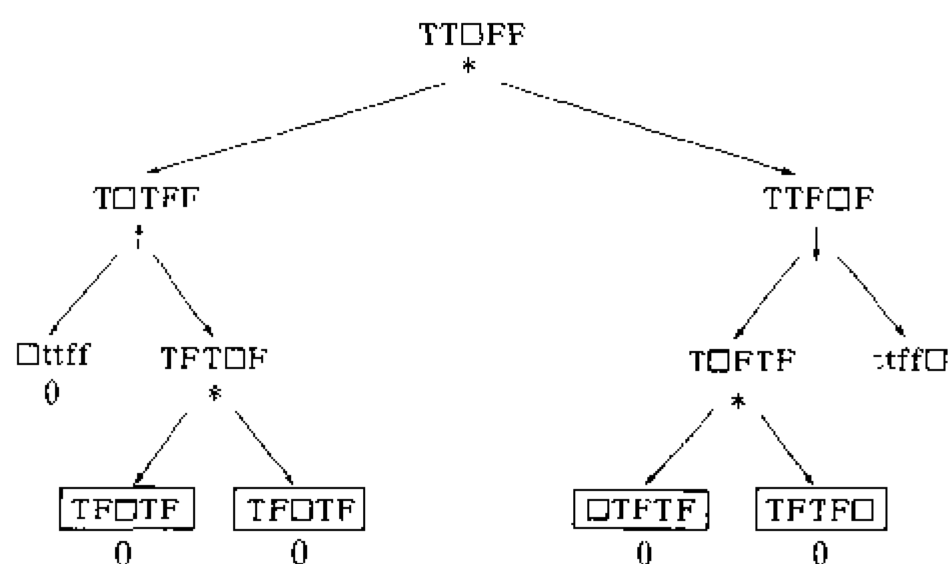


**图 13.** 王格癞蛤蟆—青蛙游戏.
(当然它是本书第 3 章图 8×的一种缩略形式.)

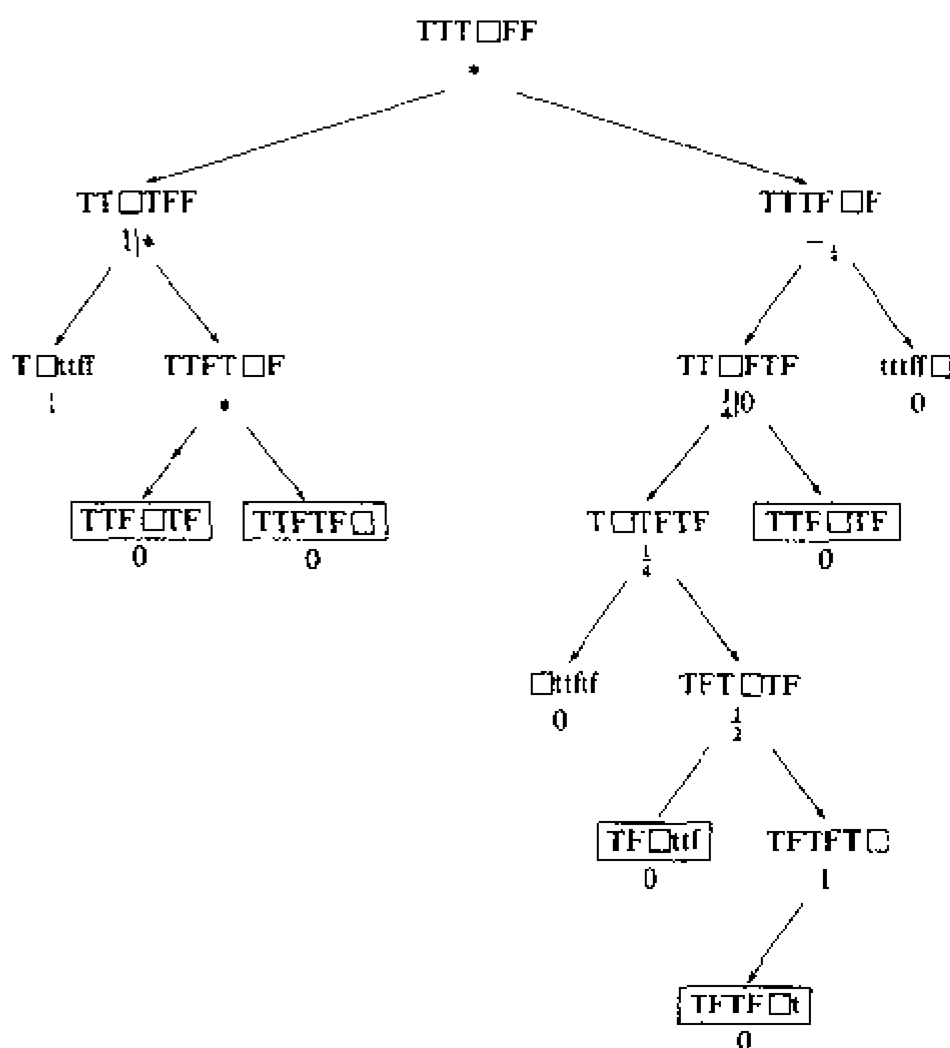


**图 14.** (3,2)癞蛤蟆—青蛙游戏.
(注意:在右方第一步行动后，博弈值$-\frac{1}{4}$的出现.)

× 译者注:见原书 65 页. 此处原文误作图 5，已代为更正.

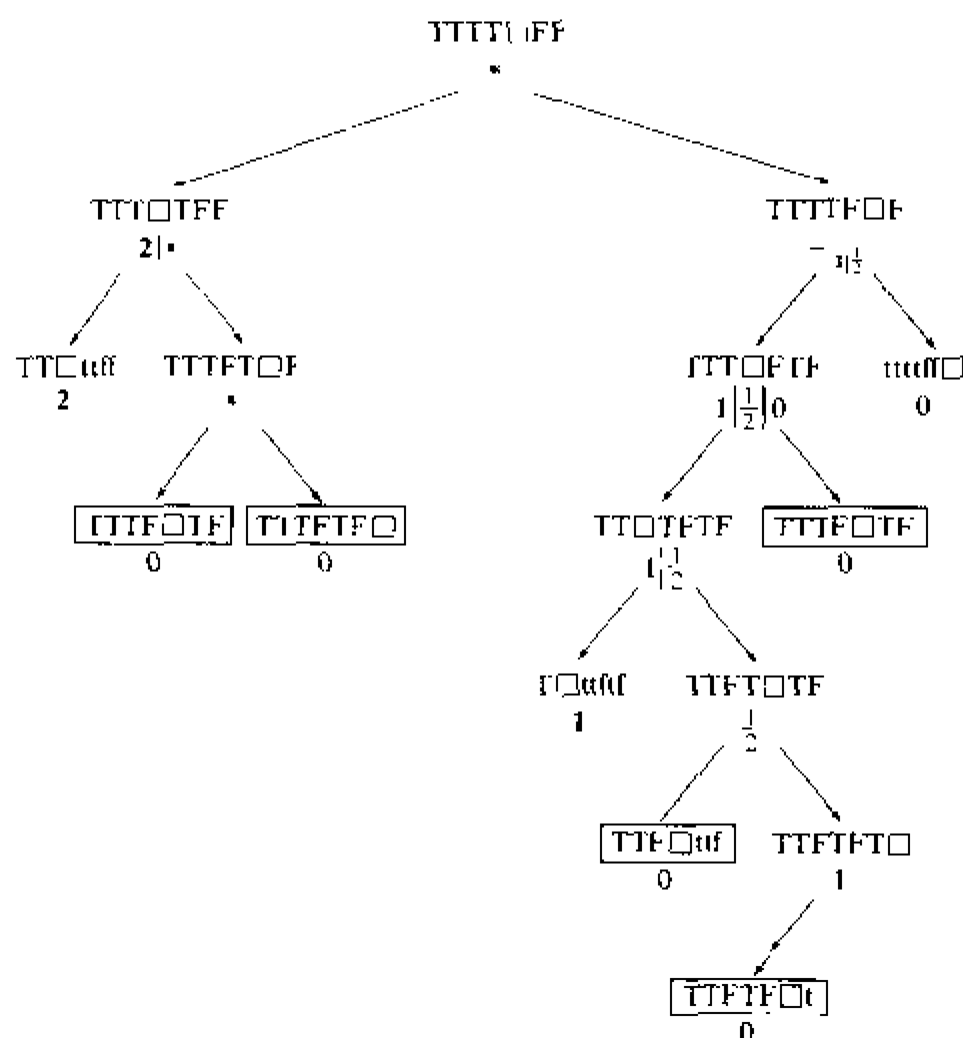



图 15. (4,2)癞蛤蟆—青蛙游戏.

（只要在图上标有粗体字 1,2 之处分别代之以 $l-2$, $l-3$ 即可得出具有较大 $l$ 值的 $(l,2)$ 癞蛤蟆—青蛙游戏的相应图解.）

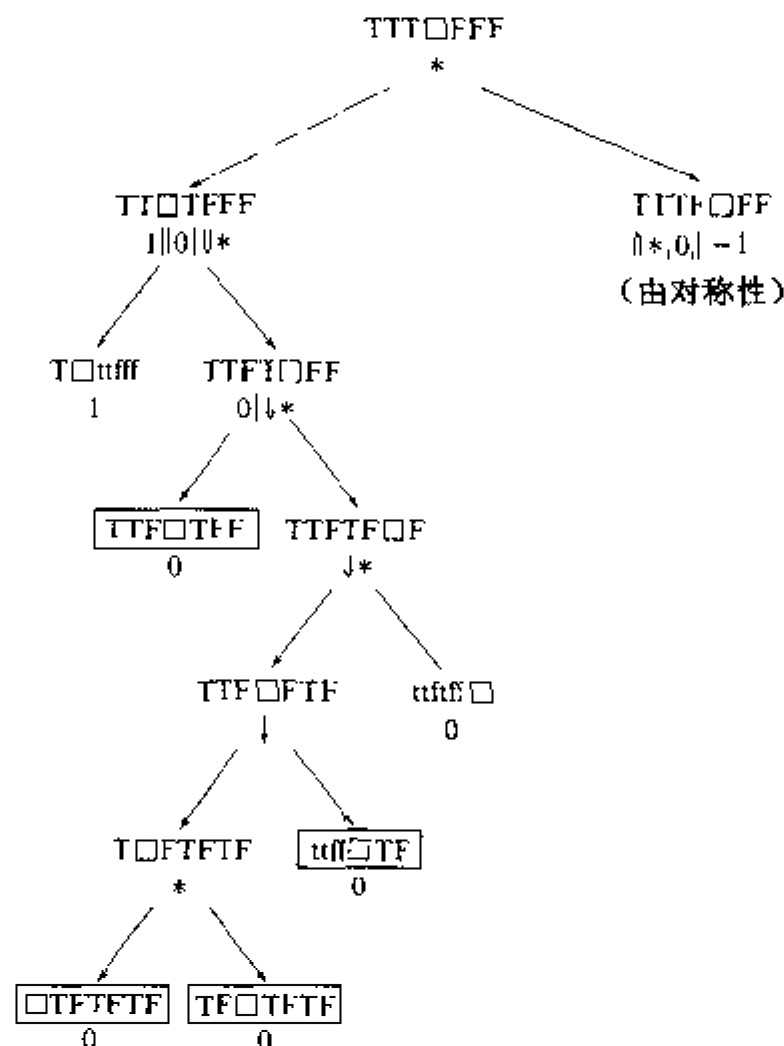



图 16. (3,3)癞蛤蟆—青蛙游戏.

（在本书第 8 章皮纳姆吃饼游戏中，值 ↑*|0 将会再次出现.）

# 有两个空格的癞蛤蟆—青蛙游戏

一般地说，人们可以来玩 $(l+c+r)$ 格癞蛤蟆—青蛙游戏，其开局状态是，左边有 $l$ 只癞蛤蟆，右边有 $r$ 只青蛙，中间由 $c$ 个空格把它们分开；我们将把它记为 $(l,r)_c$ 游戏，当 $c=1$ 时，可以略去下标. 图 17,18,19 分别给出了一跑道，二空格游戏 $(2,1)_2$, $(2,2)_2$ 以及 $(3,1)_2$ 的各种局势. 在这些附图中分别给出了可供选择的步法以及它们的值，但别处已可查出它们或其负博弈值的那些局势，例如第 1 章的图 16（$(1,1)_2$ 游戏），第 3 章的图 8（(2,2)游戏）或者本章的图 13,14,15,16，则为了节省篇幅起见，此处从略.



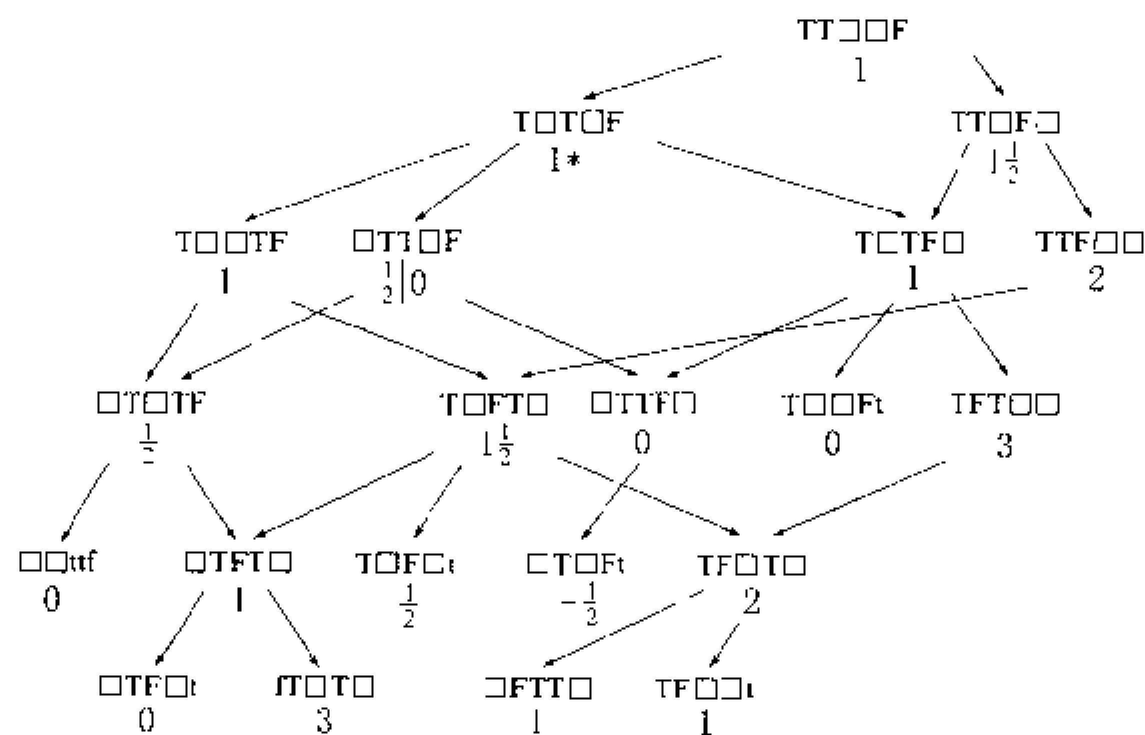


图 17. 五格癞蛤蟆—青蛙游戏$(2,1)_2$.

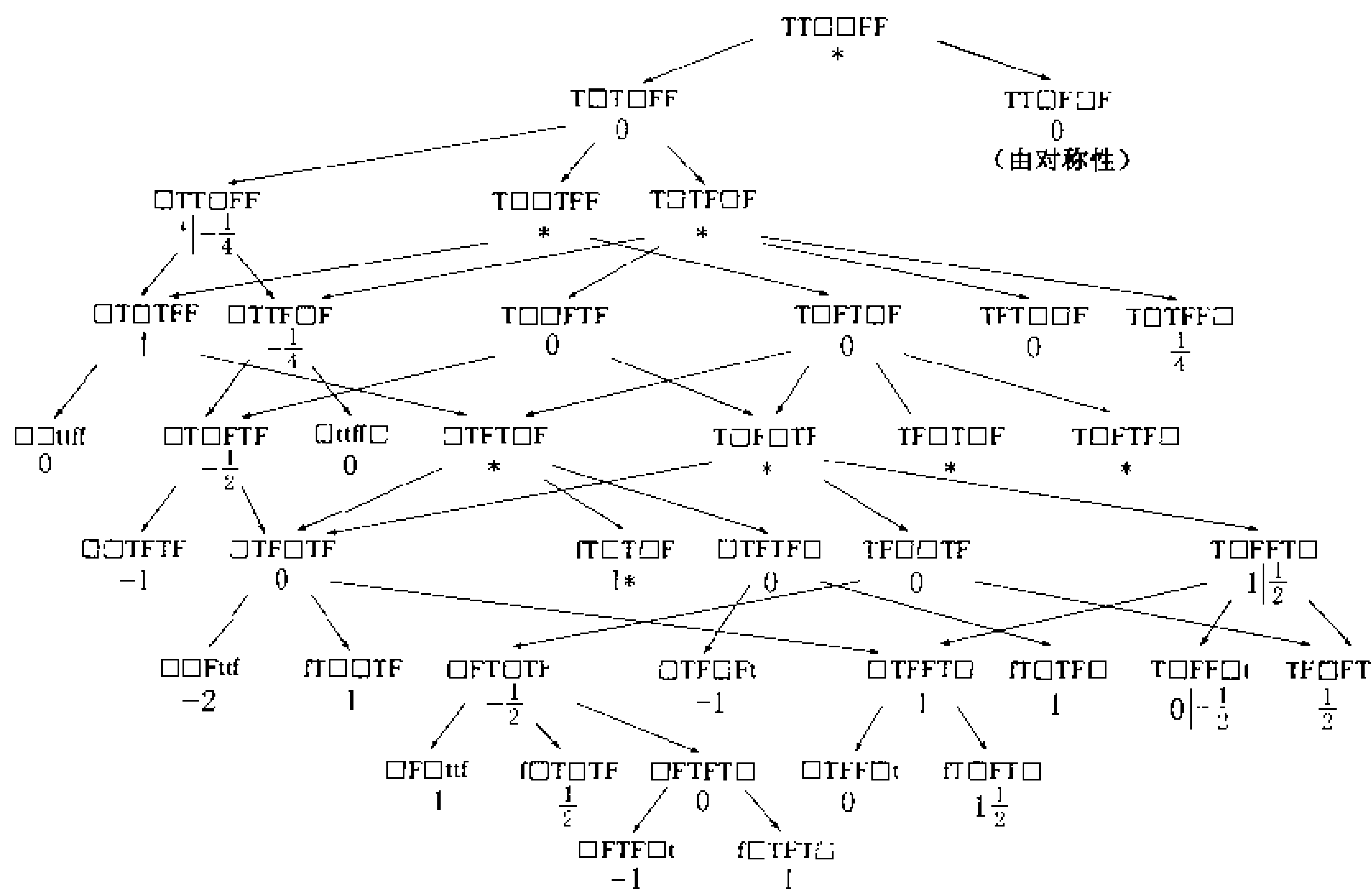



图 18. 六格癞蛤蟆—青蛙游戏$(2,2)_2$.

TTT□□F
2

TT□T□F　TTT□F□
2*　$2\frac{1}{2}$

T□TT□F　TT□□TF　TT□TF□　TTTF□□
2*|1　2　2　3

□TTT□F　T□T□TF　T□TTF□　TT□□Ft　TT□FT□　TTFT□□
1*|0　2*　1　1　$2\frac{1}{2}$　4

□TT□TF　T□□ttf　□TTTF□　T□T□Ft　T□TFT□　TT□F□t　TTF□T□
1*　2　0　1*　2　$1\frac{1}{2}$　3

□T□ttf　□TT□Ft　□TTFT□　T□TF□t　T□FTT□　TTF□□t　TFT□T□
1　$\frac{1}{2}|0$　1　1　$2\frac{1}{2}$　2　4

□TTF□t　□TFTT□　T□FT□t　TFT□□t　TF□TT□
0　2　$1\frac{1}{2}$　3　3

□TFT□t　F□TT□　□FTTT□　TF□T□t
1　4　2　2

**图 19.** 六格癞蛤蟆—青蛙游戏$(3,1)_2$.

表 3 给出了某些$(l,r)_2$ 游戏的开局状态之值,勤奋的读者或许乐于验证或推广它们的结果.

| | $r=0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l=0$ | 0 | $-2$ | $-4$ | $-6$ | $-8$ | $-10$ | $-12$ |
| 1 | 2 | 0 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | | |
| 2 | 4 | 1 | $*$ | $0\|-\frac{1}{2}$ | | | |
| 3 | 6 | 2 | $\frac{1}{2}\|0$ | $\pm\frac{1}{8}$ | | | |
| 4 | 8 | 3 | | | | | |
| 5 | 10 | | | | | | |

**表 3.** $(l,r)_2$ 癞蛤蟆—青蛙游戏中某些开局状态之值.

# 更多的骨牌游戏值

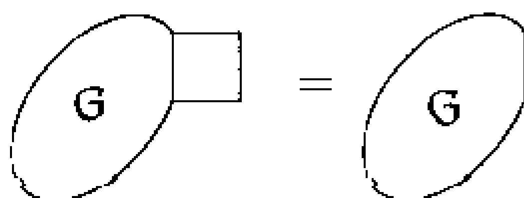
我们在图 20 及图 21 中给出了所有的六单位与七单位骨牌游戏的值,在图 22 中则给出了单

位方格更多的一些局势之值，这些结果部分取自 ONAG 一书，该书对其中某些图形作了较详细的说明. 掌握下面的一些窍门是有帮助的：

(i) 如在某一局势中，左方具有一个值为 $n$ 的走法，但不可能把 $n+1$ 个直立骨牌放进该区域，那么 $n$ 就是左方的最佳走法.

(ii) 沿垂直线切割时，区域之值不变或递增；沿水平线切割时，区域之值不变或递减.

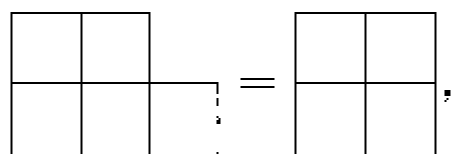
(iii) 若




则

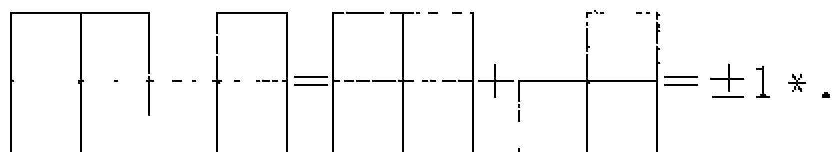



例如，由于



，

故有




在重复应用这一原理时需要小心，图 2 与图 20 中任何一处打上双线记号的地方可以添加一个单位正方形而不改变局势的值(尚有三个场合，在打上双线记号的地方可以同时添加两个单位正方形).

图 20 给出了所有 35 个 6 单位正方形区域的值；请注意，如果某一区域旋转 90°时，值要改变符号. 7 单位正方形的区域共有 108 种之多，其中有 30 个区域的值，同相应的 6 单位正方形区域的值是一模一样的. 只要在图 20 打上双线记号的地方添加一个单位正方形就可以得出来. 图 21 给出了另外 58 种 7 单位区域的值. 其他的 20 种区域，则可以通过旋转而得出，其办法是将图上标有小圆圈记号的方格，以 $\phi$ 为旋转轴而生成*.

---

* 译者注：如图 21 中的 7 单位区域 通过这种奥妙的“**局部旋转**”后，即变成下面的区域.

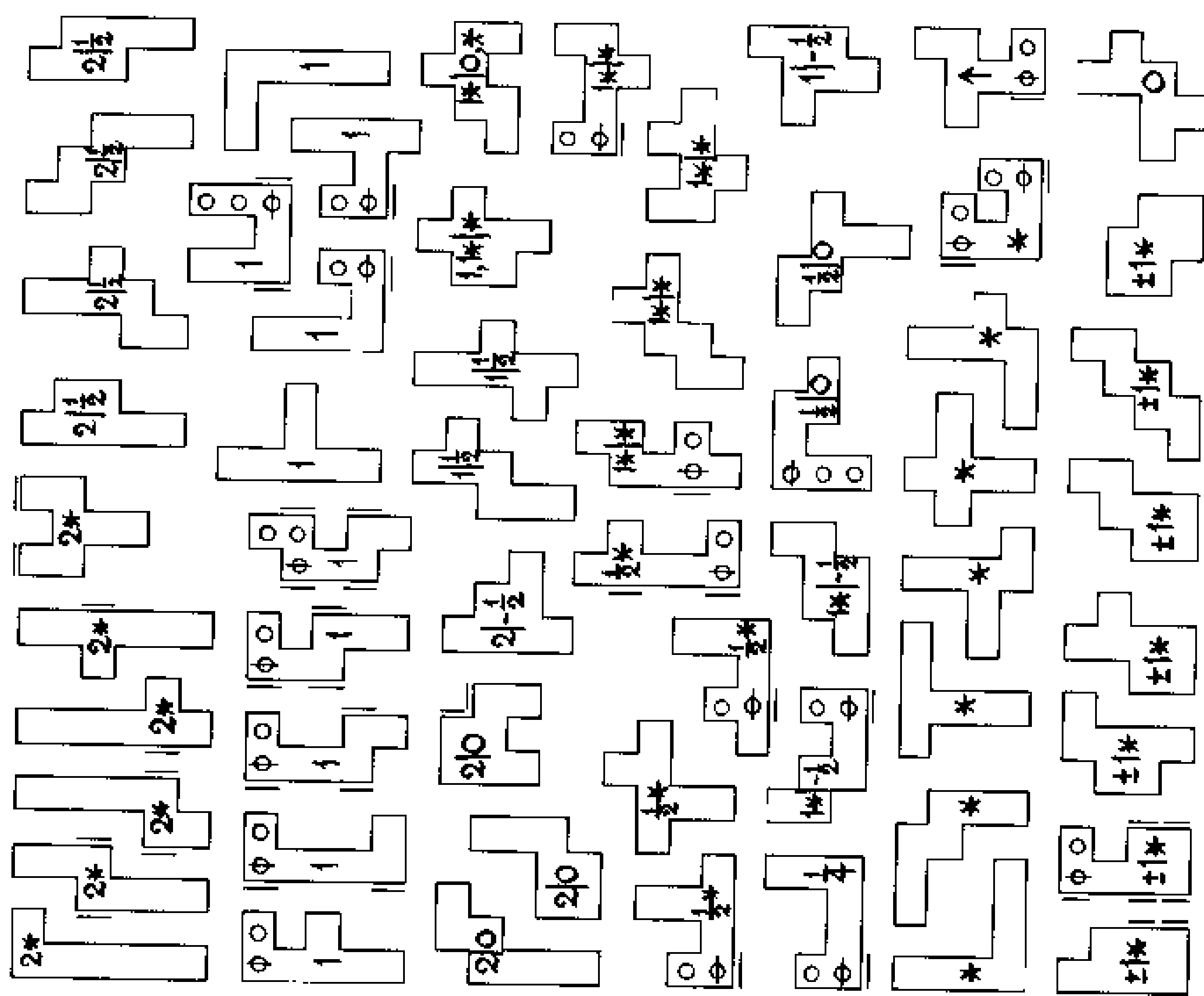


图 21. 7 单位方格区域的骨牌游戏值.

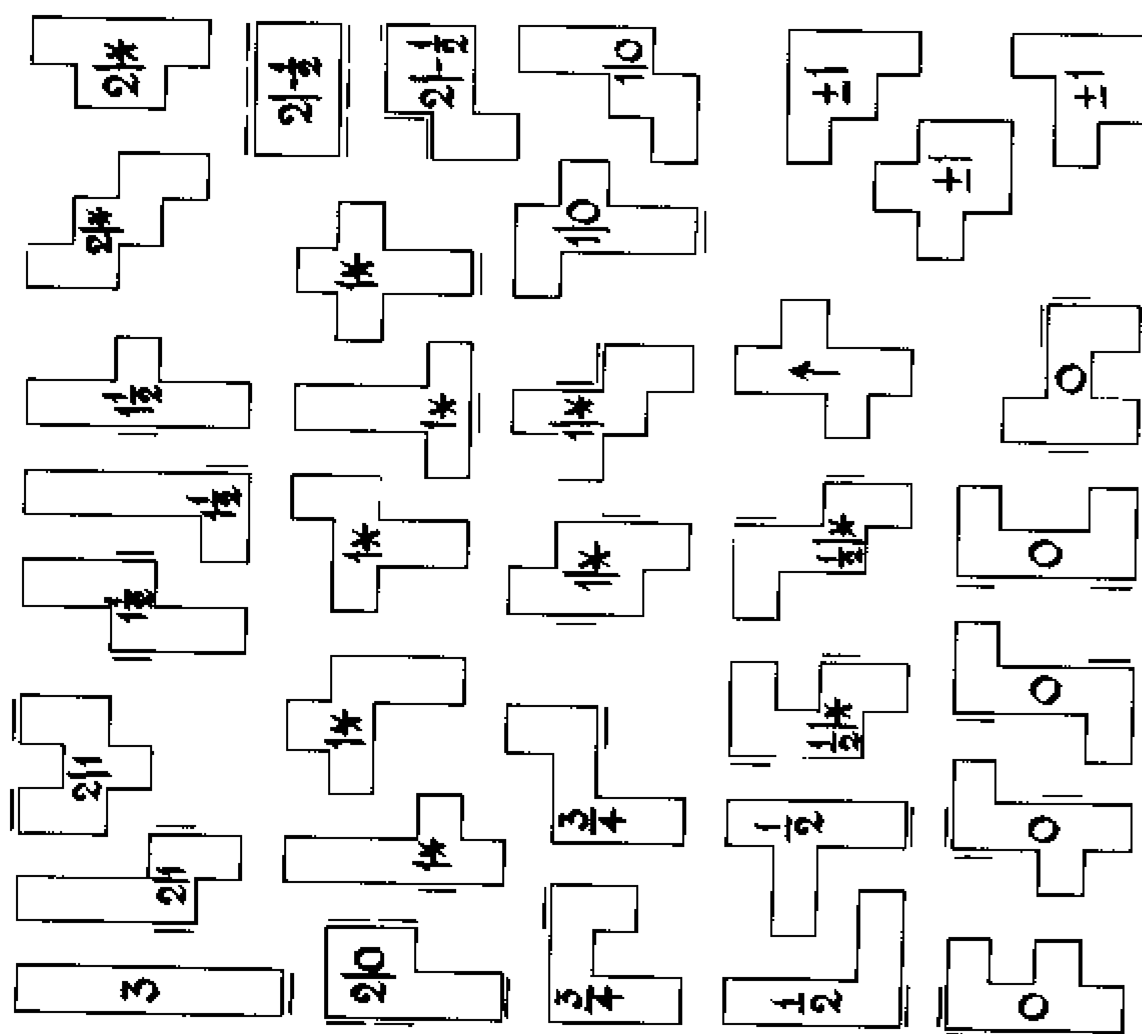


图 20. 一切 6 单位方格区域的骨牌游戏值.

表 4 则给出了 $m \times n$ 矩形骨牌游戏之值：

| $m$ \ $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $-1$ | $-1$ | $-2$ | $-2$ | 3 | $-3$ | $-4$ |
| 2 | 1 | $\pm 1$ | $2 \| -\frac{1}{2}$ | $-_2$ | $\frac{1}{2}$ | $1\|*\|1$ | $1\frac{1}{2} \| -\frac{1}{2}$ | $2-_2\|0 \| -\frac{1}{2} \| -2$ |
| 3 | 1 | $\frac{1}{2} \| -2$ | $\pm 1$ | $-1\frac{1}{2}$ | $-1$ | | | |
| 4 | 2 | $1_2$ | $1\frac{1}{2}$ | | | | | |
| 5 | 2 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | | 0 | | | |
| 6 | 3 | $1 \| 1+_2$ | | | | | | |
| 7 | 3 | $\frac{1}{2} \| -1\frac{1}{2}$ | | | | | | |
| 8 | 4 | $2 \| \frac{1}{2} \| 0 \quad -2+_2$ | | | | | | |

**表 4.** 骨牌游戏中若干矩形区域之值.

图 22 给出了 8 单位或更多单位的某些形状古怪的区域之值，而图 23 则指出了某些有趣的图形序列.

骨牌游戏的另一种变异形式是：任一局中人都可以把骨牌直摆或横摆，因而是一种无偏博弈. 我们将在第 15 章中加以讨论，其名称为"填鸭".

**图 22.** 8 或更多单位正方形的骨牌游戏之值.

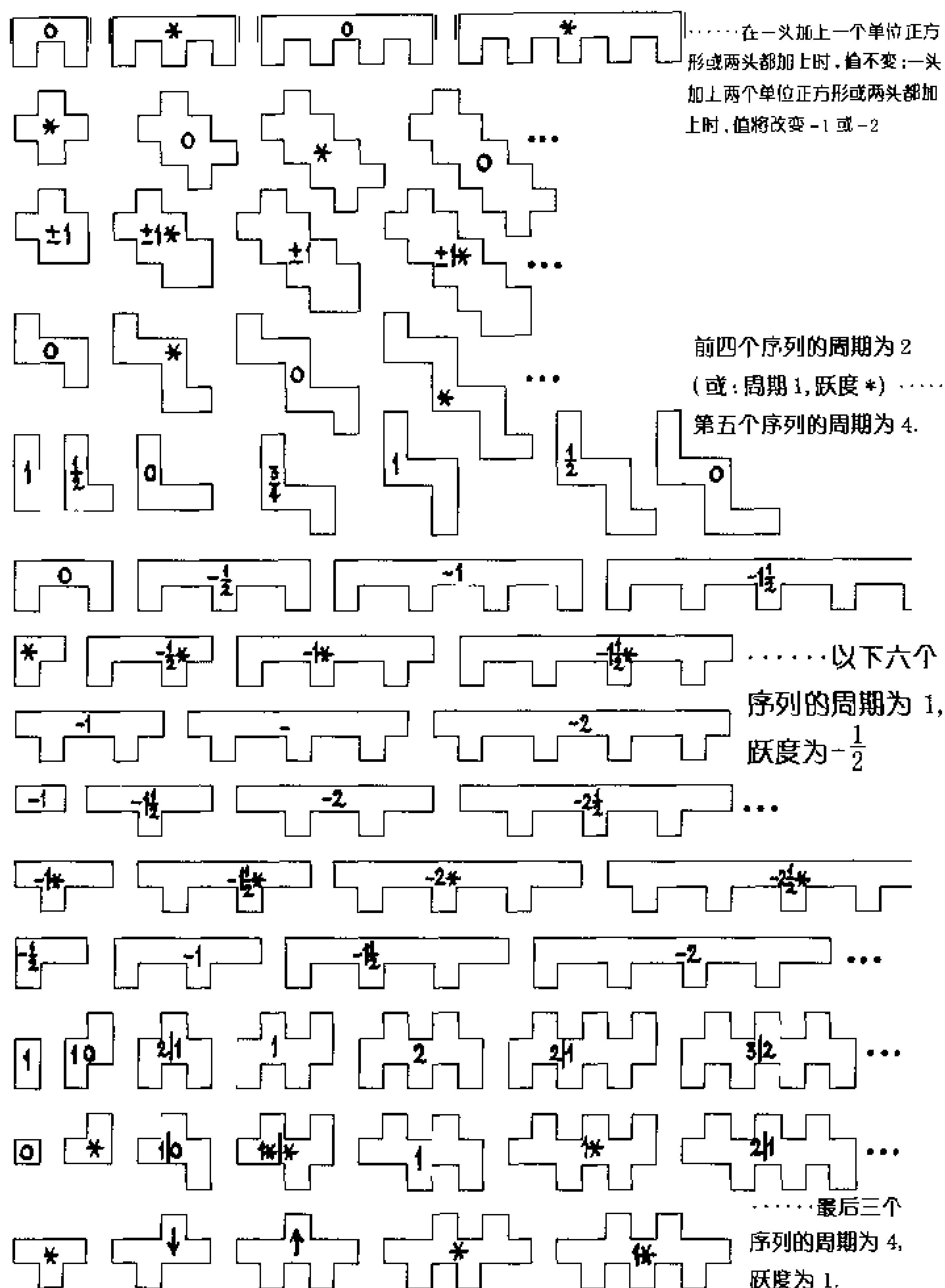



图 23. 骨牌游戏中的若干有趣序列.

## 参考文献及进一步阅读材料

J. H. Conway. "On Numbers and Games". Academic Press, London and New York, 1976. pp. 74—77, 114—121.

Martin Gardner, Mathematical Games: Cram, crosscram and quadraphage: new games having elusive winning strategies, Sci. Amer. **230** #2 (Feb. 1974) 106—108.

# 第6章

# 战役的热度

喧闹平静下来了，
战争胜负已定.*

威廉·莎士比亚,《麦克白斯》,I. i.1

……风尘仆仆,冷暖备尝.

约翰·弥尔登,《古希腊雅典的最高法官》

如果你在玩一批冷博弈的和,那么问题不大.它们的博弈值都是一些普通的数,走一步就会把它们打发一点,你只要把剩下来的值加起来,找出一个弱点最小的走法就行了.如果热点博弈是上一章所讲的"转换",但只有冷的选择,例如"支票兑现"问题,那么你只要在最热的博弈中采取行动就可以了.但是,你如果碰到真正复杂的情况,一些事物要持续地"热"一段时间,那么你就可能感到束手无策,不知道干什么好.本章将给你一些具体帮助,使你更有把握地对付博弈中"热"的问题.

---

* 译者注:相传隐居在华山的道士陈抟老祖曾写过一首诗,歌颂宋太祖赵匡胤:"纷纷五代扰攘间,一朝云开忽见天",五代乱世,八姓十三君,干戈扰攘,人民处于水深火热之中.赵匡胤即帝位后开始出现安定局面.

## “小放牛”游戏*

这种游戏是由 S・诺顿(Norton)引入的,其中有许多很热,很复杂的局势. 农夫黑先生在交替的各周(第一、三、五、……周)内从市场上买进黑色公牛,而在中间的各周内(第二、四、六、……周),农夫白先生购入白色母牛. 他们两人联合租赁一块土地,以便在要互相分开的场地内各自饲养与放牧牛群. 当然他们不能在互相毗连的场地内放养牛群. 第一个无法作出安排的农夫就是输家.

你们可以玩这种游戏,它有点像第 2 章中讲过的科尔游戏. 其区别是:在小放牛游戏中,相连场地不能为**敌对的**一方利用,而在科尔游戏的地图着色中,相连区域却不能为**自己的**一方所利用.

## 农地放牧的图解

图 1 表示农夫黑先生第二次购进一批公牛后的土地情况. 图上两块黑色的土地是公牛用

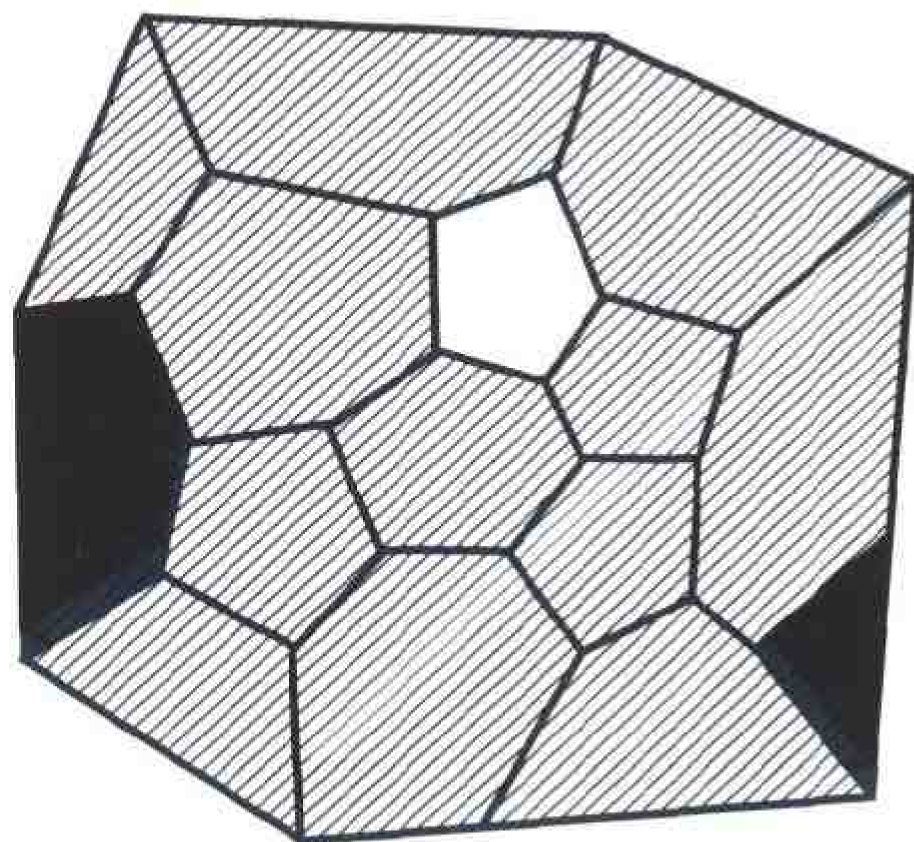


**图 1.** 农夫黑先生第二次购入公牛后的土地情况.

---

* 译者注:译者后来忽然“领悟”出 SNORT 这个词的含意. 原来它与游戏发明家西蒙・诺顿有关,从其姓字 S. Norton 中取出前五个字母(并省略后面的 on 两个字母)镕合而成. 据此,SNORT 又可译为**诺顿游戏**. 但鉴于“小放牛”的译名甚妙,我们就不改了.

地，一块白色的是母牛用地，打上荫线的仍是空地. 为了进一步说明未来的征用情况，让我们对两位局中人都可以利用的每一块土地都打上一点(•)，对只能为公牛使用的土地打上黑点(●)，只能为母牛使用的土地打上白点(○). 图中尚有一块土地，双方都不能利用，因为它与公牛牧场、母牛牧场都相邻，我们将对它打上斑点(⊗). 然后，再用直线分别将各种类型的点加以联结，以表示各块土地之间的邻接.

于是这样一来，图 2(a)包含了图 1 的全部信息，但却表达得更为清楚. 我们将要进一步化简它，其办法是：

删去任何斑点，

删去联结同样颜色的点的直线.

这是由于被删除的东西(点或线段)对游戏的继续进行已经不起任何作用了. 经过这样处理之后，我们就得到图 2(b).

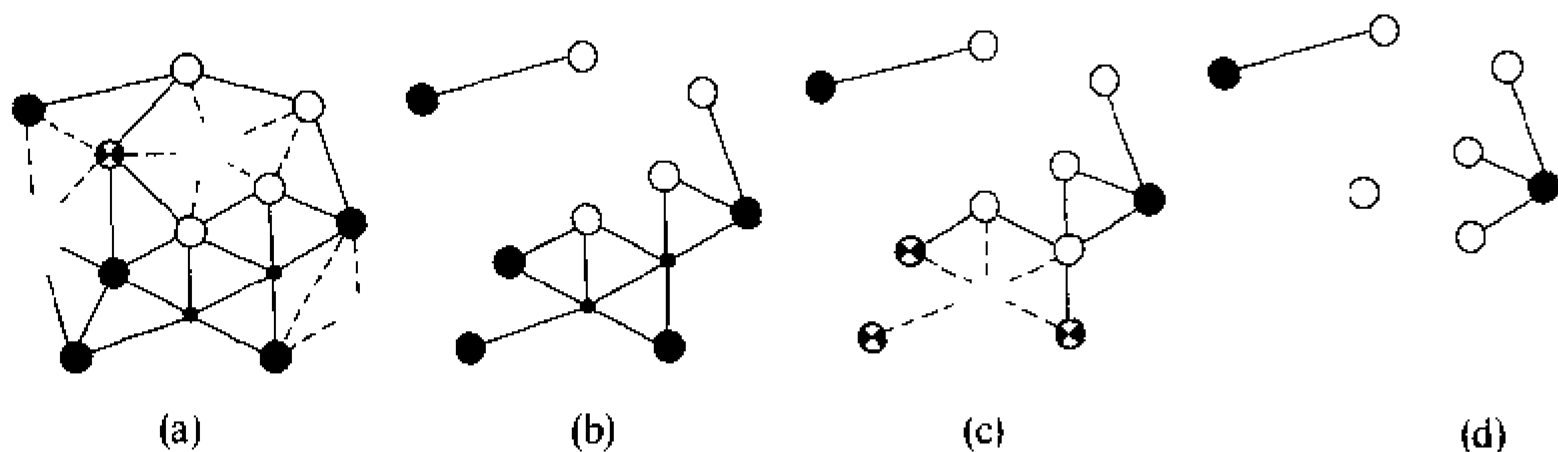



图 2. 简化土地经营问题.

在这种简化图上直接做这种"小放牛"游戏，当黑先生选取一个结点时，他应将所有的邻点染上黑色. 也就是，对已经着色的点追加颜色，从而白点将会染成斑点而被省略. 当然，上述说明对另一位局中人白先生也同样有效；譬如说，如果白先生看中位置最低的一块土地来养他的母牛，则我们就会得到图 2(c)，最后，就简化成了图 2(d)这种模样.

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} 2|-1 & \pm 1 \\ 1+1|0 & \\ 1|0+1 & *-1 \\ 1|0+1 & \pm 1 \end{array} \right\} = 2|1||-1*$$

图3给出了"小放牛"游戏一些局势的值,它们都可以通过上面这种示范方式来求值:

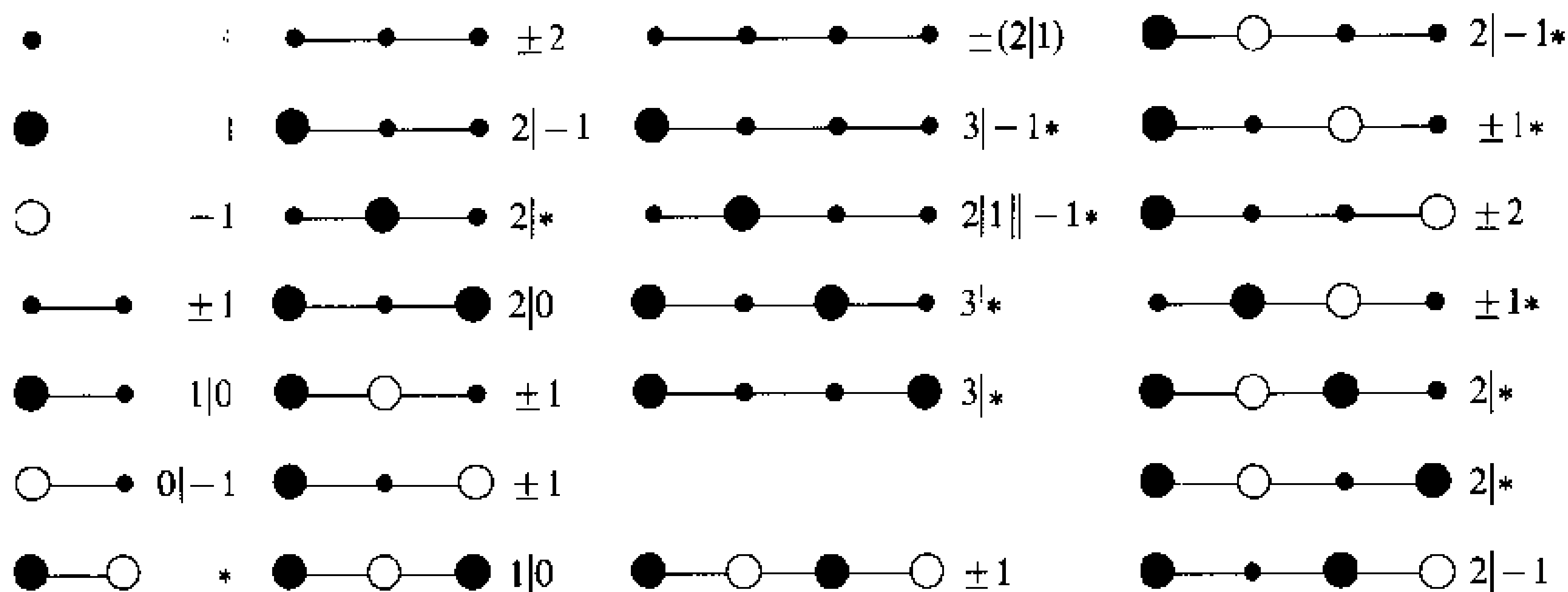



**图 3.** 一部简明的"小放牛"辞典.

在本章增补材料中,你将找到更多的"小放牛"辞汇,本章的许多例题都从那里取材.

## 不应在博弈值为"数"的局势中采取任何行动,除非已经再无其他事情可干!

当你面对一些博弈之和,而它们的值又是各种不同类型时,看来相当不容易决定你的最佳行动位于何方.但若 $x$ 是一个最简形式的数,则必有

$$x^L < x < x^R,$$

所以不论哪位局中人,若在 $x$ 中行动,只会使事情变得更糟,因此当考虑应在哪个分支博弈中采取行动时,你总是优先考虑博弈值不是数的情况,即

> 不应在数中行动,除非再也没有别的事情可干!

**避开"数"的定理**

你们将在本章增补材料中找到一个更为正宗的证明.一般说来,在比较不同分支中的行动时,一个彰明昭著的问题是:

# 它对我能带来什么好处?

譬如说,如果左方从 $G$ 走到 $G^L$,则 $G$ 给他带来的好处是博弈值增大了

$$G^L-G.$$

另一方面,一贯希望值越低越好的右方,在从 $G$ 走到 $G^R$ 时,由于值的减小量为

$$G-G^R$$

而带来了好处. 因而我们将把差数 $G^L-G$ 及 $G-G^R$ 分别称为 $G$ 的(左、右)**鼓励值**.

现在来看一看处于最简形式的数,例如

$$1=\{0|\},\ 2\frac{1}{2}=\{2|3\},\ \frac{3}{4}=\left\{\frac{1}{2}\middle|1\right\},$$

则鼓励值

$$x^L-x \quad 及 \quad x-x^R$$

是从一系列负数

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\cdots$$

中取出来的,这就说明了为什么局中人会感觉到在 $x$ 中采取行动是吃了亏(得到的是**负的鼓励值**). 但我们将要看到,如果在非数的博弈中采取行动,则每个局中人得到的鼓励值几乎都是正的,它们是严格地大于所有这些负数的.

例如,$2|-1$ 不是一个数,然而 $1\frac{1}{4}=1\left|1\frac{1}{2}\right.$ 却是数,于是我们有

$$\{2|-1\}+1\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}\left|\frac{1}{4}\right.,$$

因为两位局中人都懂得避开"数"的定理,不会去考虑下列行动:

$$\{2|-1\}+1 \text{ 与} \{2|-1\}+1\frac{1}{2}.$$

在一般情况下,我们有以下的

**平移原理**

| |
|---|
| 若 $G=\{G^L\|G^R\}$ 不是一个数,而 $x$ 是一个数,则<br>$\{G^L\|G^R\}+x=\{G^L+x\|G^R+x\}$,… |

因为

$$G+x=\{G^L+x,G+x^L|G^R+x,G+x^R\}.$$

根据避开"数"的定理,选择 $G+x^L$ 及 $G+x^R$ 显然是被别的选择所优超.

在小放牛游戏中,

局势 $G=$

自然是热的,因为左方将走到

其值为 2,而右方将走到

其值为−1,但一旦到达后面两种局势之后,无论哪个局中人都不想在剩下的局势中继续采取行动,因为此时的博弈值已经是"数"了。我们将把 2 称为 $G$ 的左方停止值,而把−1 叫做 $G$ 的右方停止值. 又因 $G$ 满足方程 $G+G=1$,

于是我们认为它的"平均值"是 $\frac{1}{2}$.

类似地局势

$$H= \quad =2|1\|-1$$

的左方停止值为 1,右方停止值为−1,由于它满足方程

$$4 \cdot H=1,$$

故平均值为 $\frac{1}{4}$. 从本例也可看出,平均值**并不等于**左方停止值与右方停止值的算术平均数. 对于看来不像能够满足什么简易方程的游戏,我们怎样去计算它的停止值与平均值呢?

## 左方与右方停止值

左、右停止值是容易求出的. 让我们大家都同意,当博弈值变成一个"数"时,就停下来不再去玩它. 这是因为在值为数的博弈中采取行动是笨拙的,对聪明的玩家毫无用处. 如果博弈的所有分支统统变成了"数",那么有理性的局中人就会停止不前,只要加加总分就行了. 由此可见,当一个博弈的所有分支的值全都是"数"时,这就意味着它已经到达停止局面. "值"不是"数"的那种局势才是**活动局势**,因为局中人还是要在其中继续行动.

当一个活动性局势,例如下面的

$$G= \quad =-3|2\|0,\pm1$$

同其他已经到达数字值而停下来的博弈一起玩时,显然双方的行动将集中于 $G$ 中,直至它本身

也到达一个停止局势 $x$ 为止. 左方当然想把 $x$ 搞得越大越好，而右方却是想把 $x$ 弄得越小越好. 就本例来说，若左方先走，则 $G$ 将停在数值 2 上，以后由左方先走；若右方先走，则 $G$ 将停在 0 上，以后还是让左方先走. 我们将用以下记法来加以记录：

$$L(G)=L(2), R(G)=L(0)$$

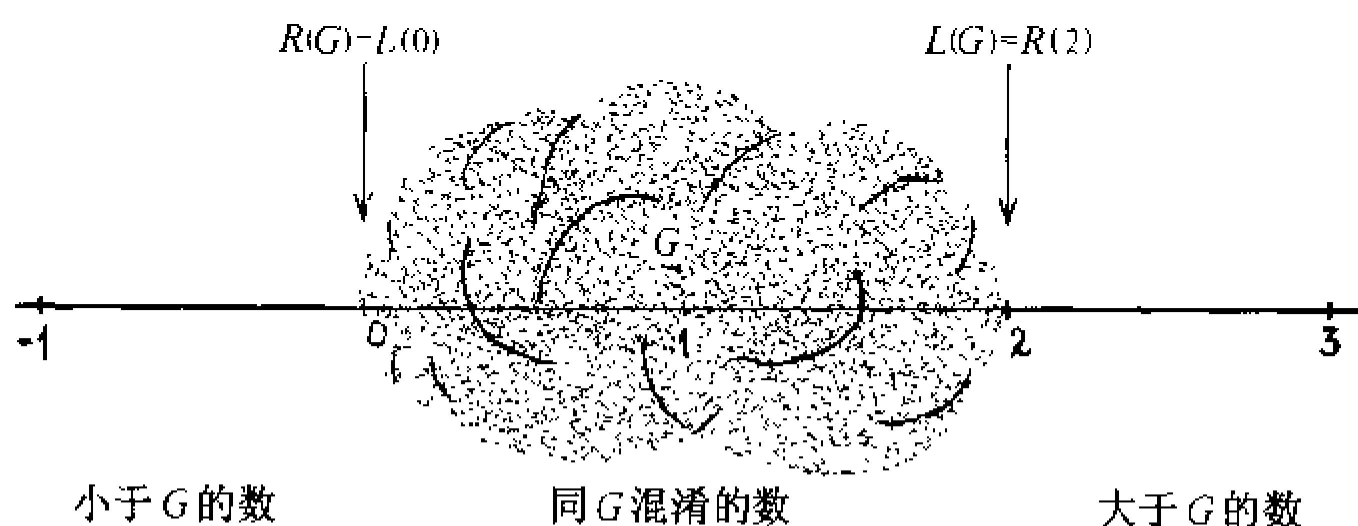



**图4.** 博弈 3|2‖0，±1 的左，右停止值及混淆区间.

用这种办法来玩一个一般性的博弈 $G$，我们将定义两个数，它们叫做 $G$ 的左、右停止值，并且还能定出一旦达到这些停止值时，下一步将轮到谁走. 然后我们就能将 $G$ 同一切数加以比较，因为在图4中，$G$ 的这朵白云将由决定谁先走的左、右停止值处穿过数轴，与之相交. 在我们这个例子中，这朵白云将穿过0的左方与2的左方. 在左、右停止值之间的区域(即图上被白云覆盖的区域)称为**混淆区间**.

图5表明

$$\downarrow=0;0\|0, \qquad *=0|0, \qquad \uparrow=0\|0|0$$

的混淆区间，其中有

$$L(\downarrow)=R(\downarrow)=L(0); \quad L(*)=R(0), R(*)=L(0); \quad L(\uparrow)=R(\uparrow)=R(0).$$

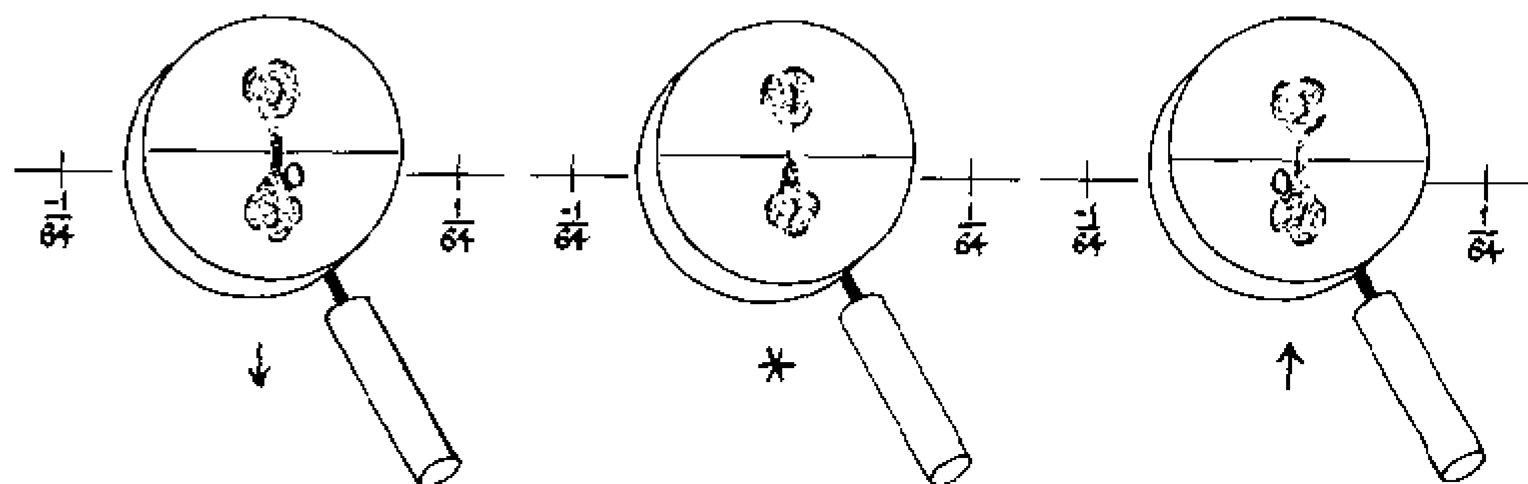



**图5.** ↓，*，↑ 的混淆区间.



你可以看到，混淆区间有可能只含一点，有时甚至是空集(以几种不同方式出现)．在这些情况下，无论属于何者，博弈都无限接近于一个数．

## 冷却与热图

有很大混淆区间的博弈是**炽热**的，两位局中人都急于在其中采取行动．为了求出它的平均值，我们将试图通过冷却办法来减少其混淆性．为了把一个博弈冷却 $t$ 度我们将在每步动作上课征大小为 $t$ 的赋税．但我们必须谨慎地提供实例以说明到达停止局势的步骤，以使得我们的赋税法规不至于打乱基础经济．既然“数”已经是不活动了，所以外加的冷却对它应当毫无改变．

在 $t$ 值递增时，博弈 $G_t$($G$ **冷却** $t$ 度)可定义如下：

$$G_t=\{G_t^L-t\,|\,G_t^R+t\}$$

除非存在着一个较小的温度 $t'$，此时 $G_{t'}$ 将无限地接近于一个数 $x$，而对一切 $t>t'$，有 $G_t=x$.

**冷却公式**

让我们看一下小放牛游戏的一个局势

$$G=\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet=2|-1.$$

当 $t$ 逐步递增时，将有

$$G=G_0=2|-1$$

$$G_{\frac{1}{2}}=1\frac{1}{2}\Big|-\frac{1}{2}\quad\left(=2-\frac{1}{2}\Big|-1+\frac{1}{2}\right)$$

$$G_1=1|0$$

$$G_{1\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+*$$

此时已无限接近于 $\frac{1}{2}$，于是

$$对一切\ t>1\frac{1}{2},G_t=\frac{1}{2}.$$

由此可见，当它冷却到超过 $1\frac{1}{2}$ 的温度时，此博弈将化简到它的平均值 $\frac{1}{2}$.

我们将通过描绘 $G$ 的**热图**（见图 6）来表示. 在图中高出地面 $t$ 处画出 $G_t$ 的左方与右方停止值. 为了方便起见，数轴上的数是按递减顺序来排列的，这样便于保持左方的行动在左，而右方的行动在右.

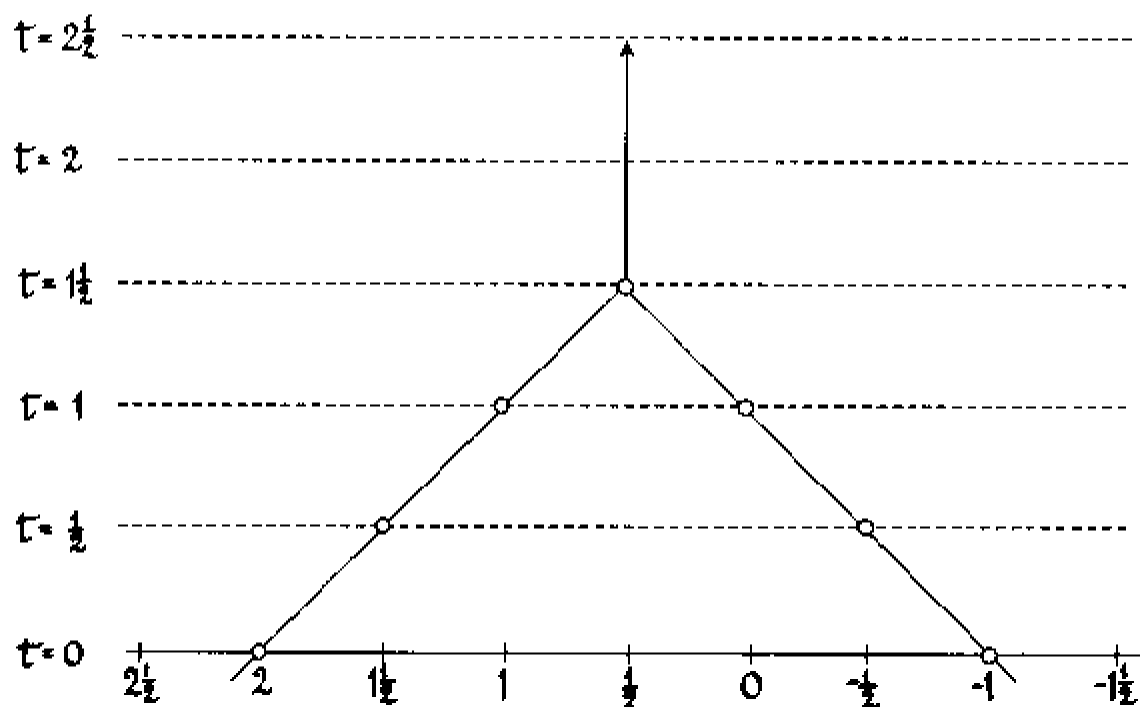



**图 6.** 2|−1 的热图.

# 冷却解决平均值

显然通过很大度数的冷却必然会使博弈值引导到一个数 $m$，从而我们有

$$G_t = m \qquad \text{对 } t > t_0.$$

这意味着每一幅热图必将撑起一个无限长的垂直**船桅**. 使这件事得以实现的最小的 $t_0$ 值称为博弈 $G$ 的**温度** $t(G)$，而对一切 $t > t(G)$，将有

$$m - t < G < m - t.$$

那么，为什么 $m$ 就是 $G$ 的平均值呢？

我们的回答是可以证明

$$(A+B+C+\cdots)_t = A_t + B_t + C_t + \cdots.$$

作为特例，我们有

$$(G+G+G+\cdots)_t = G_t + G_t + G_t + \cdots.$$

从而对一切 $t>t(G)$，将有

$$(G+G+G+\cdots)_t = m+m+m+\cdots.$$

以及

$$m+m+m+\cdots-t < G+G+G+\cdots < m+m+m+\cdots+t.$$

> 在有界的误差范围之内，$G$ 的一系列复本可以用同样数量的、它的平均值的复本去替代.

如果不是由于停止值的免税，则方程

$$(A+B+C+\cdots)_t = A_t+B_t+C_t+\cdots$$

是显然成立的，这是由于典型的左方选择为

$$(A+B^L+C+\cdots)_t-t = A_t+(B_t^L-t)+C_t+\cdots.$$

所以从

$$A+B+C+\cdots \quad 到 \quad A+B^L+C+\cdots$$

的总的行动所课的税可以看作是课征在从 $B$ 到 $B^L$ 的分支上的.

使我们感到欣慰的是在停止值方面的免税并不产生负面影响. 因若 $x$ 是一个数时，平移原理将能保证

$$(x+G)_t = x+G_t, (x-G)_t = x-G_t, x_t = x.$$

所以即使 $A, B, A+B$ 中的任何一个等于数 $x$ 时，

方程

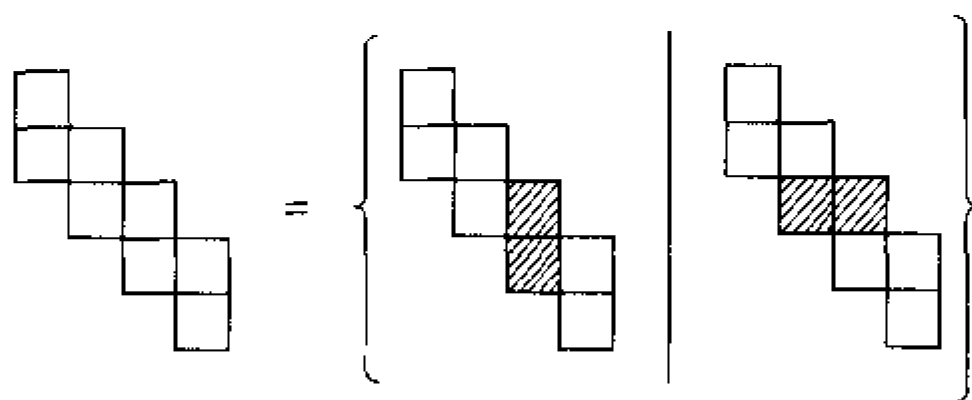
$$(A+B)_t = A_t+B_t \qquad 依然为真.$$

## 怎样作热图

小放牛游戏中的局势

●—○—●—○—●—○—● = {●—○—● + ●|●—○+○—●}

同骨牌游戏的局势



一样，具有同样的博弈值

$$G=2|1\|0.$$

让我们画出热图，并求出其平均值.

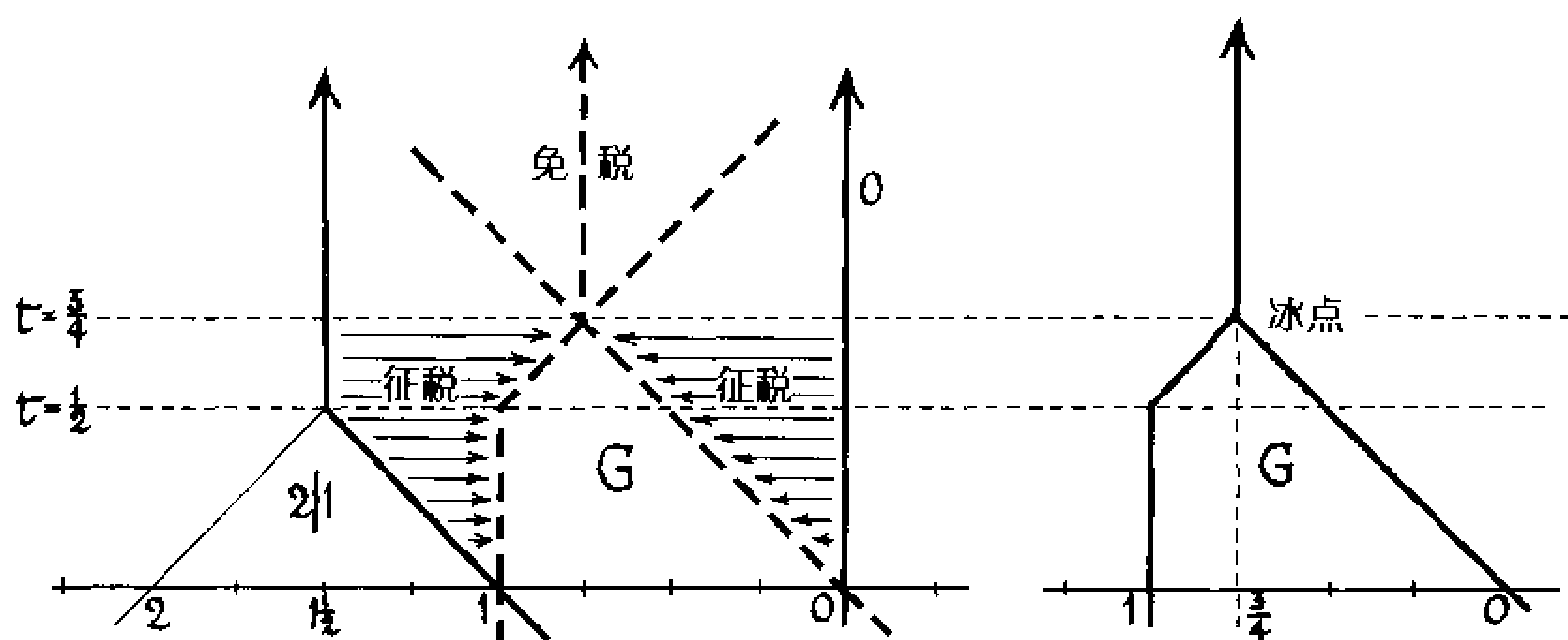



**图 7.** 画出 G 的热图.　　**图 8** 最后的形状

2|1 的热图同我们已经求出的 2|−1 的热图很相像. 它的左、右境界线是斜线，分别开始于 2 与 1，然后在 $t=\frac{1}{2}$ 的高度相交并在该处一直垂直向上. 这表明 2|1 的温度为 $\frac{1}{2}$，而平均值是 $1\frac{1}{2}$. 由于 0 已经是一个数，所以它的热图就只是一根垂直线.

当左方从 G 走到 2|1 之后，就要轮到右方走，所以 2|1 的右方境界线是重要的. 我们将它画成粗黑线. 我们也同样强调 0 的左方境界线(它同右方境界线正好重合).

现在要课征税收了！我们使左方向右移动，这意味着在我们的倒置尺度上实际上是减 $t$. 这样做的结果是，右方境界线经过距离 $t$ 后在高度 $t$ 处成为一条虚线，它在 1 处开始垂直向上，然后在高度 $\frac{1}{2}$ 处向右倾斜. 由于对右方的课征税收是加 $t$，所以我们要将 0 的左方境界线向左移

动.从而得出经过 0 的那根倾斜的虚线.

以上两根虚线就定义了 $G_t$ 的左方停止值与右方停止值,直到它们相交于**冰点**为止(对本例来说,它是在点 $\frac{3}{4}$ 上方,高度等于 $\frac{3}{4}$ 的那一点),这意味着 $G$ 经过冷却 $\frac{3}{4}$ 以后,将要无限地接近于 $\frac{3}{4}$,故而对一切 $t>\frac{3}{4}$ 来说,$G_t=\frac{3}{4}$. 于是 $G$ 的热图就像图 8 所示,在点 $\frac{3}{4}$ 以上,左、右境界线将同垂直的船桅完全重合.

# 当一位局中人有几种可能选择时

最好的走法将依赖于冷却温度. 图 9 表明在此种情况下的热图作法,例如,对小放牛局势

$G=$ ●—●—●—○—●—○ $=\{\{2|-1\},0\|\{-2|-4\}\}$.

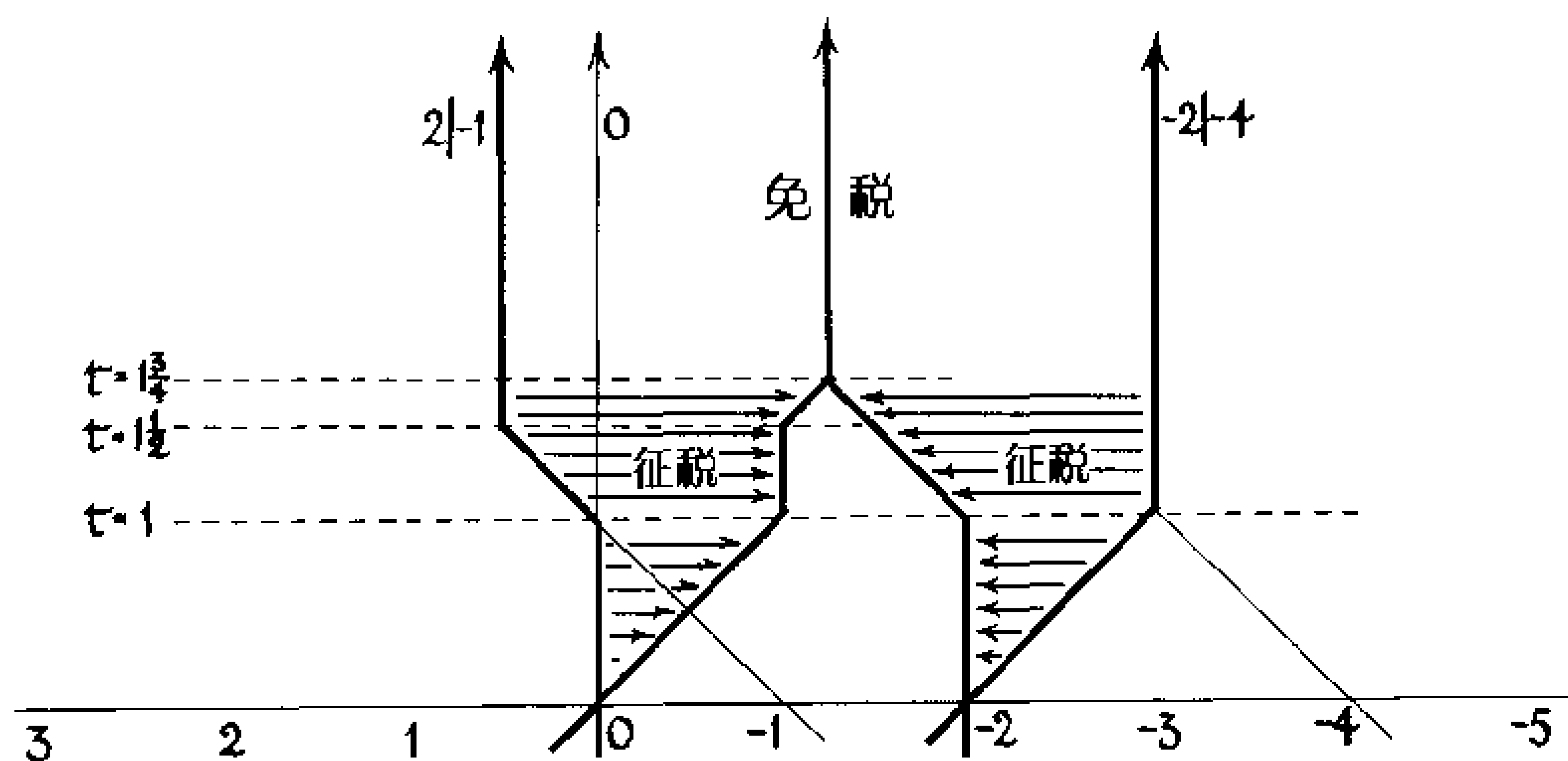



**图 9.** 左方有两种选择时的热图作法.

在他的两个走法 2|−1 及 0 中,左方究竟应该选择哪一个? 由于轮到右方走,所以选择的右方边界将是重要的,于是

> 对每个温度 $t$,左方应选择的是在 $t$ 处具有最靠左的右部边界的那个走法.

对本例来说，$t\leqslant 1$ 时是 0，而 $t>1$ 时是 $2|-1$，因此我们要强调指出在 $t=1$ 那条虚线以下是 0 的右部边界而在 $t=1$ 以上是 $2\ -1$ 的右部边界．我们也已经强调指出了右方的唯一选择 $-2\ -4$的左边界．于是 $G$ 的热图边界就由图上的实线围成，而这些实线是在每一个高度 $t$、征收赋税 $t$ 之后所形成，直到它们相交为止．

## 热图的基础

你们将会看到，我们的热图底部其外形总是有点参差不齐，因为我们需要将边界线在地平线下再继续画一点．何以要这样做？让我们来看一看 * 与 ↑ 的热图．对 $*=0|0$ 来说，有关的边界线是经过 0 的垂线，它们在交过"税"之后变成两条彼此相对的经过 0 的斜线．由于它们相交于 0，所以 * 的热图在 0 以上是根垂线，而在 0 以下却是两条斜线，见图 10(a)（或图 11(a)，而令 $a=b=0$）．

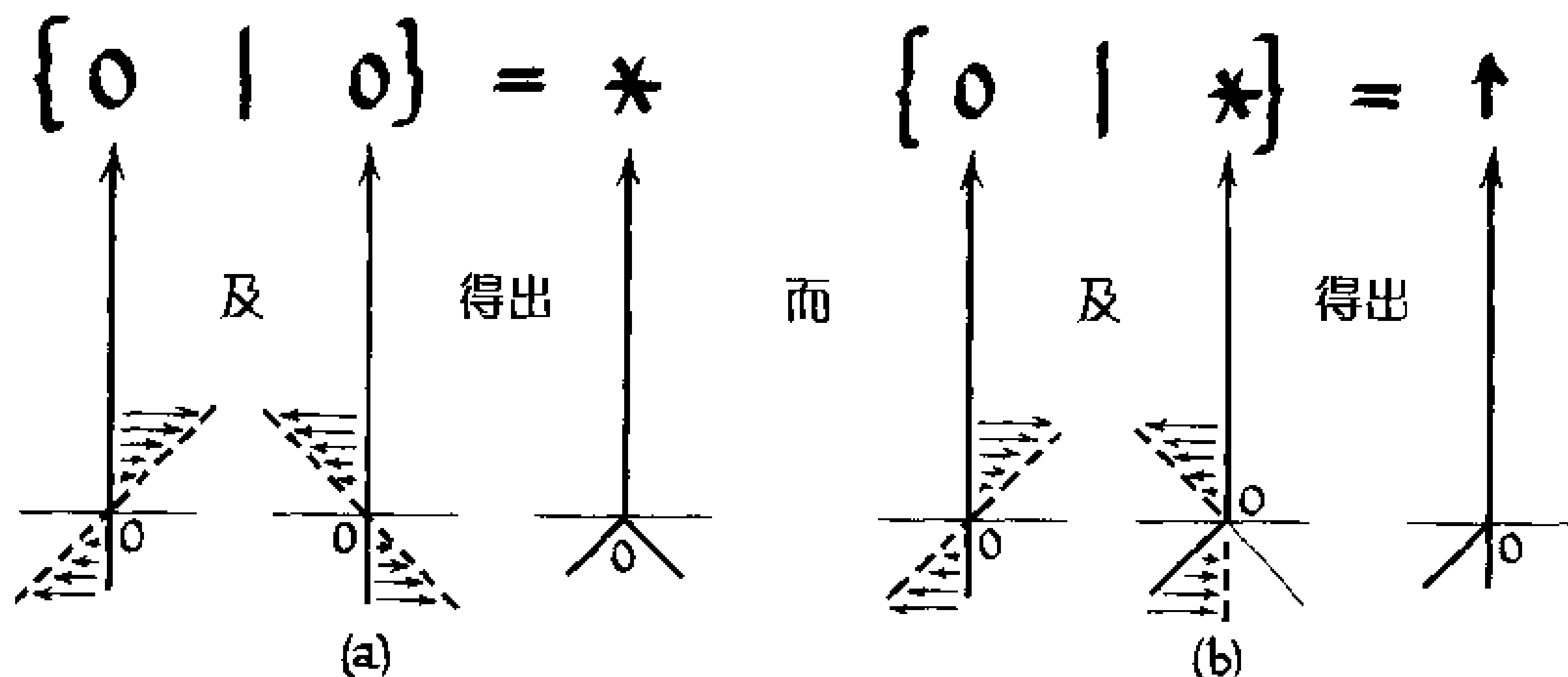
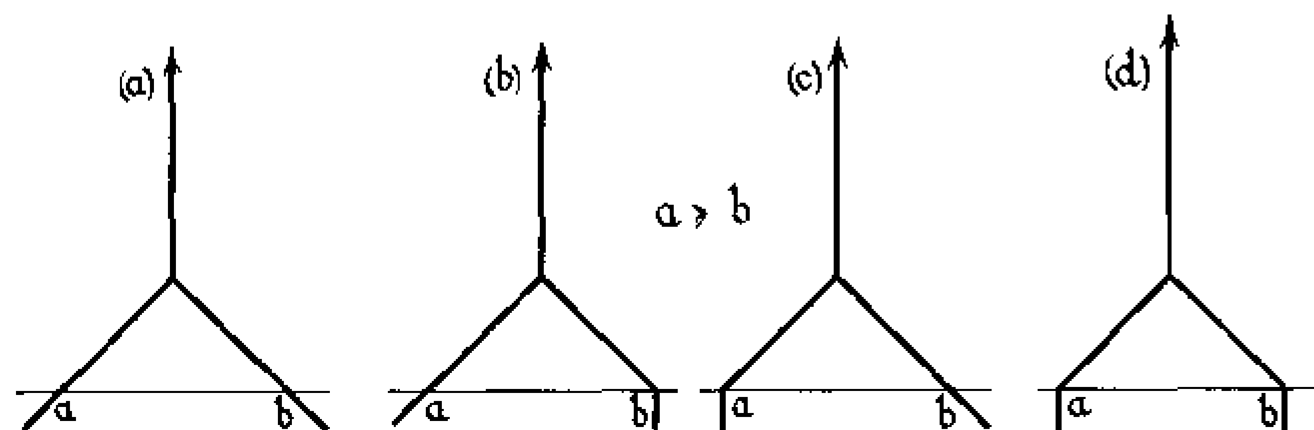



**图 10.** * 与 ↑ 的热图．

同样的左方边界线也可用来为 ↑ 服务．为了得出它的右方边界线，我们把 * 的左方边界线课征税收，从而得出图中的虚线，它在地面之上是根斜线，而在其正下方却是根垂线，见图 10(b) 所示（或图 11(b)，而令 $a=b=0$）．它们再一次相交于地平线，但在其下方则是发散的，尽管此时右边界线仍然保持着垂直．

## 热图的一些实例



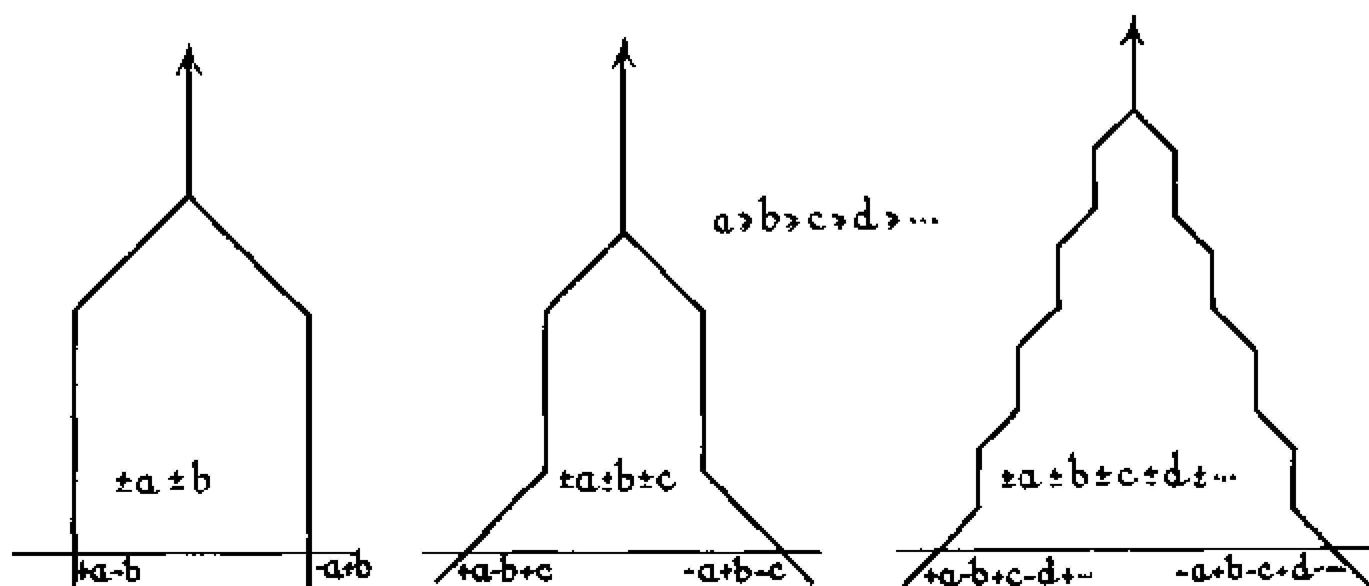

例：(a) ●—• = ●—○—● $=1|0$　　●—•—●—○ $=2|-1$

(b) •—●—• $=2|*$　　●—•—•—• $=3|-1*$

(c) ○—•—•—○ $=*|-3$　　○—●—•—• $=-1*|-2$

(d) •—●—○—• $=*|-1*$　　○—●—•—•—● $=-2*|-1*$

图 11. 具有两个停止值 $x$ 或 $x*$ 的博弈之热图.




例：(a) •—•—•—• $=\pm1\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}=\pm(2|1)$

●—•—•—•—•—○ $=\pm2\pm1=\pm(3|1)$

(b) •—●—•—•—○—• $=\pm1\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\pm0=\pm(2*|1*)$.

(c) 具有 $l_i$ 个蓝圈与 $r_i$ 个红圈的孩子气伐木游戏局势，$i=1,2,3,\cdots$.

图 12. 萨斯喀彻温* 的风光；具有两个，三个或更多个转换之博弈的热图.

---

* 译者注：萨斯喀彻温为加拿大中部的一省，境内湖泊众多，气候严寒. 图 12 看上去很像雪人，故而本书作者有这种幽默说法.

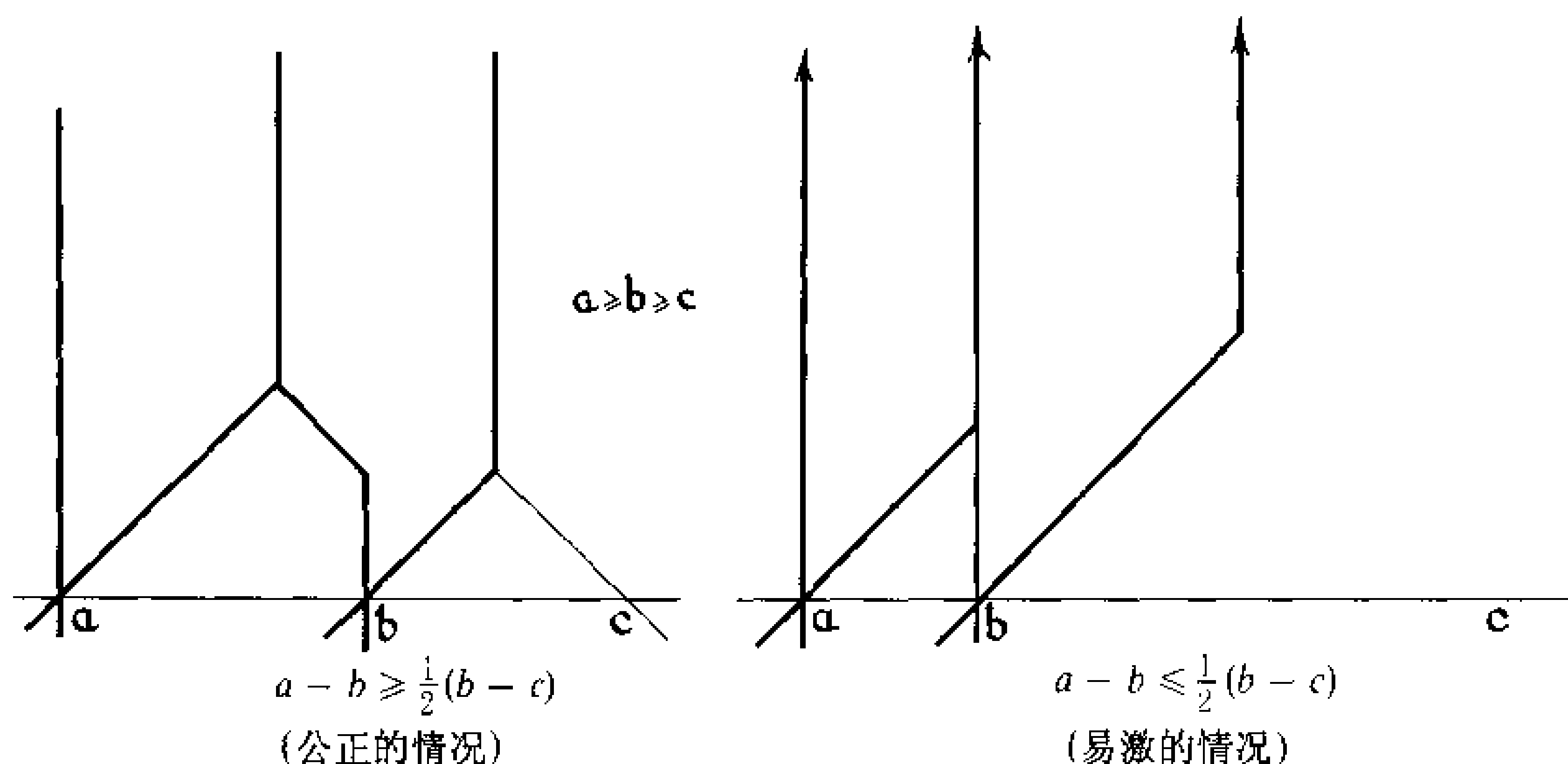



图 13. 博弈 $a \| b | c$ 的热图.

## 最后停止值以后，谁该走动？

从热图中是容易看出来的，这是因为垂线表示两位局中人走过同样步数之后的停止点，而斜线则表示先走的哪个局中人走了最后一步后所到达的停止点. 这意味着 $G_t$ 的混淆区间应该包含斜线的端点，然而却不包含垂线的端点. 重要的是要注意当热图的边界线改变斜率时，混淆区间由下降的斜率来决定. 譬如说，在图 11(a)中两个端点都包含在混淆区间内，而在图 11(d)中则两者都不是；在图 11(b)中，$a$ 在混淆区间内而 $b$ 不是，而在图 11(c)中，则正好相反.

如果 $x$ 是一个数，那么你能讲清楚究竟是 $G \geqslant x$ 还是 $G \leqslant x$，只要看一看 $G$ 的热图是否完全位于经过 $x$ 的那条垂线的左方还是右方. 例如图 14 所表示的

$G =$ ●—•—•—•—●—• $= 4|3\|1\times\ '\ -1\times$

热图，它表明 $G \leqslant 3$，但 $G \ngeqslant 1$，因为热图在 1 的右方伸出了一只"脚趾头". 反之，若 $x$ 是一个比 1 小的任何数，则我们可断定 $G > x$("脚趾头"是无穷小的).



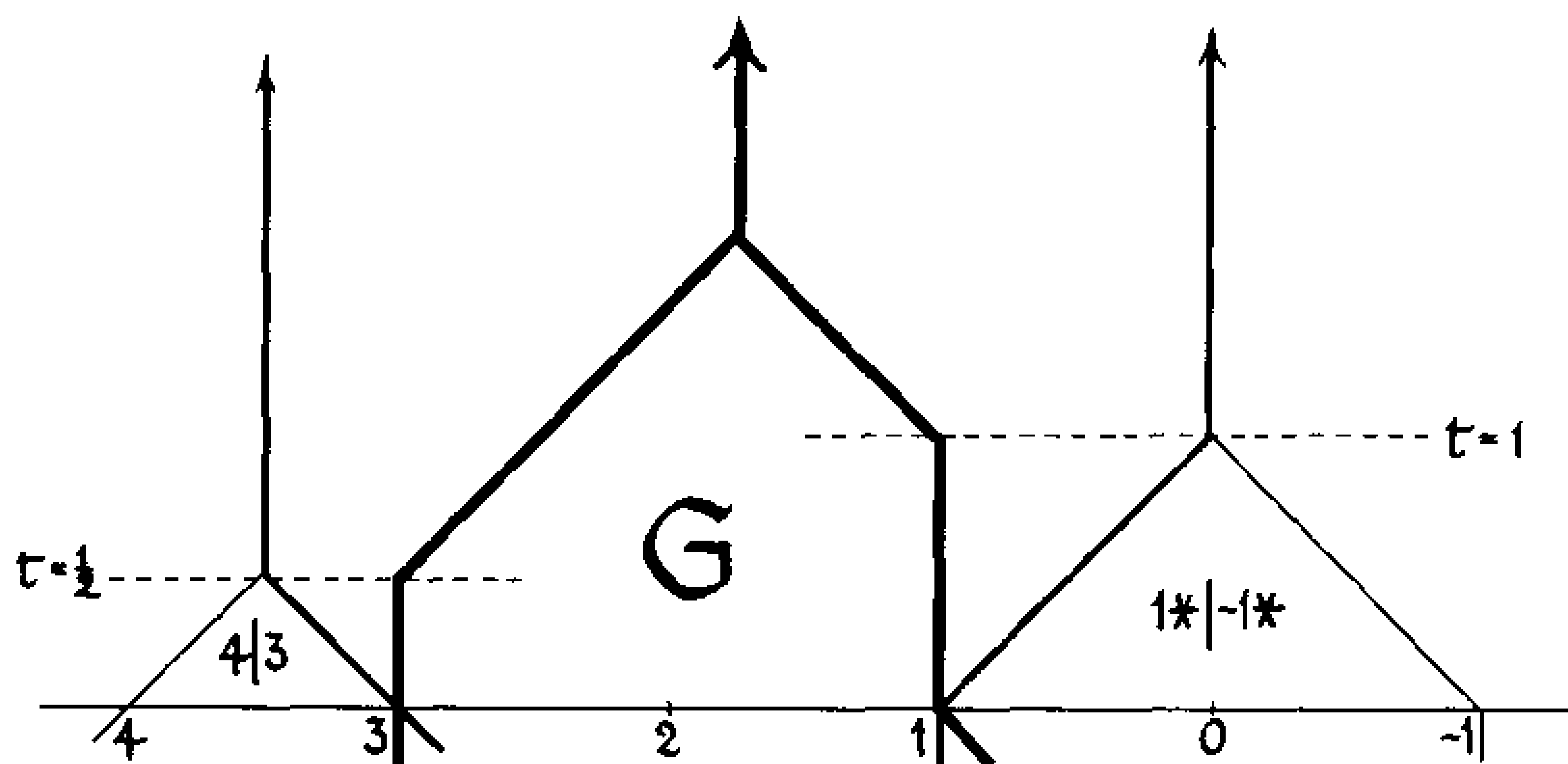



图 14. 有一只"脚趾头"的热图.

## 有四个停止值的例子

如果你想在复杂局势中玩得很称心，那么你就必须熟悉热图，懂得静热学策略（本章后半部分将要讲到它）. 在以下几节中我们将要去讨论具有四个停止值的博弈之和，其形状为：

$$H=a|b\|c,d \quad (a\geqslant b>c\geqslant d).$$

它将告诉你应当怎样考虑这些局势. 根据平移原理，$H$ 可以转化为

$$H=\frac{1}{4}s+\{x\pm y|-x\pm z\}=\frac{1}{4}s+G,$$

其中

$$s=a+b+c+d,$$

$$x=\frac{1}{4}(a+b-c-d),$$

$$y=\frac{1}{2}(a-b),$$

$$z=\frac{1}{2}(c-d).$$

按照所涉及的数字大小，此博弈的热图具有三种可能形状（图 15），非正式的字眼"公正的"

与"易激的"将用来暗示玩弄此类博弈之和时所取策略的一些方方面面. 我们不打算对这些名词作出确切的定义,但在以下各节中将对这些概念给出富有启发性的讨论.

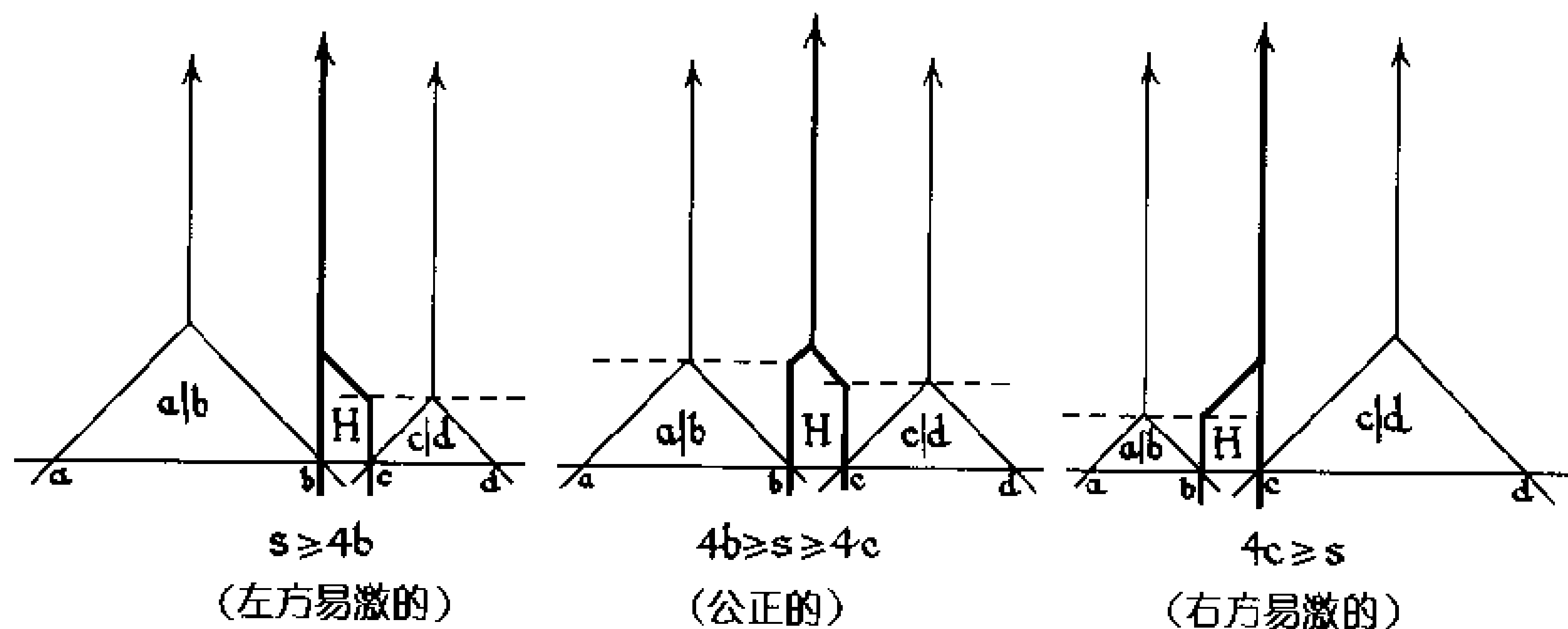



图 15. $a|b \| c|d$　$(a\geqslant b>c\geqslant d)$的各种热图.

## 支票市场的交换

在第 5 章中我们玩过兑现支票游戏. 每张支票上都开列着某个确切步数,但没有写出受款人的姓名. 每位局中人在轮到他走时都能拿到一张支票. 一张数额为 $x$ 的、尚未取款的支票便是博弈 $\pm x=\{x|-x\}$.

现在让我们设想有一个支票交换市场,忠实可靠的乔*在收到一张尚未受领的、数额为 $y$ 的支票后给每位局中人返回一张尚未领取现金的、数额为 $x$ 的支票. 如果 $x$ 大于 $y$,那么我们的博弈实际上仅不过是两张未兑现支票的伪装形式,也就是

$$\{x\pm y, -x\pm y\}=\pm x+\pm y.$$

但若 $y\geqslant x$,则任何一位局中人都不想接受诚实的乔的奉献,因为其价值显然为 0.

如果同一张尚未兑现的、数额为 $x$ 的支票以不同价格出售给左方或右方,那就会产生种种有趣的变化. 设想经纪人给左方 $x$ 步好处以交换一张数额为 $y$ 的未兑现支票,而给右方 $x$ 步好处以交换一张数额为 $z$ 的支票,那么在此种情况下,经纪人对双方的承诺实际上便是博弈

* 译者注:乔(Joe)是约瑟夫(Joseph)的昵称,按照美国俚语,也就是对不相识者的非正式称呼. 此处实际上是指市场经纪人.

$$G=\{x\pm y\mid -x\pm z\}.$$

如果 $x$ 比 $y$ 或 $z$ 大得多，那么怎样去玩这种博弈将是很清楚的，即便它还要同其他类似形式的博弈合并在一道玩.

## 公正的博弈

诚然，在玩 $n$ 个一模一样的博弈 $G$，即

$$n.G=n.\{x\pm y\mid -x\pm z\}.$$

当 $x$ 同 $y$ 与 $z$ 比起来大得多时，博弈可以进行得四平八稳，毫无刺激. 这时，每个局中人都把 $G$ 看成是数额较大的 $x$ 的一种买卖，轮到他们走时就尽量去做这种买卖. 只要这种买卖继续存在，他们是不会去考虑价值较小的 $\pm y$ 与 $\pm z$ 的. 不过这种目光短浅的观点倒的确是符合最优策略的. 因为尚未兑现的，价值为 $\pm y$ 及 $\pm z$ 的支票在游戏继续往下进行时迟早总会得到公正的分派. 如果 $x>y\geqslant z\geqslant 0$ 而 $x-y$，$x-z$ 大于 $y-z$，则博弈 $n.G$ 的左方停止值为：

| $L(0)$ | $L(G)$ | $L(2.G)$ | $L(3.G)$ | $L(4.G)$ | $L(5.G)$ | $L(6.G)$ | $L(7.G)$ | $L(8.G)$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x-y$ | $y-z$ | $x-z$ | 0 | $x-y$ | $y-z$ | $x-z$ | 0 | … |

对我们的有着四个停止值的例子 $H=a|b\|c|d$ 来说，当

$$3b+c>s>2b+2c$$

时，倘若我们用 $H$ 的停止值来表示 $n.H$ 的停止值，$H$ 的公正性就显得十分清楚：

| $L(0)$ | $L(H)$ | $L(2.H)$ | $L(3.H)$ | $L(4.H)$ | $L(5.H)$ | $L(6.H)$ | $L(7.H)$ | $L(8.H)$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $b$ | $a-d$ | $a+b+d$ | $s$ | $s+b$ | $s+a+d$ | $s-a+b-d$ | $2s$ | … |

一般地说，一个极公正的博弈是指，对某些充分大的 $n=2^j$ 而言，$n.G$ 的左方停止值及右方停止值都等于

$$\sum_i 2^{j-k(i)}a_i$$

其中 $a_i$ 表示 $G$ 的一切可能的停止局势，而 $k(i)$ 是从 $G$ 走到停止局势 $a_i$ 的步数，所以，当 $j$ 充分大时，一个极为公正博弈的 $2^j$ 个拷贝，加起来将等于一个数.

## 有刺激的博弈

若 $y+z\geqslant 2x$，则博弈

$$G=\{x\pm y \mid x\pm z\}$$

将化简为一个数. 但如果 $G$ 不是一个数, 而 $y$ 与 $z$ 只有一个超过 $x$, 则我们将把 $G$ 称为易激(有刺激)的博弈.

考虑在公开市场中 $x$ 步的开价, 有刺激的博弈 $G$ 肯定不是公平交易, 因为对一位局中人给以打折扣优惠, 而对另一位局中人却抬高价格、由于不大可能立即赎回, 这就使在公平博弈中惯于玩一些拷贝的局中人只好不顾及成本(或利润). (他以后会意识到为了取得 $x$, 他必须支付 $\pm y$ 或 $\pm z$). 可是玩一些有刺激博弈拷贝的局中人却做不到!

若 $y>x$, 而左方接受了由 $G$ 所代表的开价, 那末他必须正视这种可能性: 即右方通过立即赎回 $\pm y$ 支票而捞到好处. 这将使左方在玩弄 $n$ 个有刺激博弈拷贝时, 付出大约 $n(y-x)$ 的代价. 实际上左方在 $G$ 中行动, 主要是由于他是一个把事情搞糟的人, 他意识到如果他不以较小的损失而买进每一个 $G$ 的拷贝的话, 右方将在以后买进它们而捞到一笔很大的暴利. 反之, 右方将把左方从 $G$ 走到 $x-y$ 看成是下次还会走到 $+y$ 的一个威胁, 这个威胁的危害非常严重, 以致他必须立即作出走到 $-y$ 的反应.

一般说来, 在进行一些博弈之和时, 在公正博弈的那个分支中走出的一步, 通常的反应可以是不同分支中的一步, 然而, 在有刺激博弈中所走出的一步则必须在同一分支中作出反应. 一步极其刺激的行动将会造成严重威胁, 从而必须迅速反应, 而在公正博弈中迈出的一步则不需要这样去做. 如果用日本围棋*的行话来说:

> 对刺激性的一步必须果断反击,
> 而对平稳的一步可以慢慢来.

博弈 $H=a|b\|c|d\,(a\geqslant b\geqslant c\geqslant d)$, 当 $3b+c>s>b+3c$ 时是极富刺激性的, 在 $s>4b$ 或 $4c>s$ 时则具有中等程度的刺激性. 在其他情况下, 博弈和 $n.H$ 的最佳策略是按公正玩法去行事, 直到停止局势之前三轮, 然后再转向更有刺激性的博弈分支. 有许多博弈, 譬如说, 像 $2|1\|-1|-5$ 在某些情况下, 算不算具有中等刺激性, 趋势并不明显, 因此"公正"或"有刺激"也只能算是非正式的字眼.

一般说, 当博弈玩得比较上路时, $n.H$ 的左方停止值如下:

---

* 译者注: 原文如此. 这种提法不够妥当. 按围棋最早是由中国人发明的, 目前的形势也是中、日、韩三足鼎立的局面, 并非日本人独霸天下.

| | $L(H)$ | $L(2,H)$ | $L(3,H)$ | $L(4,H)$ | $L(5,H)$ | $L(6,H)$ | $L(7,H)$ | $L(8,H)$ | $L(9,H)$ | … | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s>4b$ | $b$ | $2b$ | $3b$ | $4b$ | $5b$ | $6b$ | $7b$ | $8b$ | $9b$ | … | $b$ |
| $4b>s>3b+c$ | $b$ | $2b$ | $3b$ | $s$ | $s+b$ | $s+2b$ | $s+3b$ | $2s$ | $2s+b$ | … | $\frac{1}{4}s$ |
| $3b+c>s>2b+2c$ | $b$ | $a+d$ | $a+b+d$ | $s$ | $s+b$ | $s+a+d$ | $s+a-b+d$ | $2s$ | $2s-b$ | … | $\frac{1}{4}s$ |
| $2b+2c>s>b+3c$ | $b$ | $b+c$ | $a-b+d$ | $s$ | $s+b$ | $s+b+c$ | $s+a+b+d$ | $2s$ | $2s+b$ | … | $\frac{1}{4}s$ |
| $b+3c>s>4c$ | $b$ | $b+c$ | $b-2c$ | $b+3c$ | $s+b$ | $s+b+c$ | $s+b+2c$ | $s+b+3c$ | $2s+b$ | … | $\frac{1}{4}s$ |
| $4c>s$ | $b$ | $b-c$ | $b+2c$ | $b-3c$ | $b-4c$ | $b-5c$ | $b+6c$ | $b-7c$ | $b-8c$ | … | $c$ |

## 扩展的热图

当我们碰到复杂的博弈,例如小放牛游戏中的某个局势

$$G=\bigcirc\!-\!\bullet\!-\!\bigcirc\!-\!\bullet\!-\!\bullet\!-\!\bullet=\{0,\{2|-1\}\|\{-2|-4\}\}$$

而感到绘制热图甚为棘手时,就需要首先对它的各种可供选择的走法分别作出热图(参看图 9),对充分小的 $t$,我们有

$$G_t=\{0-t,\{2-t|-1+t\}-t\|\{-2-t|-4+t\}+t\}$$
$$=\{-t,\{2-2t|-1\}\|\{-2|-4-2t\}\},$$

我们将在图 16 中通过适当的斜线指出这个博弈的停止位置.

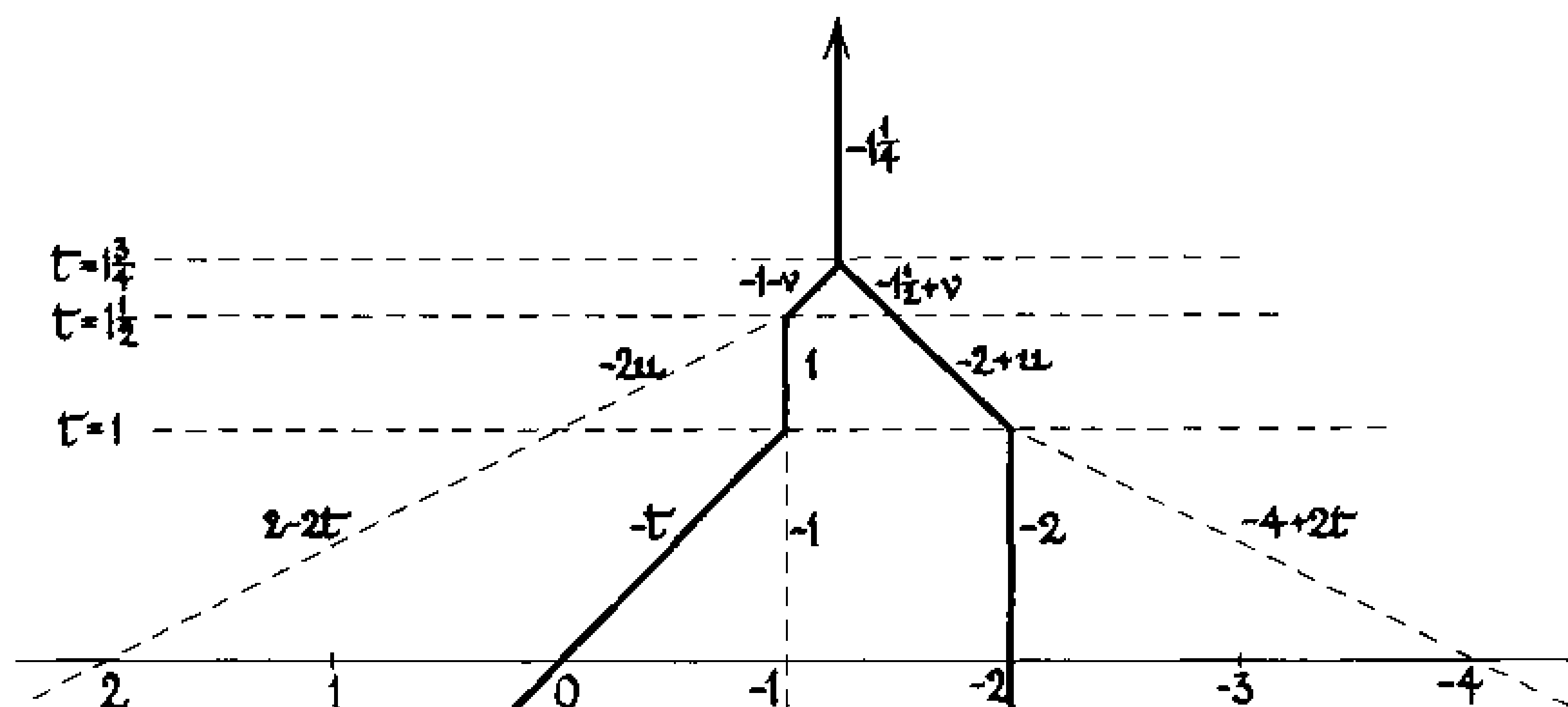



图 16. 一个扩展的热图.

然后通过它们读出斜率为

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -2 \end{array}$$

当可能的选择不止一个时，可将每一种选择作类似处理. 我们在上面讲过的例子是

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & & 1 & -2 & & & 1 \\ & & & & 0 & & & \\ 1 & & 1 & & & & \vdots & \\ & 2 & & 0 & & 0 & & 2 \end{array}$$

从而得出的直线（方程）为

$$0-1t,\ 2\ \ 2t,\ -1-0t,\ \ -2\ \ 0t,\ \ -4-(-2t).$$

# 静热学策略

我们并非总是能够从几个分支博弈的热图作出其和（博弈）的热图的. 例如，如果

$$G=\{4\,\|\,-1\},\ H=\{4,4\,|\,4\ -1,\ -4\}.$$

那么，$G$，$H$ 以及 $G+H$ 都将具有一模一样的热图. 然而，$G+G$ 的热图只是极简单的，经过 0 点的"船桅"，同 $G-H$ 的热图全然不一样. 像 $G$ 那样的，具有同样热图的两个博弈之和，其左方停止值可以是 0 与 4 之间的任何一数，而右方停止值则可以是 −1 与 0 之间的任何数目. 除非在热图之外再看看分支博弈的更为细致的结构，我们就不能希冀对混淆区间作出更确切的估计.

实际上，当博弈的分支为数极多时，最优策略也许极为复杂，你既没有时间也没有能力把最好的走法找出来. 然而，我们的静热学策略（简称 THERMOSTRAT）却能教给你一种相当简单的办法找到接近于最优解的"良好走法"，在大多数场合下能保你取胜. 静热策略能帮你觅得可在其中采取行动的"良好"分支，你只要看看它的热图即可采取合适的走法而无须考虑到其他分支. 尽管分支数极为庞大，静热策略能保证你获得"和"博弈的一个停止值，它同最优策略的差异不会超出"最炽热"的博弈的温度.

现在具体地讲一讲，对

$$A+B+C+\cdots$$

怎样来行使静热策略.

假设你是左方，并且已经掌握了 $A$，$B$，$C$，…的热图. 先作出**复合热图**，其右方边界为各分支的右方边界

$$B = \{-3, 9 \mid -5 \| -11 \mid -25\}$$

的热图已经画出，如图 18 所示. 你们将能看出 $B^{L_2} = 9 \mid -5$ 是决定 $T=5$ 处左方边界的那个选择. 从而所谓静热策略，其意思就是指，要从 $A+B+C$ 走到 $A+B^{L_2}+C$.

在本章增补材料中可以找到静热策略确能胜任愉快的证明.

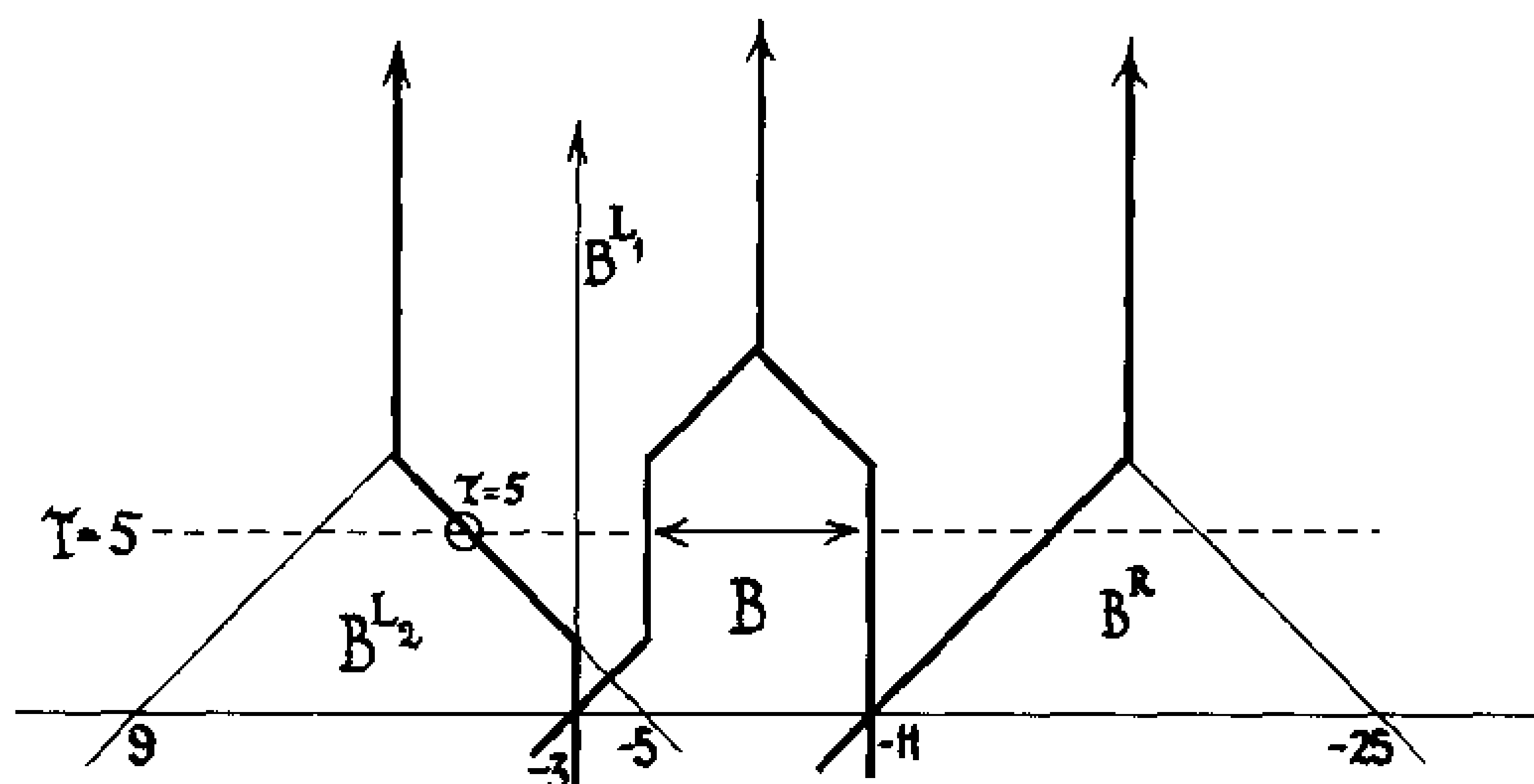



图 18. $B = \{B^{L_1}, B^{L_2} \mid B^R\} = \{-3, 9 \mid -5 \| -11 \mid -25\}$ 的热图.

## 实施静热策略，不理想的情况不多！

由于热图的边界线总是垂线或 45°角的斜线，因而博弈的左、右停止值与其平均值的差异至多等于博弈的温度，另外，

> 任何和博弈的温度不会超过其中任何一个分支博弈的温度.

由于静热策略达到了这个临界值，所以

> 当你玩一个有着数量很庞大的分支的和博弈时，静热策略与最优策略的差异将被最大温度界定.

譬如说，倘使左方玩的是一个有着一百万个分支的和博弈，而它们都具有整数停止值，并且最大温度至多等于 10，则静热策略将能保证他定能落在最佳停止值的 10 以内. 事实上，他若执行静热策略，则至多只有十次是在实施次优策略(使他的最后停止值略有减少)，即便该复合游戏能持续几百万步!

> 静热策略做到的是几百万次最优解，而只有几次次优解!

静热策略能独立地提供一种证法，证明

> 博弈的船桅值也就是它的平均值.

以及

> 若干博弈之和的船桅值等于各分支的船桅值之和.

因为它向每位局中人保证，值必定位于各船桅值之和的界定范围以内. 从而静热策略也可以称为

> 按平均值进行博弈.

静热策略具有这样的性质，当博弈由许多分支组成时，它将告诉你，

> 通常应在最热的分支中采取行动.

**在何处采取行动?**

若情况不是如此，它也能告诉你在更炽热的局势下所能采取的良好走法.

# 加热

冷却的对立面称为**加热**. 从形式上看，将 $G$ 加热温度 $t$ 便是下面的**积分**

$$\int^t G = \left\{ \int^t G^L + t \,\middle|\, \int^t G^R - t \right\},$$

除非 $G$ 是一个数，此时将有

$$\int^t G = G.$$

如同我们把博弈冷却下来，使它在其平均值时凝结，其时将会有某种临界温度，使之经受一种"相"的变化并"释放"出粒子那样，反过来我们将能从平均值加上这些粒子的加热状态而恢复原来的博弈 $G$.

让我们通过例题来看一看.

对"小放牛"局势

$G=$ ●—•—• $=2|-1$

可知

$$G_{1\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+*,$$

并且当 $t>1\frac{1}{2}$ 时，$G_t=\frac{1}{2}$.

故在温度 $t=1\frac{1}{2}$ 时，$G$ 要释放出粒子 $*$. 反之，若将 $G_{1\frac{1}{2}}$ 加温 $1\frac{1}{2}$，

则有 ●—•—• $=\frac{1}{2}+\int^{1\frac{1}{2}}*$.

又如，若

$G=$ •—•—●—•—• $=1\|0|-2$,

则在（唯一的）临界温度 1 处，有

$$G_1=0\|0|0=\uparrow.$$

所以

•—•—●—•—• $=\int^1\uparrow$.

再如，

$G=$ ●—○—●—○—●—○—● $=2|1\|0$

有两个临界温度，我们可求得

$$G_{\frac{1}{2}}=\left\{1\middle|1\middle\|\frac{1}{2}\right\}=\left\{1+*\middle|\frac{1}{2}\right\}.$$

但对很小的正数 $\delta>0$，有

$$G_{\frac{1}{2}+\delta}=\left\{1-\delta\middle|\frac{1}{2}+\delta\right\},$$

当 $\delta$ 趋向于 0 时，其“极限”为

$$G_{\frac{1}{2}+} = 1 \Big| \frac{1}{2}.$$

在温度 $\frac{1}{2}$，释放出的粒子是下面的差：

$$G_{\frac{1}{2}} - G_{\frac{1}{2}+} = 1 * \Big| \frac{1}{2} + -\frac{1}{2} \Big| -1$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} * \Big| *, \frac{1}{2} * \Big| 0 \Big\| 0 \Big| -\frac{1}{2}, * \Big| -\frac{1}{2} \right\}.$$

这一差可记为 $\varepsilon$.

下一个，即最后一个临界温度是 $t = \frac{3}{4}$，在此冰点，我们可求出

$$G_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} + *,$$

因此

$$G = ●—○—●—○—●—○—● = \frac{3}{4} + \int^{\frac{3}{4}} * + \int^{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

一般地说，博弈 $G$ 有几个临界温度

$$t_0, t_1, t_2, \cdots$$

其中 $G_t$ 与 $G_{t+\delta}$ 当 $\delta$ 趋向于零时的极限 $G_{t+}$ 有所不同，因而在温度 $t$，冷却的博弈将改变位相并释放出粒子

$$\varepsilon_t = G_t - G_{t+}.$$

于是我们得出西蒙 · 诺顿(Simon Norton)的博弈 $G$ 的**热释**：

$$G = G_\infty + \int^{t_0} \varepsilon_{t_0} + \int^{t_1} \varepsilon_{t_1} + \cdots,$$

其中 $G_\infty$ 就是平均值，一些 $\varepsilon$ 是释放出来的(无穷小)粒子，而最大的 $t_i$ 是 $G$ 的自身温度.

但应注意：尽管热图的每一个角落指明了位相的改变，但也会有**潜在**的位相改变. 在小放牛局势中也可以举出一些例子，譬如

$$G = ●—○—•—•—•—• = \{3 | 1 * \| -1 * | -2 *, 0, -3\}$$

它要经历一个从

$$G_{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Big| 0, * \quad 到 \quad G_{1\frac{1}{2}+} = \frac{1}{2} \Big| 0$$

的位相转移，而在其热图中是被掩盖了的(见图 19).



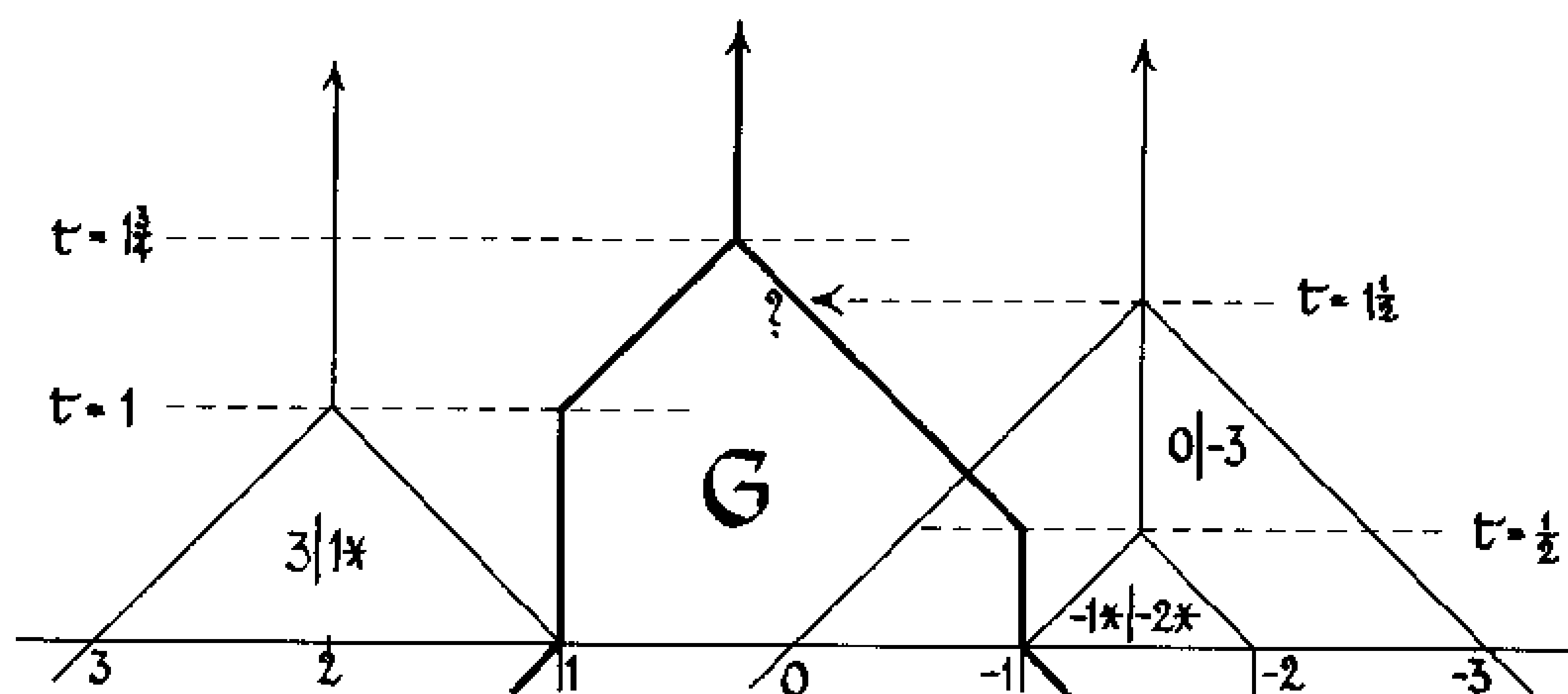



图 19. $\{3|1*\ \|\ -1*|-2*, 0|-3\}$的热图.

一个常见的例子是

$$\int^{3}\uparrow+\int^{5}\uparrow.$$

它的热图同其中较热分支的热图完全一样,掩盖了 $t=3$ 的相位变化.

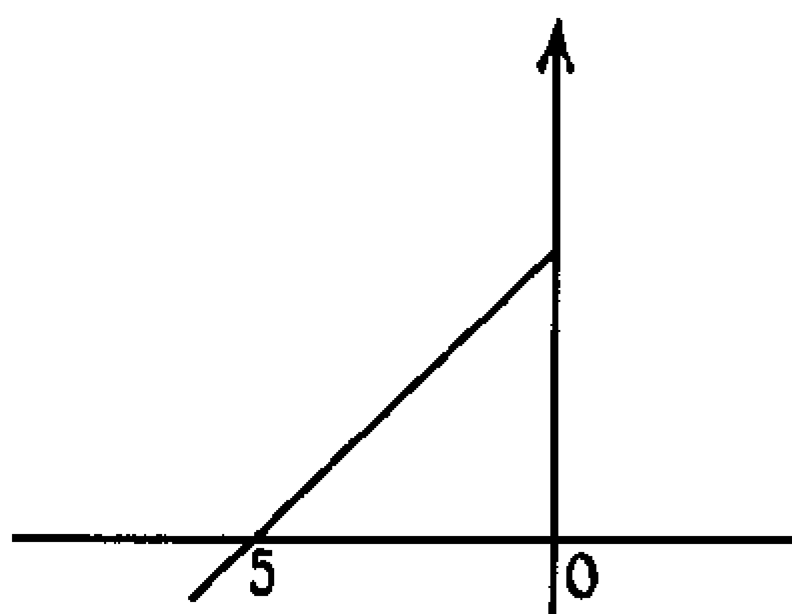



图 20. $\int^{3}\uparrow+\int^{5}\uparrow$ 的热图,同样也是$\int^{5}\uparrow$ 的热图.

## 激励显示在哪里?

如果左、右边界线在相交处都是斜线,这就暗示着该博弈可能是公正的. 在最简单的情况

下，此时在冰点处释放出来的粒子将是 $*$.

此种情况发生在

$$G = \bullet\!-\!\bullet\!-\!\bullet\!-\!\circ\!-\!\bullet = 2* \| 0 | -1$$

的场合，它的热图见图 21 所示.

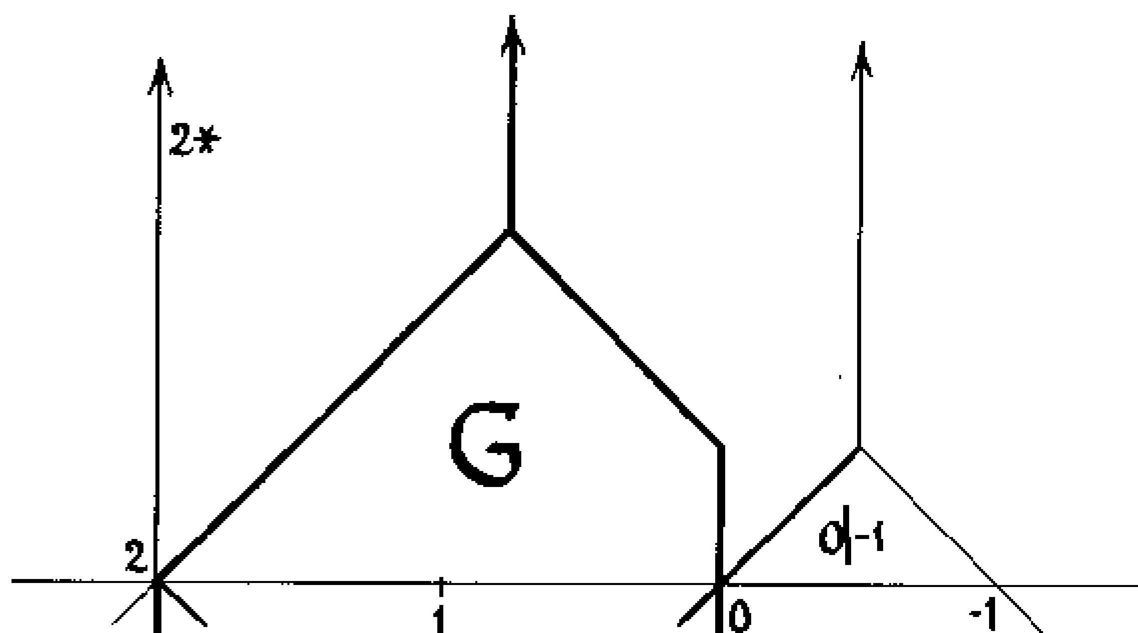



图 21. $\{2* \| 0 | -1\}$的热图.

但如果在冰点处，右方边界线是根垂线，则博弈就有可能是右方有刺激的，而最后释放出的粒子将是一个正无穷小量，在通常情况下是一个"睇你". 例如，

博弈

$$H = 5 \| 1 | -9$$

的温度为 4，而我们可求得

$$H_4 = 1 \| 1 | -1 = 1 + \{0 \| 0 | -2\} = 1 + \uparrow_2.$$

由于这是唯一的临界温度，故而有

$$H = 1 + \int^4 +_2,$$

它是一个有刺激的博弈，其热图为图 22 所示.

然而，我们将看到，在某些情况下，博弈的性态是由恰在冰点以前释出的粒子所控制的，其时，对立的形容词（有刺激的或者公平的）将显得更为确切.

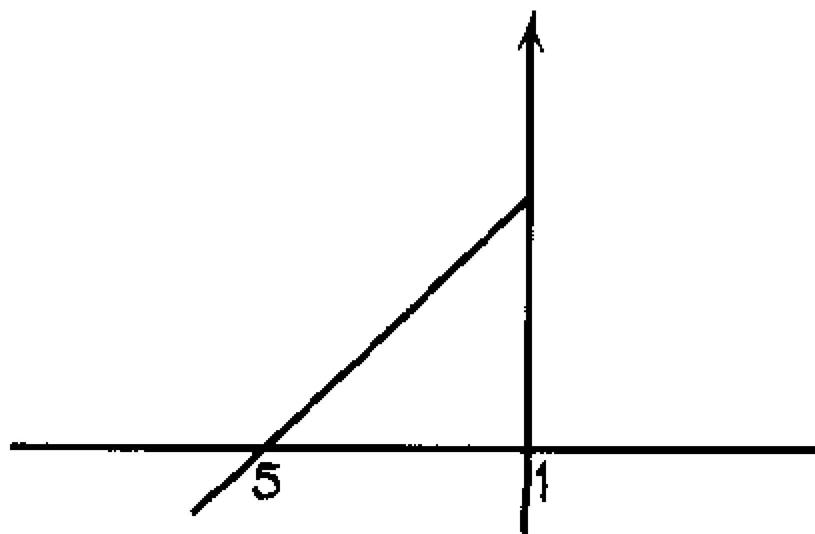



图 22. $\{5 \| 1 | -9\}$的热图.

# 怎样把无穷小值出售给你的唯利是图朋友

按商业名词进行思考的人经常把停止局势同金钱联系，而不去同自由步数联系. 这种铁石心肠的生意人一般对无穷小博弈不感兴趣. 他们问道："如果那里头没有钱，何必去斤斤计较谁能够走最后一步？"对此，我们要正言相告：

> 除非你能彻底了解无穷小量的一切知识，否则你就不能全面了解热博弈.

道理很清楚，因为任何热博弈都可由加热无穷小量而得. 尽管不同加热的无穷小量之和可能异常复杂. 有时，即使一个简单加热的无穷小量在求出炽热游戏的最佳走法时也是能够起决定作用的.

作为实例，让我们考虑博弈

$$G-G+\{-4|\ 20\},$$

其中

$$G=8|4\|-4|-20$$

的热图为图 23，有着平均值 $-3$，温度 9，而其冰点有着两条斜线，这是我们通常同公正博弈打交道时遇到的情况.

然而，如果你不进行仔细观察，你就会看不出 $G$ 同下面的有刺激的近似有多大差异. 后者的

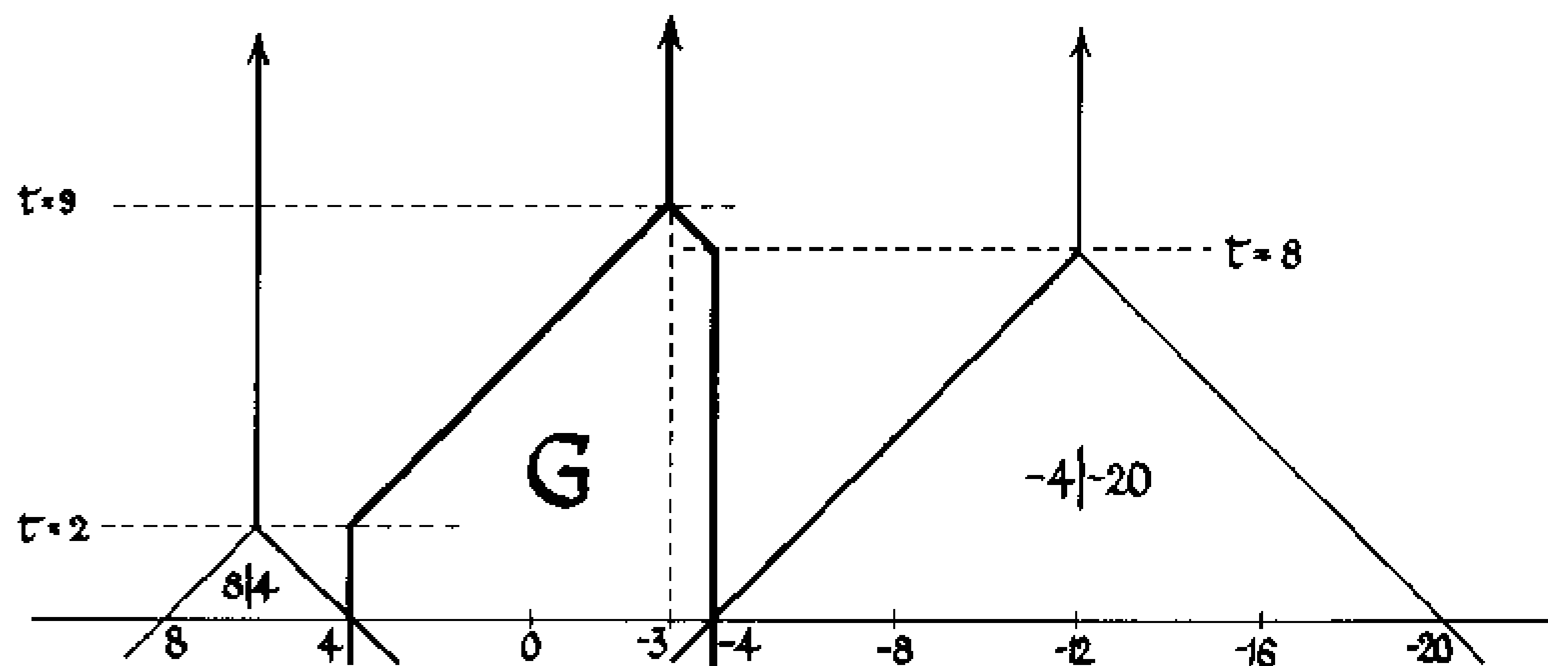



图 23. $\{8|4\|-4|-20\}$的热图.

热图(图 24)同 $G$ 的热图对比时,对一切大于 1 的温度至多只有 1 个单位的差异.

由于取作近似的博弈满足

$$H-H+\{-3\ \ -21\}_x=-18+\int^{9}(\Uparrow-\uparrow+*),$$

原来博弈的性态就类似于

$$\Uparrow+\uparrow+*,$$

这样一来,左方就必须谨慎小心,不能走到 $\uparrow+*$(它不是正值),而必须走到 $\uparrow+\uparrow$. 所以,对原来的博弈而言,左方的最佳行动不是走到

$$G+\{8|4\}+\{-4|-20\},$$

而是应该走到　$G+G-4$.

而右方从

$$G+G+G$$

走到　$G+G+\{-4|-20\}$

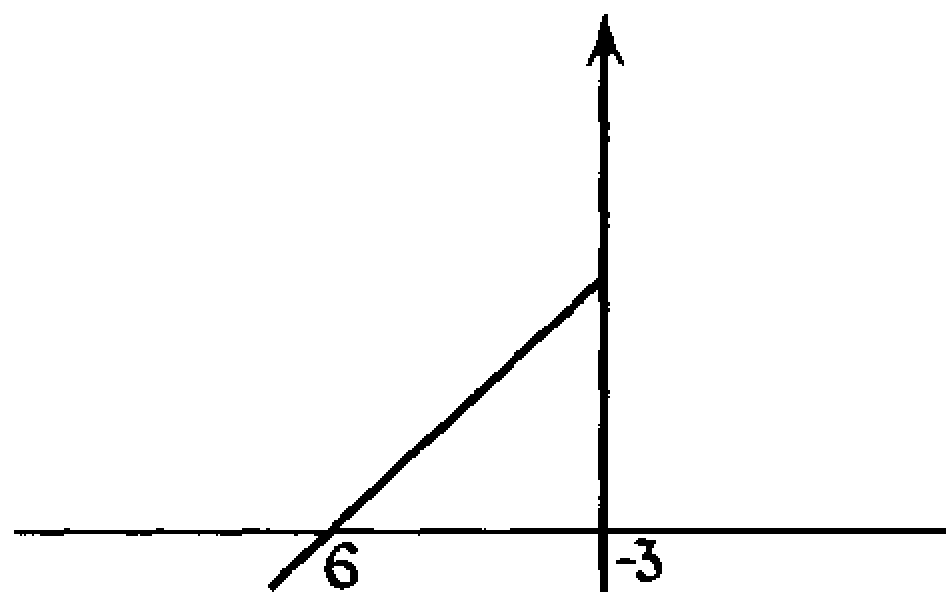



图24. $H=-3+\int^{9}\uparrow=\{6\|-3|-21\}$ 的热图.

的行动在任何严格意义上来说不能算是有刺激的,但还是足够大胆,能迫使左方放弃他的传统防卫策略以便使他在一个热博弈(温度大于 2)中能走出最后一步.

## 尼姆,热博弈中的遥远度与悬数

另外再举一个例子,如果你理解了纯无穷小量的尼姆游戏,那么你对以下事实是不会感到十分吃惊的:在热博弈之和

$$\int^{100}*5+\int^{99}*6+\int^{98}*8$$

中,唯一能取胜的行动是在最冷的博弈中,即走到

$$98+\int^{98}*3.$$

按平均数考虑问题的任何策略都不可能发现它,因为较热的行动掩盖了它. 但由于 98 与 0 之间存在着一个很大的温度差,而 98 与 100 之间的温度差则小得多,于是着眼于无穷小的思考方法胜过了热学的思考方法. 在这种局势下左方能肯定获得一个至少等于 89 的停止值,但只限于上述的开局法. 而任何其他开局法将使右方获得 −89 或较此值更好.

通过我们将在本书第 9 章中加以介绍的遥远度与悬数等概念也能制造出热博弈. *

考虑**不对称,不均匀**加热:

$$^{x}\!\!\int^{y} 0 = 0,$$

$$^{x}\!\!\int^{y} * = x \mid -y,$$

$$^{x}\!\!\int^{y} *2 = \left\{x, x + {}^{x}\!\!\int^{y} * \;\middle|\; -y, -y + {}^{x}\!\!\int^{y} *\right\},$$

………………………………………………………

$$^{x}\!\!\int^{y} *n = \left\{x + {}^{x}\!\!\int^{y} *k \;\middle|\; -y + {}^{x}\!\!\int^{y} *k\right\}_{k=0,1,2,\cdots,n-1}.$$

这其实是一种特殊的尼姆游戏,其条件是左方在每步行动中收集起 $x$ 点,而右方在每步行动中收起 $y$ 点.

在一个诸如下面那样的尼姆游戏

$$^{100}\!\!\int^{99} *5 + {}^{100}\!\!\int^{99} *6 + {}^{100}\!\!\int^{99} *8$$

中,每个局中人的首要目的当然是想在尼姆游戏中获胜,但除此之外,左方的想法是尽量拖延这局游戏,右方则想尽量缩短它. 混淆区间为 100 到 $-99$,由相应尼姆游戏的悬而不决与遥远度函数来修正之,很明显,

> 你将不可能懂得热博弈的一切知识,除非你能很好掌握一大批离题很远的其他知识.

## 过度加热

其他种种加热形式有时也会出现. 如果你加热某个博弈 $G$,其量为 $X$ 而根本不作任何保留,则就产生一种我们将称之为**过度加热**(简称**过热**)的现象,对此,我们将记之为

---

* 译者注:可参考本书第 9 章第 290 页. 这是后文才提到的内容,却在这里就提到. 不合我国读者的阅读习惯,实在令人恼火. 然而这却是本书三位作者的特殊风格!

$$\int_0^X G.$$

于是有

$$\int_0^X G = \left\{X+\int_0^X G^L \middle| -X+\int_0^X G^R\right\},$$

即使 G 的值是一个普通"数"时亦然. 最常见的情形是 $X=1$, 然而 $X$ 也可以是任何正的博弈值.

现在让我们看看, 当我们用 1 来过度加热时会发生些什么, 自然我们可以用略加简化的记号 $\int G$ 来代替 $\int_0^1 G$.*

我们将有

$$0=\{\ |\ \},\qquad \text{于是}\quad \int 0=\{\ |\ \}=0,$$

$$1=\{0|\ \},\qquad \text{于是}\quad \int 1=\{1+\int 0|\ \}=1|\ =2,$$

$$2=\{1|\ \},\qquad \text{于是}\quad \int 2=\{1+\int 1|\ \}=3|\ =4.$$

依此类推, 经此运算后, 所有整数都翻了一番.

$$\frac{1}{2}=\{0|1\},\qquad \text{于是}\quad \int\frac{1}{2}=\{1+\int 0|-1+\int 1\}=1|1=1*,$$

$$\frac{1}{4}=\left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\},\qquad \text{于是}\quad \int\frac{1}{4}=\left\{1+\int 0\middle|-1+\int\frac{1}{2}\right\}=1|*,$$

$$\frac{3}{4}=\left\{\frac{1}{2}\middle|1\right\},\qquad \text{于是}\quad \int\frac{3}{4}=\left\{1+\int\frac{1}{2}\middle|-1+\int 1\right\}=2*|1,$$

$$\frac{1}{8}=\left\{0\middle|\frac{1}{4}\right\},\qquad \text{于是}\quad \int\frac{1}{8}=\left\{1+\int 0\middle|-1+\int\frac{1}{4}\right\}=1\|0|-1*.$$

我们也能对不是数的值过度加热:

$$\pm 1=\{1|-1\},\qquad \text{于是}\quad \int\pm 1=\{1+\int 1|-1+\int -1\}=3|-3=\pm 3,$$

$$*=\{0|0\},\qquad \text{于是}\quad \int *=\{1+\int 0|-1+\int 0\}=1|-1=\pm 1,$$

$$\uparrow=\{0|*\},\qquad \text{于是}\quad \int\uparrow=\{1+\int 0|-1+\int *\}=1\|0|-2.$$

---

* 译者注: 此处的定积分记号当然与一般高等数学中所讲的定积分毫无共同之处, 请勿受它蒙蔽.

过度加热能保持求和性质,即:

$$\int_0^X(A+B+C+\cdots)=\int_0^X A+\int_0^X B+\int_0^X C+\cdots,$$

从而须将平均值乘上一个常数因子,特别,由于$\int_0^1 1=2$,所以$\int_0^1 x$的平均值是$2x$,这对一切数$x$都成立.图25将通过一些热图来说明这一点.它们不难相继求出,例如,底下的一排可以从

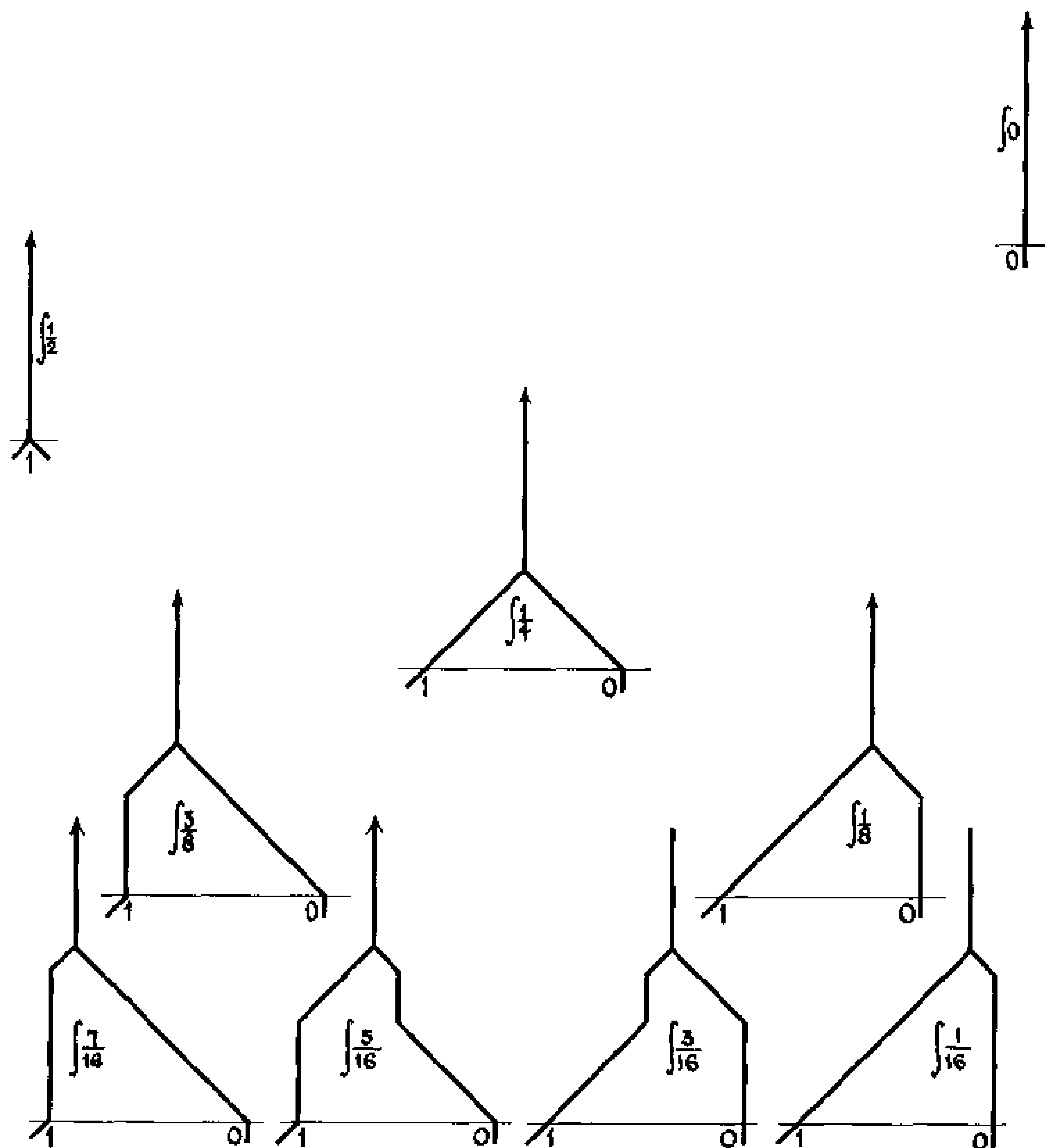



图25. $x=\frac{1}{2},\frac{7}{16},\frac{3}{8},\frac{5}{16},\frac{1}{4},\frac{3}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{16},0$时$\int_0^1 x$的热图.

上面最靠近它的两个推导出来. 你也可以求出 $\int(1-x)$ 的热图, 只要把 $\int x$ 的热图对通过 1 的垂线反射一下就行.

图 26 是把所有这些热图放在一起, 你可以看一看当 $x$ 变化时, $\int x$ 的热图的变动情况.

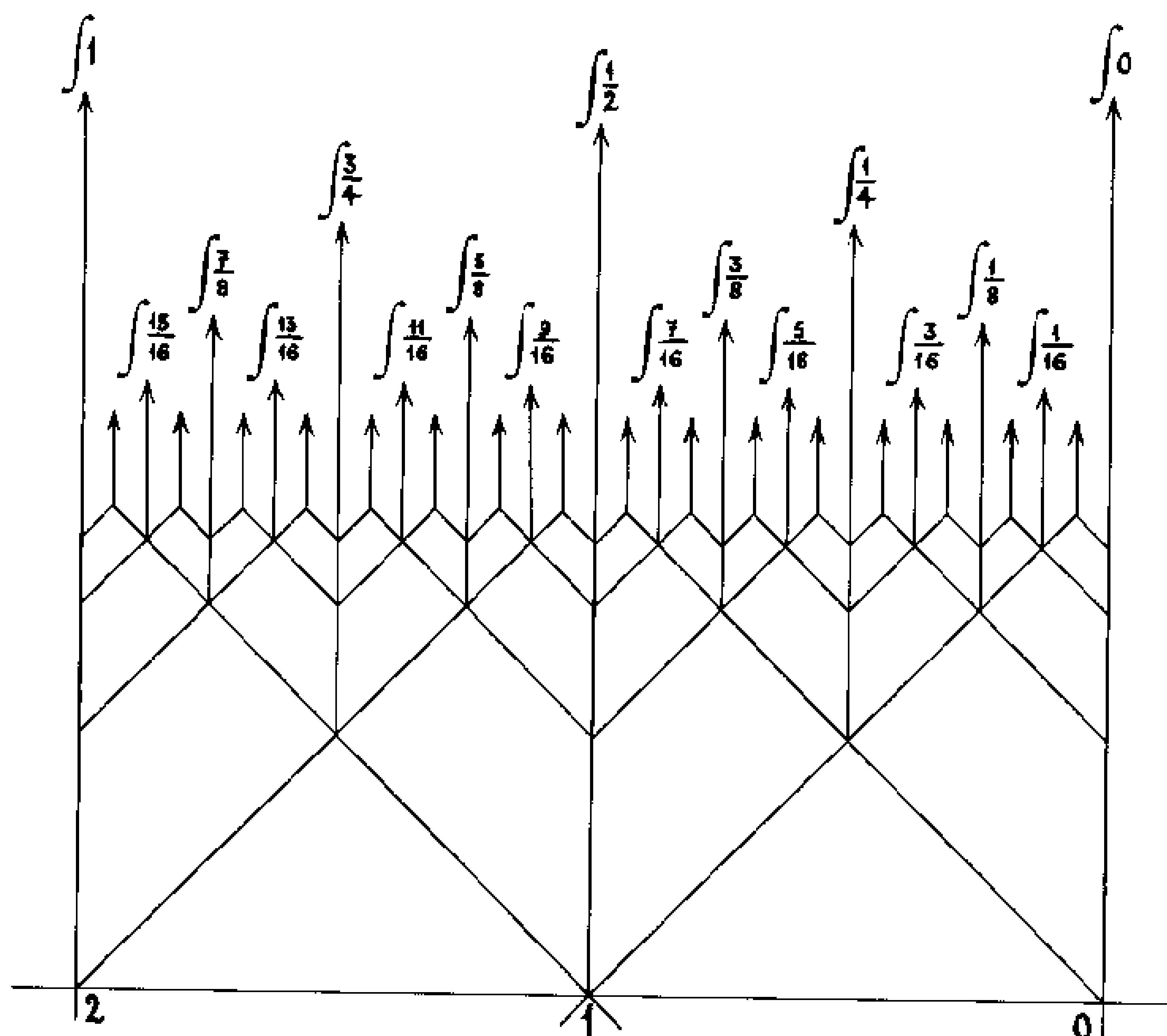



图 26. 数经过度加热而得出的热图丛林.

类似于下面这样的序列

$$\int \frac{1}{2} = 1*,$$

$$\int \frac{3}{4} = 2*|1,$$

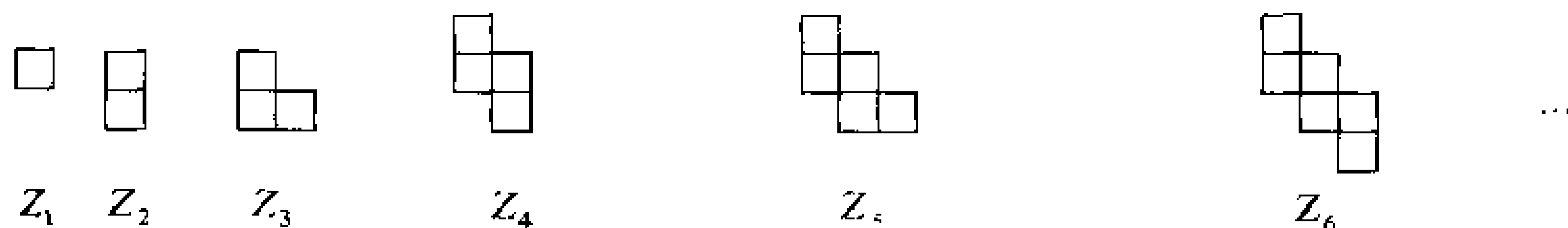
$$\int \frac{7}{8} = 3*|2\|1,$$

$$\int\frac{15}{16}=4*|3\|2\|\|1,$$

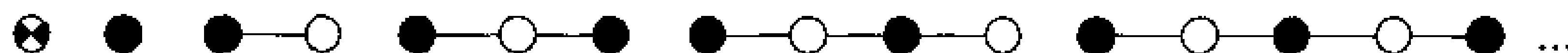
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

会在某些游戏中出现. 下面有一些实例.

骨牌游戏的锯齿形序列:




与小放牛游戏中某些局势的序列



有同样的值.

于是有

$$Z_{2n+1}=\pm(Z_0+Z_{2n-1},Z_2+Z_{2n-3},Z_4+Z_{2n-5},\cdots),$$

$$Z_{2n+2}=\{Z_0+Z_{2n},Z_2+Z_{2n-2},Z_4+Z_{2n-4},\cdots|Z_1+Z_{2n-1},Z_3+Z_{2n-3},Z_5+Z_{2n-5},\cdots\}$$

从而引出下列表格

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z_n$ | 0 | 0 | 1 | $*$ | $1\|0$ | $\pm1$ | $2\|*$ | $\pm1*$ | $2\|1\|\|0$ | $\pm(2\|*,2\|0)$ | $1*$ | $Z_9+*$ | … |

让我们把

$$Z_8=2|1\|0 \quad 同 \quad \int\frac{3}{8}=2|1*\|*.$$

比较一下,可见它们的差只是无穷小,因而 $Z_8$ 只不过是 $\int\frac{3}{8}$ 的**无穷小改变**(无穷小位移)而已,我们将它记为

$$Z_8 \quad 是 \quad \int\frac{3}{8}-\text{ish}.$$

利用同样的记法,我们得出

$$Z_{8n+1} \quad 或 \quad Z_{8n+3} \quad 是 \quad 0-\text{ish}, \quad 即 \quad \int 0-\text{ish},$$

$$Z_{8n-1} \quad 或 \quad Z_{8n-3} \quad 是 \pm1-\text{ish}, \quad 即 \int *-\text{ish},$$

$$Z_{8n+2} \quad 是 1-\text{ish}, \quad 即 \int \frac{1}{2} - \text{ish}.$$

$$Z_{8n-2} 是 2 \mid 0-\text{ish}, 即 \int \frac{1}{2} * - \text{ish},$$

而 $Z_{4n}$ 将给出下面的有趣序列

$$Z_4 = 1 \mid 0, Z_8 = 2 \mid 1 \parallel 0, Z_{12} = \{3 \mid 2 \parallel 1 \parallel\mid 0\} - \text{ish}, Z_{16} = \{4 \mid 3 \parallel 2 \parallel\mid 1 \parallel\parallel 0\} - \text{ish}, \cdots$$

把这些东西同以下的序列进行比较

$$\int \frac{3}{4} = 2 * \mid 1, \int \frac{7}{8} = 3 * \mid 2 \parallel 1, \int \frac{15}{16} = 4 * \mid 3 \parallel 2 \parallel\mid 1, \int \frac{31}{32} = 5 * \mid 4 \parallel 3 \parallel\mid 2 \parallel\parallel 1,$$

并注意到 $\int \frac{1}{2} = 1 *$ 是 1—ish，可见

$$Z_4 是 \int \frac{1}{4} - \text{ish}, Z_8 是 \int \frac{3}{8} - \text{ish}, Z_{12} 是 \int \frac{7}{16} - \text{ish}, Z_{16} 是 \int \frac{15}{32} - \text{ish}.$$

图 27 的那种骨牌游戏局势，其值为

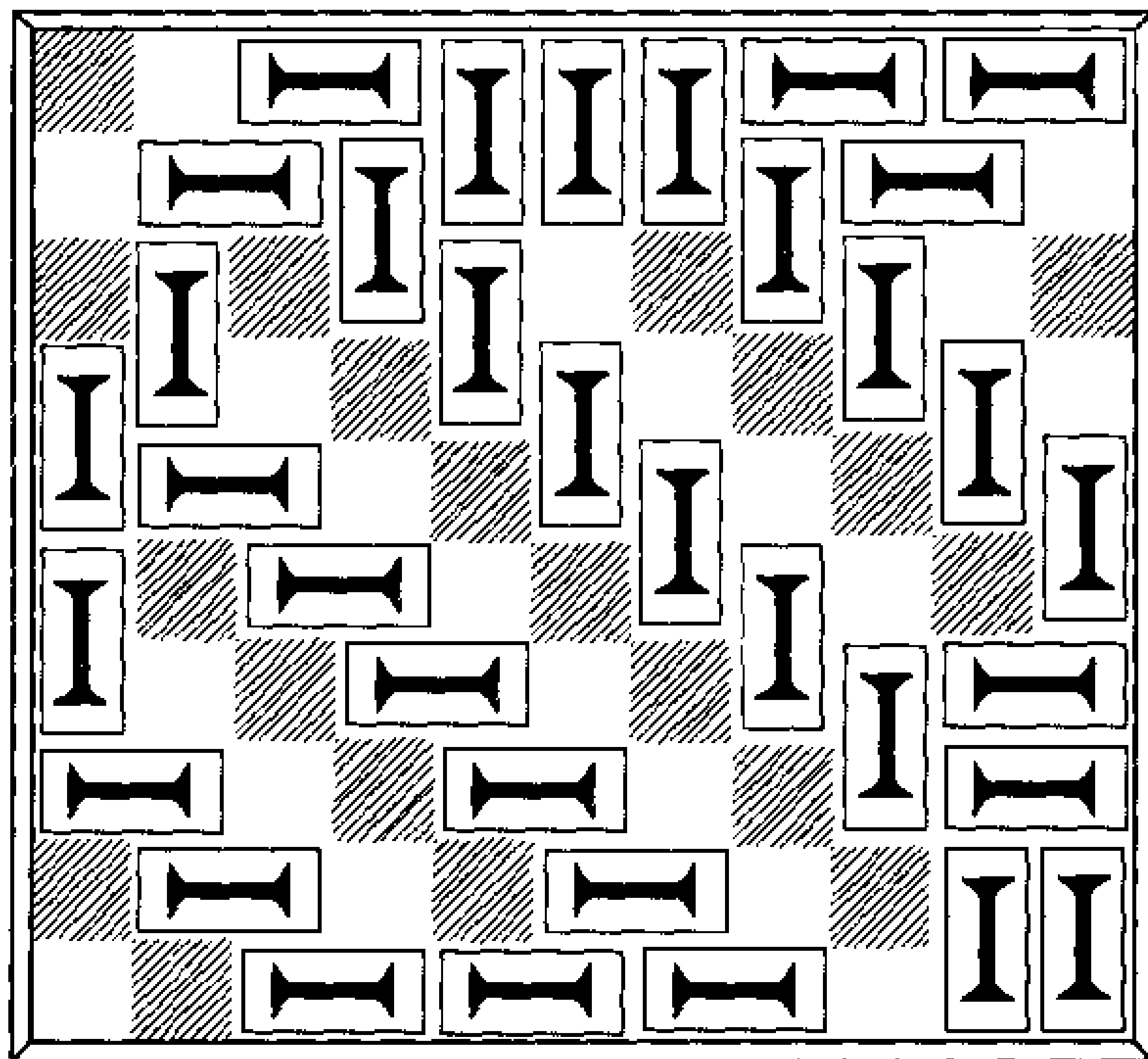


图 27. 左方第 18 步动作以后的骨牌游戏局势.

$$\frac{1}{2}+*+Z_7-Z_{14}-Z_8+*.$$

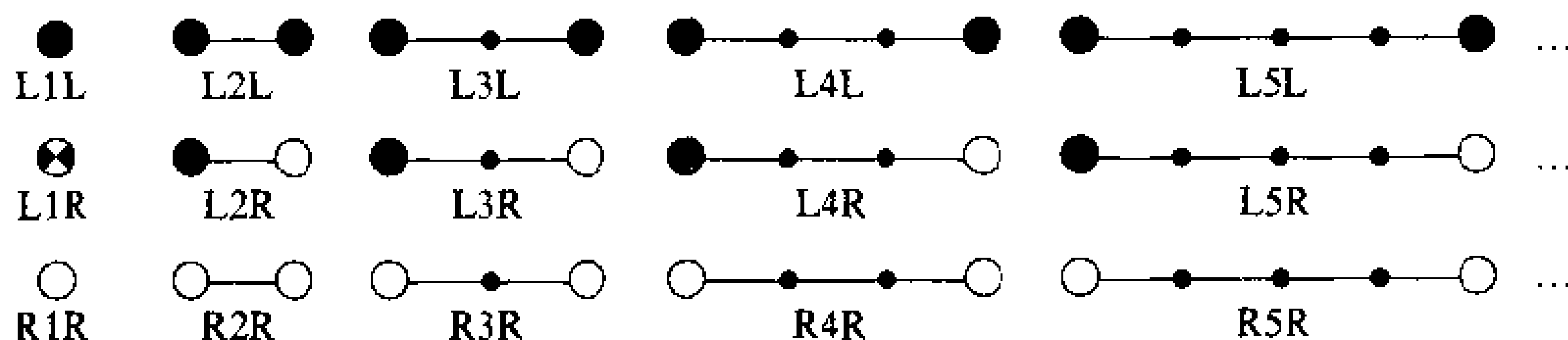
它是

$$\frac{1}{2}+\int\left(*+\frac{1}{2}*-\frac{3}{8}\right)\text{-ish 的，即}\frac{1}{2}+\int\frac{1}{8}\text{-ish.}$$

虽然 $\int\frac{1}{8}$ 肯定是正的，它有着右方停止值 0，所以存在着 $\int\frac{1}{8}$－ish 游戏而它却不是正的. 然而，在我们的这个例子中，由于 $\frac{1}{2}$ 的力度要胜过"ish"，所以左方必定能赢，即使没有轮到他先走也能赢. 甚至没有这个 $\frac{1}{2}$，如果轮到左方先走，他也能赢，因为 $\int\frac{1}{8}$ 的左方停止值是 1，而这不会受到"ish"的影响.

## 冷却孩子们的宴会

上一章结尾处提到的孩子们的宴会实际上不过是一个在圆形图上游玩的小放牛游戏，它在经过几步之后就将被以下一系列长链形式所替代：




这时，只是在冷却 1 以后，我们才能看清其结构. 实际上

$$(\text{L}n\text{R})_1\text{ 是}\begin{cases}0-\text{ish，当 } n=6k+1,6k+2,6k-3;\\ \pm1-\text{ish，当 } n=6k,6k-1,6k-2.\end{cases}$$

$$\text{而}(\text{L}n\text{L})_1\text{ 是}\begin{cases}2-\text{ish，当 } n=6k+2;\\ (3|1)-\text{ish，当 } n=6k-1.\end{cases}$$

若为其他情况，则是

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1－ish | (2\|1)－ish | (3\|2\|\|1)－ish | (4\|3\|\|2\|\|\|1)－ish | … |
| 当 $n=1$ 或 3 | 4 或 6 | 7 或 9 | 10 或 12 | … |

所有这些冷却后的值都是 $\int X$—ish(对合适的 $X$ 而言),如下表所示:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 对$(LnL)_1$ 适宜的 $X$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $1*$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | 1 | $\frac{7}{8}$ | $\frac{15}{16}$ | $1*$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{31}{32}$ | 1 | … |
| 对$(LnR)_1$ 适宜的 $X$ | 0 | 0 | 0 | * | * | * | 0 | 0 | 0 | * | * | * | 0 | 0 | … |

## 你怎样使一个宴会冷却一度呢?

对此,明显的回答是必须坚持,每位孩子都要给对面的一位异性儿童带上一件合适的礼物.我们建议每个女孩带上一单位蓝色的伐木戏手杖而每个男孩带上一单位红色手杖:

"男孩给蓝的,女孩给红的"

但是坐在 1 只或 2 只空位上的孩子可以免除这种带礼品的要求,因为

L1L, L1R, R1R, L2L, L2R, R2R

已经是数值的 ish 了,不应该进一步冷却.

# 增 补

## 三个"小放牛"游戏引理



由相应结点上面(左方)或下面(右方)的字母所标记的走法建立起这些恒等式. 在中间的附图中,结点 $D$,$E$ 不一定出现.



图 28. 5结点"小放牛"链状博弈的值.

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>2</td><td>4|2||1*|*</td><td>4|3||1*|*</td><td>4|2||±1</td><td>3|2||1|0</td><td>3|2||±1,1*|*</td><td>1</td><td>4|2||0,1|-2</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||1*|*</td><td>4|2||±1*</td><td>4|3||±1*</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||-1,1|-2</td><td>3|1||*|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>4|3|1*|*</td><td>4|3||±1*</td><td>1*</td><td>4|1,4|1*||±1*,1|-1*</td><td>3|2||0</td><td>3|2||-1</td><td>3|1||*|-1*</td><td>4|1*,2||*|-2*</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||±1</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>4|1,4|1*||±1*,1|-1*</td><td>1</td><td>3|2||0|-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>3|1||0|-2</td><td>4|1||*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||1|0</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||0</td><td>3|2||0|-1</td><td>1</td><td>2|1||0</td><td>2|1||0|-1</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||1|-2,-1</td><td>3|2||-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3|1||*|-2</td><td>3|1||*|-1*</td><td>3|1||0|-2</td><td>2|1||0|-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>0</td><td>3|1||-1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||0,1|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td><td>4|1*,2||*|-2*</td><td>4|1||*|-3</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td><td>3|1||-1*|-3</td><td>*</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||0|-2</td><td>1*</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1,0|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3*||0|-1</td><td>3*||0|-2,*|-2</td><td>3|0,3|*,2*|1*||*|-1*,0|-2</td><td>2*|1*||0|-2</td><td>2|1||-1*</td><td>±2*</td><td>2|0,1||-1|-2</td><td>3|0,2*|1*||-1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>2*||0|-1</td><td>2*||-1|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||-1|-2</td><td>±1*</td><td>1*||-1|-2</td><td>0||-1|-2</td><td>2|0,1*|*||-2|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||0</td><td>3|1|||0|-3,1|0||-1|-2</td><td>3|1*||*|-2*</td><td>±(3|0,3|*)</td><td>2|1||*|-1*,0|-2</td><td>2|0||-1*|-2*</td><td>2|0||-1*|-3</td><td>3|*||-1|-4</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||0,0|-3</td><td>3|1||*|-3,-1*|-2*</td><td>±(2|1)*</td><td>2*|*||-1*|-3</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||0|-3,*|-3,-1*|-2*</td><td>-1*</td><td>2*|*||-1*|-4,-2</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||-1|-2</td><td>±(3|1)</td><td>3|*,2*|1*||-1|-3</td><td>3|0,2|1||0|-1|||-1|-3</td><td>2|1||-2*</td><td>2|0,2|*||-3*</td><td>2|0||-2|-3</td><td>3|1,3|*,2|1|0|-1|||-1|-4,-1*|-4</td><td></td></tr>
<tr><td>±(2|1)</td><td>2|1||-1|-3</td><td>3|0,0||-1|-3</td><td>0||-1|-3</td><td>1|0||-2*</td><td>1|0||-3*</td><td>*|-1*,±1||-2|-3</td><td>0,2|-1||-2|-4</td><td></td></tr>
</table>

表 1．有 6 个结点的“小放牛”链状博弈的值．



图 29. 各式各样的“小放牛”局势之值.

## 一部“小放牛”游戏辞典

在图 3 中我们已给出一、二、三、四个结点的“小放牛”链状博弈之值. 图 28 给出了具有五个结点的链状博弈之值，而表 1 则是有着六个结点的链状博弈之值. 这种链的每一个或其负值都可能出现，我们已列出所有一切组合. 查表时可以先在表的头上查出三个结点，再在表的右面查阅另外三个结点；箭头则指明连接. 在图 29 中，则列出了一些其他庞杂的局势.

## 避开“数”定理的证明

只要证明下列事实就够了：如果 $x$ 等于一个数，而 $G$ 不是，若
$G+x \,|\!\!\triangleright\, 0$，则有一些 $G^L+x \geqslant 0$.
若将 $x$ 代之以一个等价的博弈，上述语句将不受影响，所以我们可假定 $x$ 已是最简形式. 从 $G+x$ 出发的良好走法必定是走到 $G+x^L \geqslant 0$ 的，否则必有一些 $G^L+x \geqslant 0$. 如果没有 $G^L+x \geqslant 0$ 的话，设

$$x > x^L > x^{LL} > x^{LLL} > \cdots$$

为 $x$ 的相继左方选择的有限递减序列. 如果 $y$ 是它们中间的最小者而有着

$$G+y \geqslant 0,$$

则因为 $G$ 不等于数 $-y$，我们就有 $\quad G+y > 0$，
从而有一些 $G^L+y \geqslant 0$，因为我们不可能有 $G+y^L \geqslant 0$ 之故. 于是，对这个 $G^L$，将有

$$G^L+x \geqslant G^L+y \geqslant 0.$$

此项结果可以反复利用以证明：若 $x,y,z,\cdots$ 都是数，而 $G,H,K,\cdots$ 却不是，如果

$$x+y+z+\cdots+G+H+K+\cdots \,|\!\!\triangleright\, 0,$$

则我们肯定能在 $G,H,K,\cdots$ 中为左方找到一个有着良好走法的分支.

## 热策略何以能起作用

我们可以断言，对任意给定的 $T$，左方必定能保证取得至少

$$R_T(A)+R_T(B)+R_T(C)+\cdots-T$$

如果右方先走的话，而如果他自己先走，则至少有

$$R_T(A)+R_T(B)+R_T(C)+\cdots+W_T.$$



因若假定右方从

$$A+B+C+\cdots \text{走到} A^R+B+C+\cdots,$$

则由数学归纳法，左方保证至少取得

$$R_T(A^R)+R_T(B)+R_T(C)+\cdots+W_T(A^R).$$

图 30 表明

$$R_T(A^R)+W_T(A^R)\geqslant R_T(A)-T,$$

而不论 $T$ 同 $A$ 的温度比较时谁大谁小.

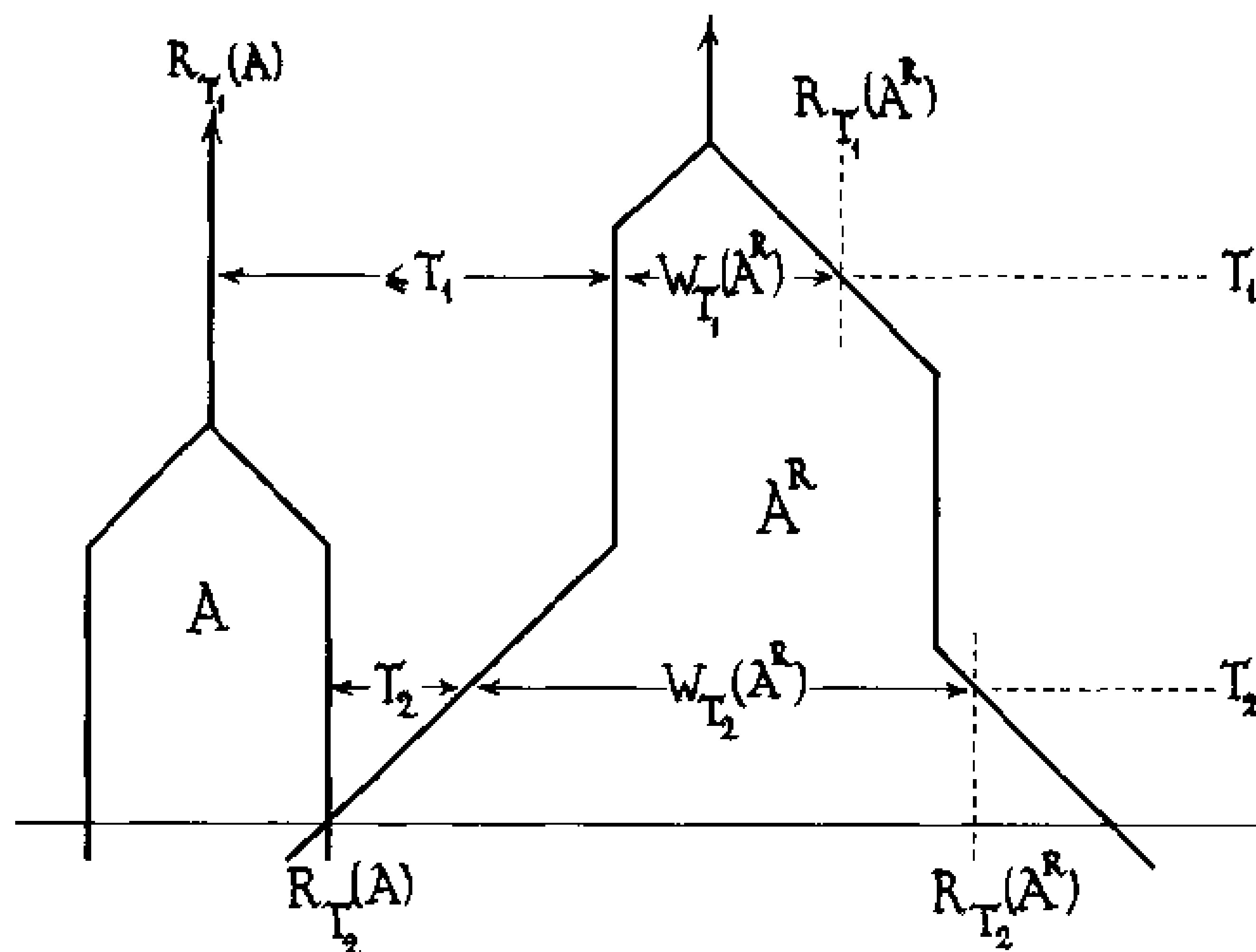



**图 30.** 当右方先走时.

如果轮到左方先走，我们可以先假定某个分支至少具有 $T$ 的温度，于是，在温度 $T$ 最宽的某个分支，例如 $B$，其温度至少为 $T$，因为温度较低的那些博弈分支在 $T$ 处的宽度为 0 之故. 在这种情况下，热策略将告诉左方在 $B$ 中行使 $T$-动作，即从

$$A+B+C+\cdots \text{走到} A+B^L+C+\cdots,$$

其时，数学归纳法将可保证他至少取得

$$R_T(A)+R_T(B^L)+R_T(C)+\cdots-T.$$

而图 31 表明

$$R_T(B^L)-T=R_T(B)+W_T.$$

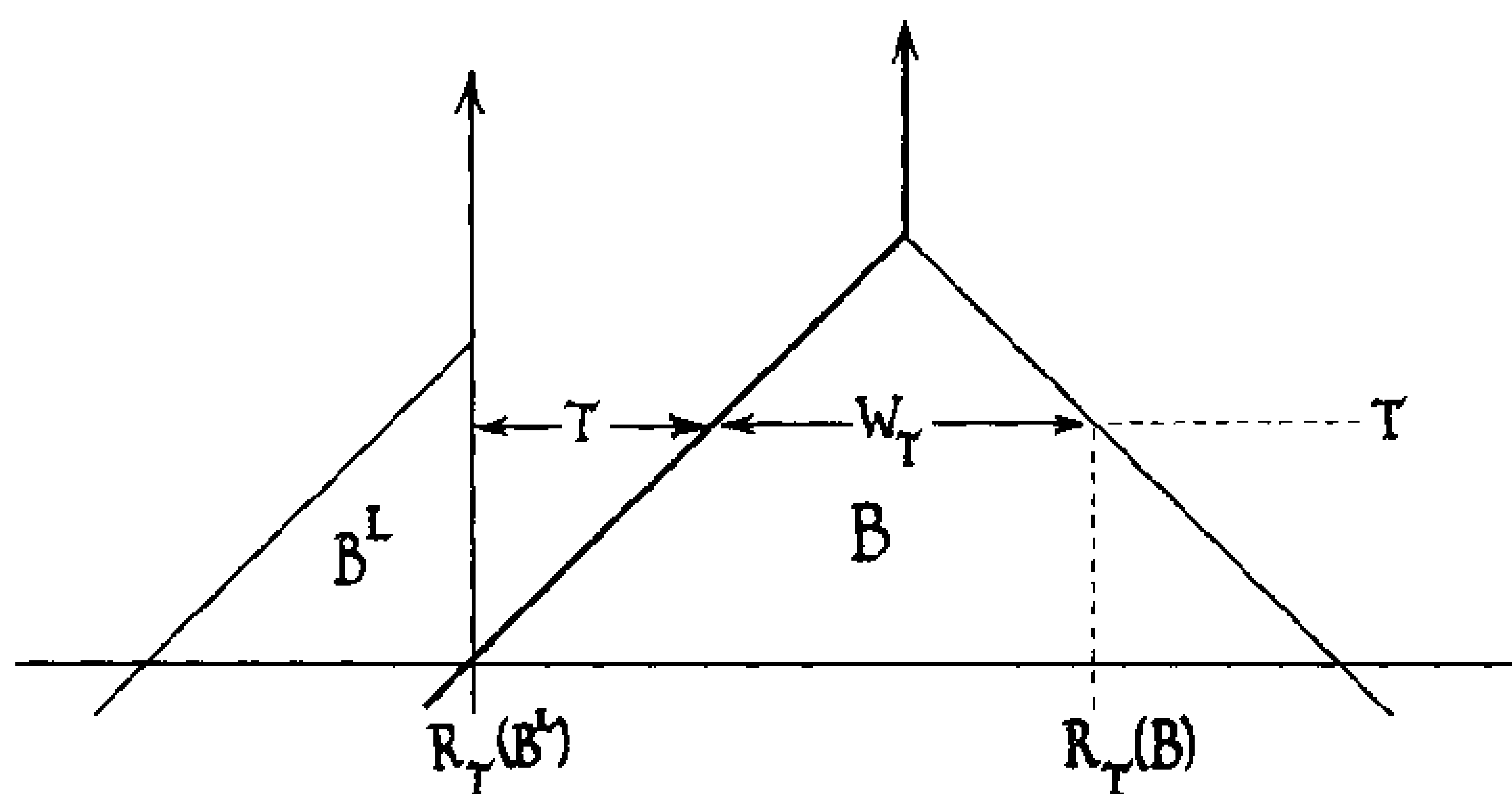



图 31. 当左方先走时.

但是，如果每个分支的温度都严格小于 $T$，这个论证就不对了. 在此种情形下，左方在继续进行下去之前，应当把他的恒温器重新定到 $T_0$，即任一分支中最大的温度（见图），甚至定到一个更低的温度. 图 32 表明，这是不会降低

$$R_T(A)+R_T(B)+R_T(C)+\cdots+W_T$$

的值的.

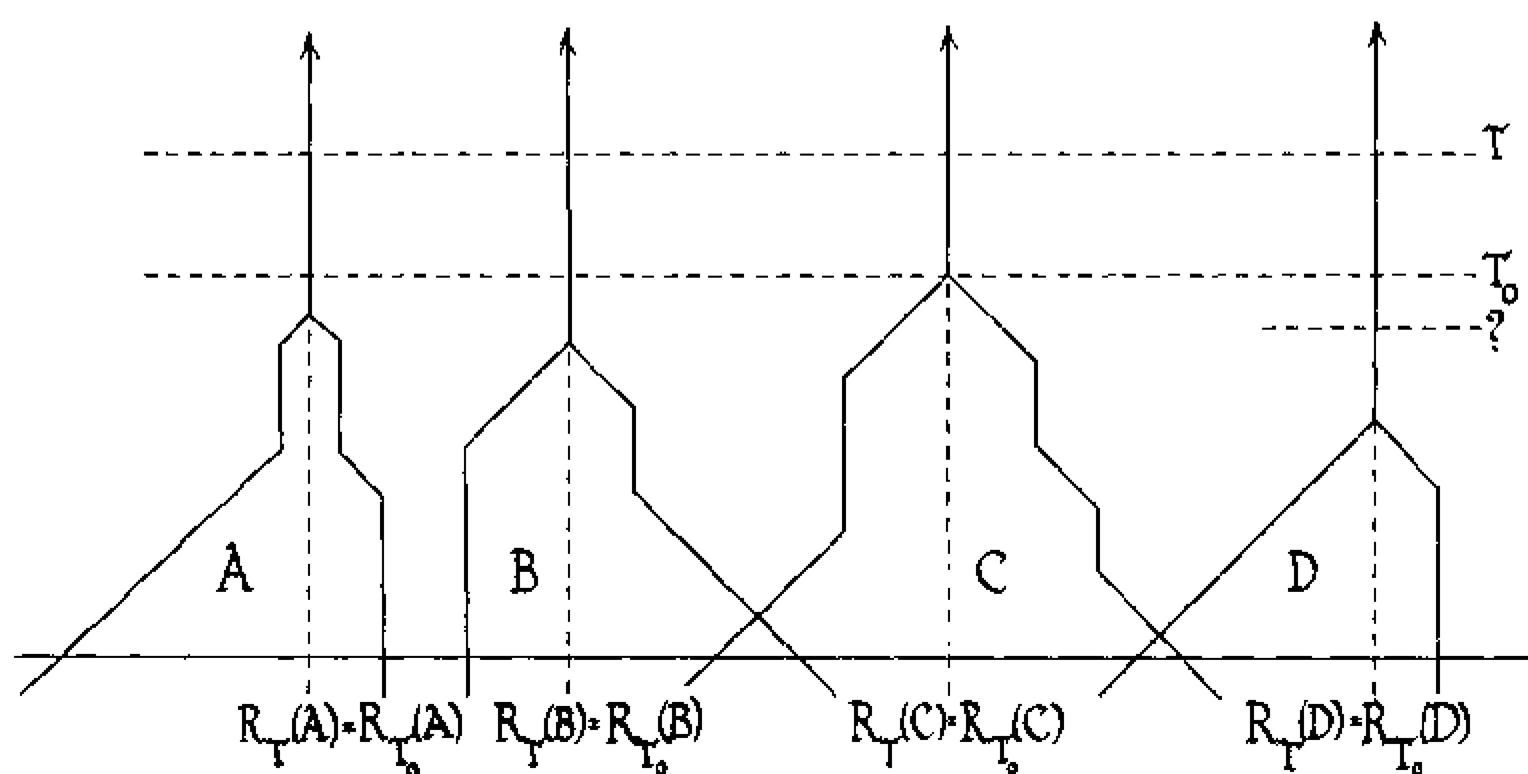



图 32. 重定恒温器.

## 参考文献及进一步阅读材料

我们所说的这类博弈中,平均值的存在是由米尔诺(Milnor)及哈纳(Hanner)首先提出并加以证明的.另一个证法(带有一个构造性算法)由伯莱坎普给出,另外还有一个极短但非构造性的证法则由诺顿(S. Norton)所给出.我们这里所讲的热图方法引自ONAG一书.

Olof Hanner, Mean play of sums of positional games, Pacific J. Math. **9** (1959) 81—99; MR21 #3277.

John Milnor, Sums of positional games, in Kuhn and Tucker (eds.) "Contributions to the Theory of Games", Ann. Math. Studies #28, Princeton, 1953 291—301

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapter 9.

# 第7章

# 伐市游戏

上帝造万物，
远近伏幽明.
千丝与万缕，
陈陈皆相因.
汝欲采鲜花，
必将惊神明. *

——弗朗西斯·汤普逊，《绝色佳人》

在本章中我们将毫无保留地告诉你，我们所知的、有关伐木游戏的一切知识(除了无限与有环圈的两种变异形式之外，这两者请参阅第11章). 但首先我们要向你提出忠告：有关论证略为有点冗长. 对那些急于了解本书概貌的读者来说，关于花园的某些注释将

---

* 译者注：若译成白话文，其意思是：

"上帝所造之万物，
无论远近大小
冥冥之中都有着
千丝万缕的联系。
即使你偷偷采朵花，
也会惊动天上的星辰".

实际上，古今中外许多才哲之士都有此种思想，例如印度大乘佛教哲学中的"因陀罗网". 中国古代所谓"举头三尺有神明"，以及诗仙李白的名句"不敢高声语，恐惊天上人"等等.

在第8章中加以必要的重复.所以你们没有必要阅读本章以了解本书的其他内容.

## 绿色伐木游戏

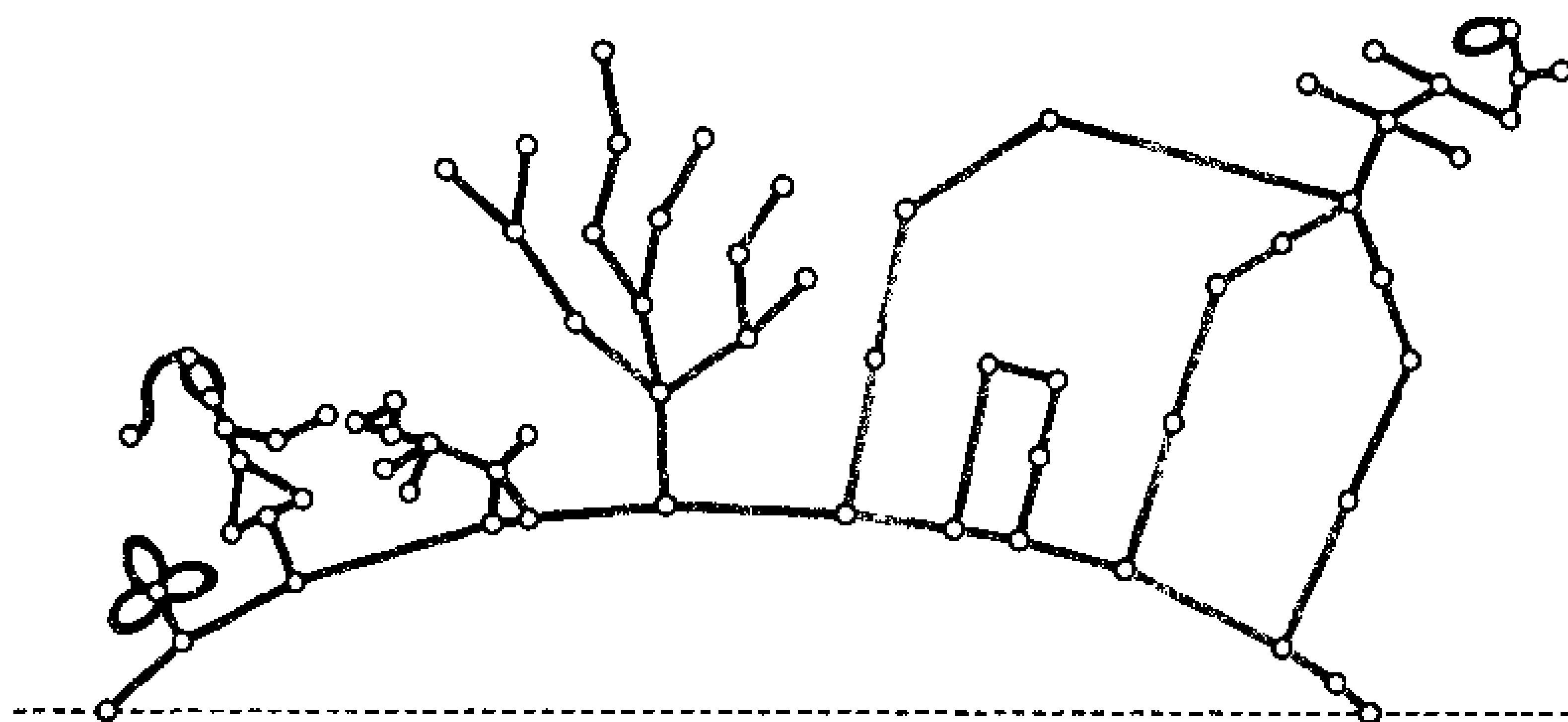


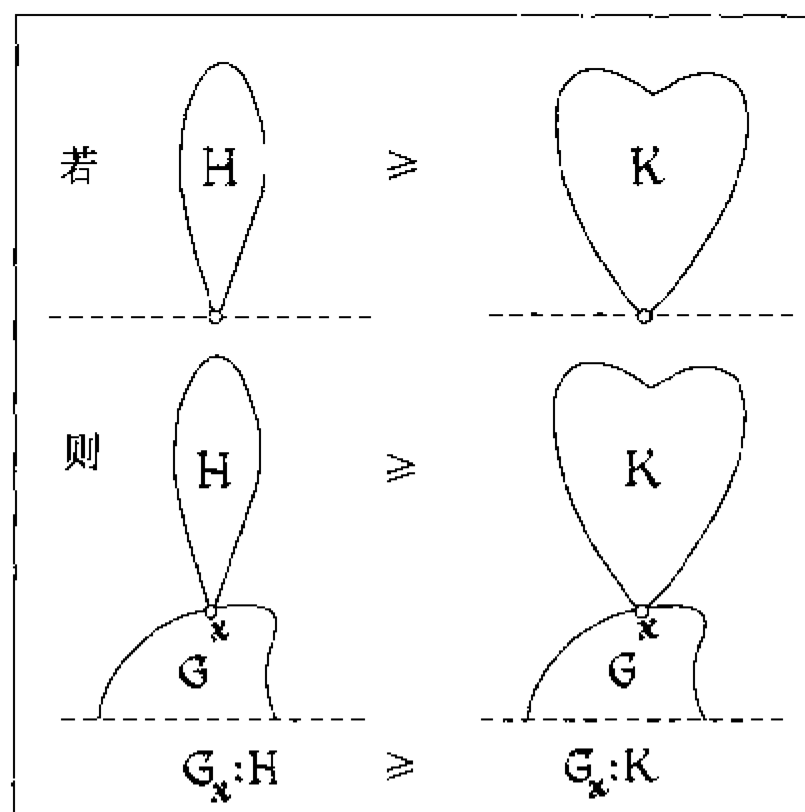
**图 1.** 绿色伐木游戏中的一座拱桥.

在像图1那样的、一个完全绿色的伐木游戏图形中,任何一个局中人可以砍伐任何一条边,在此之后,不再连通大地的边就会立即消失.

这里有一套完整的理论,首先我们可以看到,第2章中已经讲过的"草中之蛇"论证已经表明,仅由绿色植株所组成的伐木游戏实际上是同尼姆游戏完全等价的.

下面我们将利用一个极其重要的工具——**冒号*原理**它不仅可用于绿色伐木游戏,而且在一般伐木游戏中都能应用.

通过玩两个较低的博弈之差,你们可以很容易地证明这一点.特别,




**冒号原理**

---

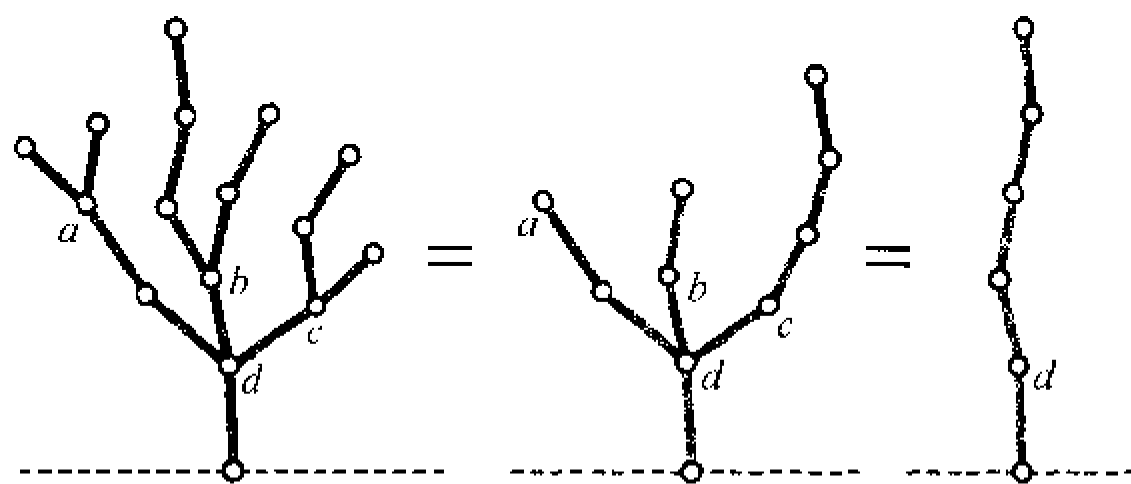
* 译者注:原文为Colon,它还有一个意义是"结肠",此处是一语双关的.

若 H＝K，则 G：H＝G：K

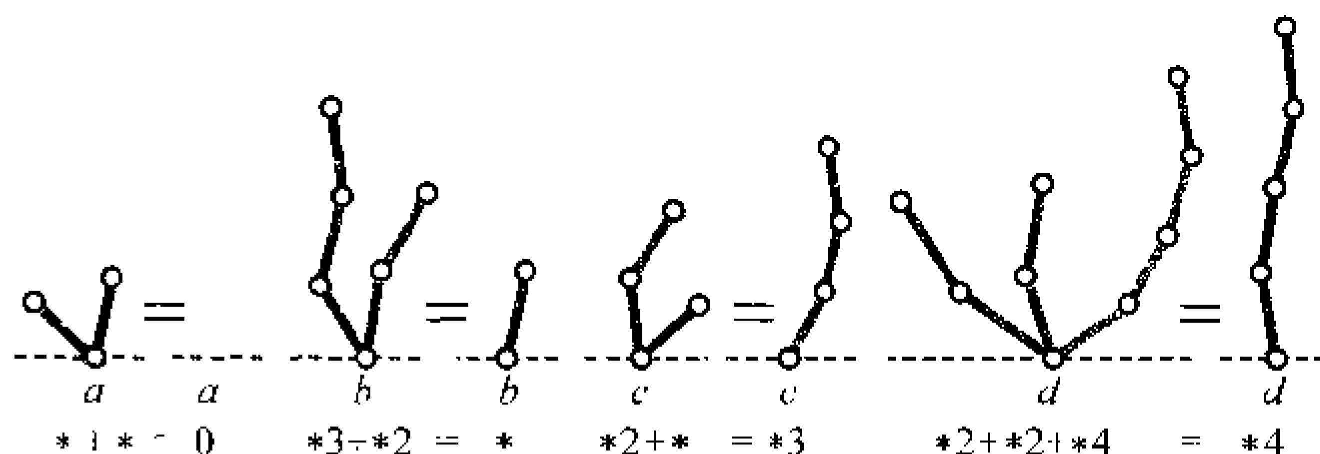
对 G：H 的正式定义，请参看本章增补材料.

## 绿色树

现在，只要利用冒号原理即可估算绿色树. 例如，下面的绿色树




的值为 $*5$，因为




你们可以看到冒号原理总是能够起作用，它允许你在地面上某些距离处来做加法.

请注意这里需要两种加法. 一种是书上常见的加法，即向地面下移一个树支时尼姆值要加上 1；另一种是当几个树枝联结于一个结点时，它们的值应按尼姆加法（简记为 $\overset{*}{+}$）处理. 但由于这两类加法都具有如下性质：

奇数＋奇数＝偶数＋偶数＝偶数，

奇数＋偶数＝偶数＋奇数＝奇数，

从而可以看到：

> 绿色树的尼姆值与总的边数具有同样的奇偶性.

**奇偶性原理**

下面的熔接原理将表明它可以推广到一切绿色伐木游戏图形.

## 熔接

你可以把图上的两个结点熔接成一个. 联结它们的边将弯折成一个环. 如果把图 2(a)中的 $x$ 与 $y$ 熔接起来将得出图 2(b),若将 $x$ 与 $z$ 熔接,则将得出图 2(c).

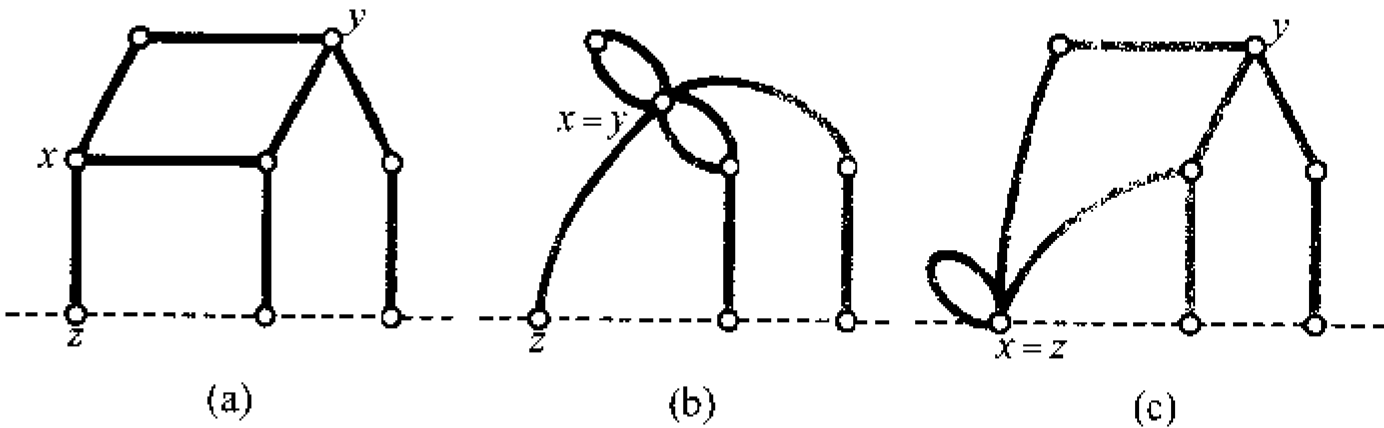



**图 2.** 熔接到你的屋子里去!

绿色伐木游戏可以通过

**熔接原理:**

> 你可以把绿色伐木游戏中任一回路的所有结点熔合起来而不改变它的尼姆值.

而完全解决.

此时,在任一结点的一个环圈,其效果就同一个小桠枝完全一样. 例如图 3(a)的那位小姑娘,一旦熔接了她裙子上的四个结点与头部的两个结点之后,就变成了图 3(b)的绿色灌木,而当后者的树叶代之以桠枝之后又变成为图 3(c). 于是,根据冒号原理,这棵树以及其前身的那位小姑娘,其博弈值都等于 $*2$.

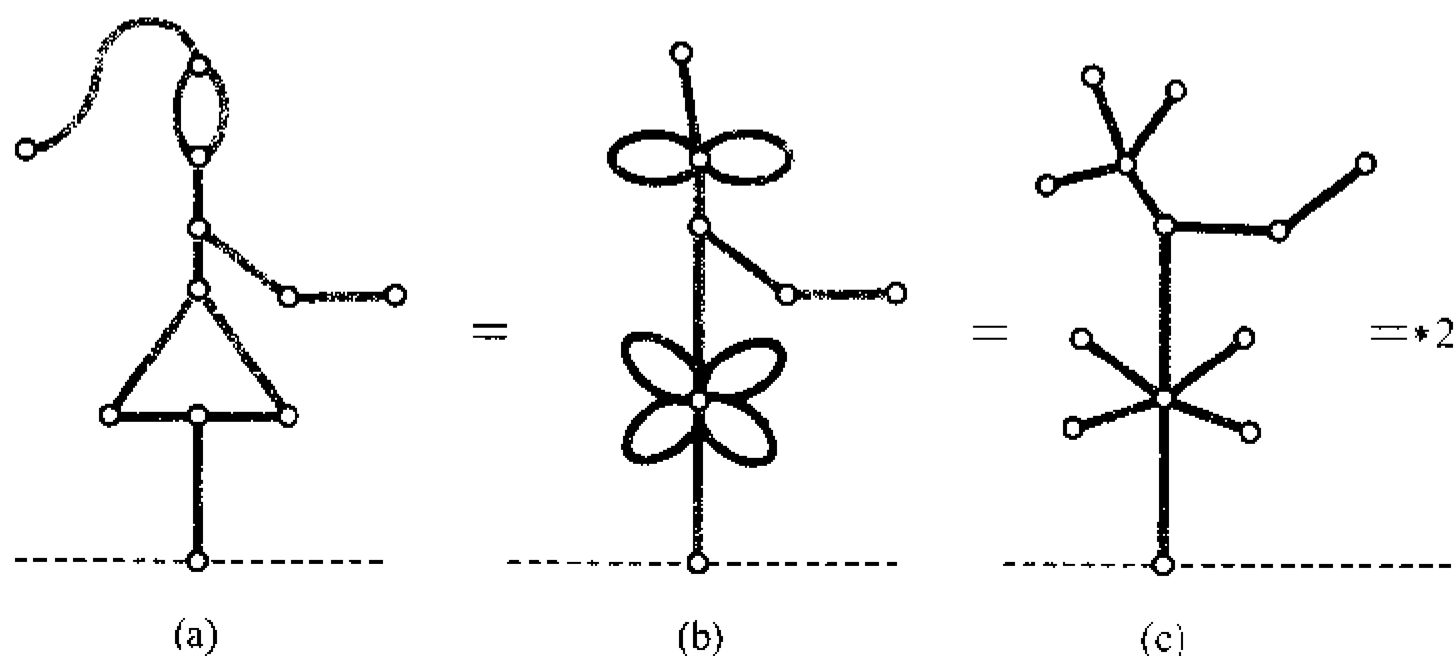



**图 3.** 替绿色小姑娘贴份量.

# 证明熔接原理

证明这一原理要使我们化去相当长的时间. 在 ONAG 书中载有另一种证法,要用到匹配函数及威尔德函数(见第 15 章),但证法同样冗长. 这里要讲的证法,其优点是可以明显构造出取胜的步法. 我们将省略一些纯粹的算术计算,这些东西对证明原理是需要的,可是在找出取胜步法时并无用处.

对原理来说,如果存在着什么反例,那就选取一个边数 $n$ 为最小的. 而在这些 $n$ 边的反例中再选取一个结点数为最小的 $G$(于是对 $G$ 的任何两个结点都不再能进行合法的熔接).

从而,首先可以看到,$G$ 只能有一个接地结点,因为它决不会影响对局者想熔接所有接地结点的意图.

其次,$G$ 中不可能含有由三条或更多条不相交的边联结起来的结点对子 $a$,$b$,否则,将结点 $a$,$b$ 熔接起来而得到的博弈 $H$,势将具有一个不同的尼姆值,从而在 $G+H$ 中将存在着一个致胜行动. 不管该行动是在 $G$ 还是在 $H$,只要在另一个分支博弈应之以一个相应动作,就将得出一个博弈 $G'+H'$. 但由于 $G'$ 与 $H'$ 至多只有 $n-1$ 条边,从而可以把它们中的任意回路熔接成一个单独的点而不至于影响它们的值. 又因为仍有一个回路含有 $a$ 与 $b$,于是有 $G'+H'=0$,这样一来,就把原先设想的 $G+H$ 中的致胜动作彻底打发走了.

其次,我们断言:$G$ 中没有一个回路可以排斥地线,如果 $G$ 中有这种回路 $C$ 存在,则可考虑伐木动作把 $C$ 中所有的边统统砍光以后的局势 $G'$. 这时 $G'$ 将不能含有 $C$ 中两个不同的结点,因为它们在 $G$ 中将由三条不相交的边构成通路(两条在 $C$ 中,一条在 $G'$ 中). 于是 $G'$ 将只能含有 $C$

的一个结点 $x$，而这种 $G$ 看上去就像图 4(a)的样子. 此时，如果 $x$ 是接地点，我们就可以应用熔接原理把较小图形的一切结点熔接起来（见图 4(b)），而冒号原理将使我们把这些结点统统熔接起来，脱离地线.

图 4. 把回路拉到地线上.

最后，我们断言，$G$ 只能含有一个包含地线的回路. 否则，它将是若干个较小的图之和，因为不同回路的结点是不能由其他通路联结的. 但现在我们又可以对这些较小的图来挥舞熔接原理了.

现在我们将看到 $G$ 必然像一座桥（见图 5，尽管按照法定步骤，应当先鉴定两个接地结点）的样子，然后，按照冒号原理，我们得以假定不在桥上的结点至多只能在每个结点上形成一个没有分叉的植株.

桥的边数（它的**跨度**）应为奇数. 如果一座桥梁的跨度为偶数，则可考虑此桥与它的所有植株之和. 此时，移去桥的任何一条边都是拙劣的行动，因为，按照奇偶校验原理可知，此时剩下来的尼姆值必定是奇数，对称策略将表明图 6 的尼姆值必定是 0，从而得以应用熔接原理.

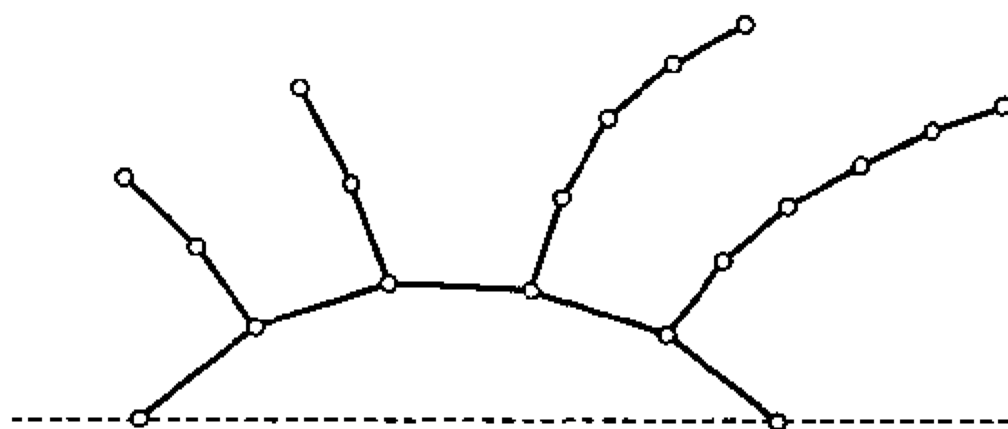


图 5. 我们的最小罪犯看上去像什么样子.

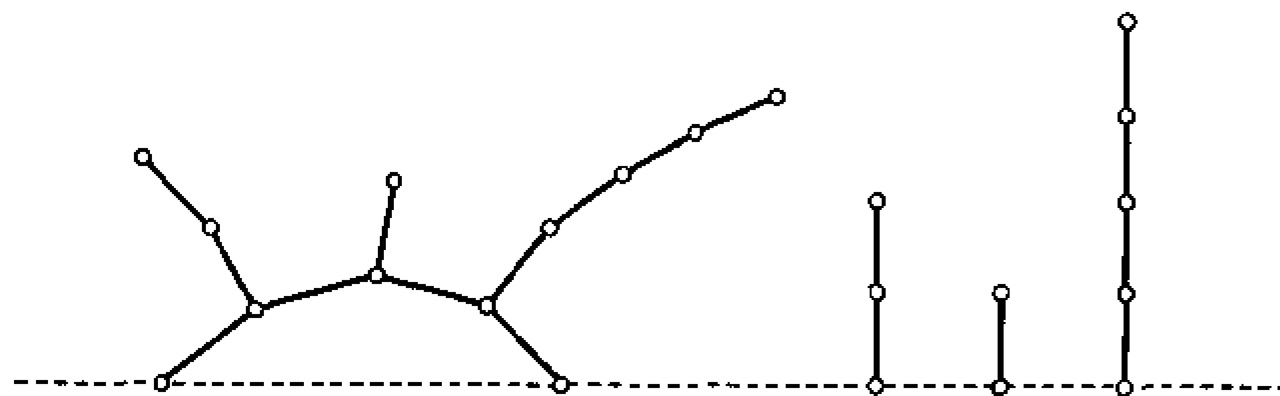


图 6. 一座偶数跨度的桥梁及其各植株的复本.

奇数跨度桥梁的熔接原理断言，其值可由其各植株之和加 * 而求得. 因此，我们必须说明，图 7 的值为 *.

肯定没有值为 * 的选择，因为根据奇偶性原理在桥上所取的任何动作将导致偶数尼姆值，

## 一个更复杂的图形

我们将找出本章开宗明义的那个图 1 的取胜走法. 当我们把小姑娘、狗、房子里或图形下面所含有的回路熔合以后，即可得出图 9(a)中的各块. 然后反复应用"压缩一半"原理，即可相继得到图 9(b)，9(c)与 9(d). 在最后的附图 9(d)中，唯一能够取胜的走法当然就是简化"桥梁"中间的那条边了. 它相当于图 1 中树与屋子中间的那条边.

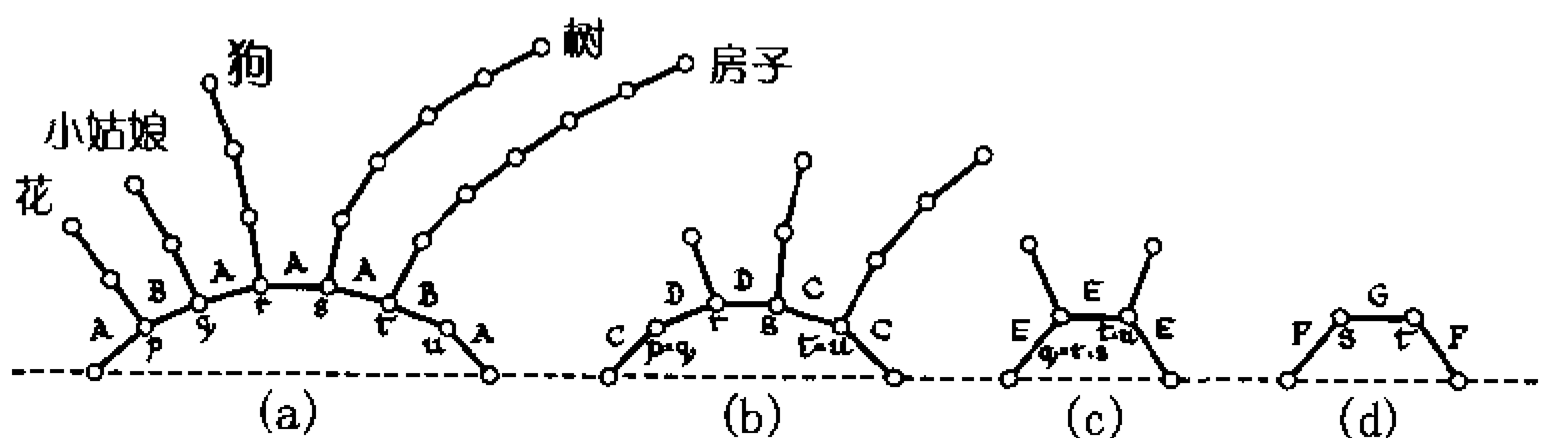



**图 9.** 图 1 的简化与"压缩一半".

由于接地回路中的边把图形分割得太快，企图哄骗与迷惑对手的读者将乐于知晓：图 1 中还存在着其余 17 种好的取胜走法，它们是：鸟的尾巴，电视天线左上方的一支，构成房屋地基的四块中的任一块，树的右边桠枝中的最低一枝，狗的尾巴，它的脸，任意一条后腿，小姑娘头部中的任何一部分，以及构成她裙子的四部分中的任意一部分.

绿色伐木游戏也可以应用到无偏濯足节蛋糕游戏的理论中去.

## 无偏濯足节蛋糕游戏

这种游戏的玩法同普通濯足节蛋糕游戏(见第 2 章)一样，但任一局中人都可以在任意方向(或纵或横地)分割蛋糕. 由于是无偏博弈，任何偶数块同样蛋糕相互抵销，而奇数块蛋糕的博弈值同单独一块蛋糕的博弈值是一样的.

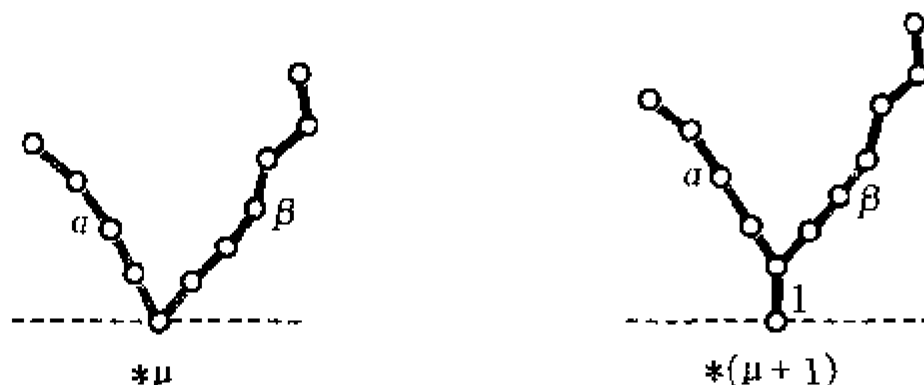
若 $\alpha,\beta$ 是 $a,b$ 的奇素数除数，重复者一并计算，则按照 $ab$ 的奇或偶，一块 $a\times b$ 蛋糕的类型为

$$D(\alpha,\beta) \quad 或 \quad E(\alpha,\beta).$$

造成奇数块蛋糕的行动只不过相当于 $\alpha$ 或 $\beta$ 的化约. 然而，造成偶数块蛋糕的行动必然来自 $E(\alpha,\beta)$ 型蛋糕并给出尼姆值 0，因此

$$D(\alpha,\beta) \quad 与 \quad E(\alpha,\beta)$$

的值同绿色伐木游戏的下列局势具有同样的值：




此处　$\mu=\alpha \overset{*}{+} \beta$.

我们将在本章增补材料中讨论多路濯足节蛋糕游戏.

## 蓝—红伐木游戏

回想在伐木游戏中，

> 左方可以砍掉蓝边，右方可以砍掉红边，任何一方可以砍去绿边.

我们刚刚看到，当所有的边都是绿边时所发生的情况. 若图形 $P$ 中没有一条绿边，则其值恒为一普通数. 因为，如果左方走过一步而形成图形 $P^L$ 的话，则 $P$ 必能由 $P^L$ 添加一条蓝边（它有可能支撑住其他边）而恢复. 容易看到，这将**严格**增加博弈值，所以

对一切选择 $P^L, P^R$ 都必定有

$$P^L < P < P^R.$$

由归纳法，$P^L, P^R$ 是数，所以 $P$ 是一个数. 然而，我们将会在本章的后续部分看到，要想求出它到底是什么样的数，有时是非常困难的.

## 伐木游戏大杂烩

你们当能从第 2 章中回忆得起，这是我们为包含所有三种颜色（蓝、红、绿*）的伐木游戏所

---

* 译者注：作者在这里的原文是 bLue, Red, grEen. 有着一语双关的意思. 此处的大写字母同时又表示着左方、右方与任一方的意思（Left, Right, Either）.

起的名字.

能不能大致估算一下,伐木大杂脍的值究竟有多大?看来图上最重要的乃是红边与蓝边所组成的部分,它由其他的红、蓝边接通到大地.我们将把它称为**紫色山峦**;而把图的其余部分称为**绿色丛林**(其中可能有红、蓝色花朵栽种在里面).

> 伐木游戏大杂烩的值与其紫色山峦值的差异只是无穷小.

为了看出这一点,设想紫色山峦的值为 $x$.然后砍掉不在山中的任一边.从而得出一个具有同样紫色山而稍为小一些的图形,后者的值是 $x$-ish("有无穷小位移的 $x$).其意思是指 $x$ 与 ↑ 或 * 这样一些无穷小数量之和.在紫色山峦中的行动将得到 $x^L$-ish 或 $x^R$-ish 的值.究竟是前者或后者则取决于左方或右方的行动.由于它们同 $x$ 的差异并不是无穷小,所以

> 只要其他地方还有别的边可砍,任何一个明智的局中人都不会去砍伐紫山上的边.

由此出发,从一切不在紫山上的边看来,紫山的所作所为,简直同大地没有区别!

> 绿色丛林从紫山上滑落下来!

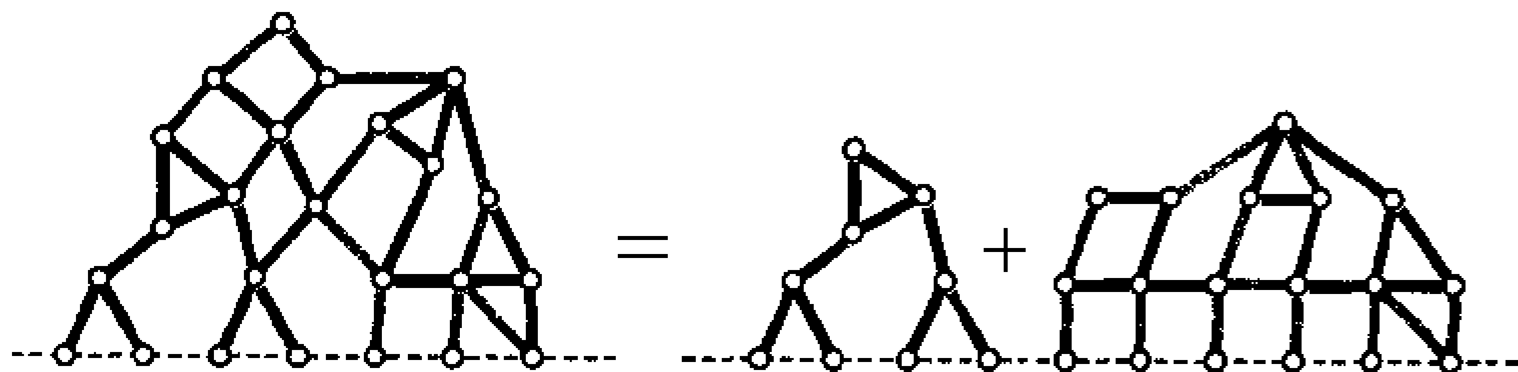


**图 10.** 丛林从山上滑下来.

> 如果你懂得紫色山峦与绿色丛林的一切，那么你就彻底掌握了伐木大杂烩游戏.

## 花园

绿色丛林中最容易清理、打扫的是所谓"花园"，它是一些"花朵"与纯属绿色的植物之和.

所谓"花朵"是指植物的主干为绿边，而花瓣为蓝或红色而言. 当然，负的花朵是指具有同样长的主干，而花瓣为对立的颜色. 譬如说，图 11 的第一、二朵花就是互为正、负的. 根据冒号原理，具有 $l$ 个蓝色花瓣、$r$ 个红色花瓣的花朵，它的值等于同样长度的主干而有着 $l-r$ 个蓝瓣与 $r-l$ 个红瓣的花朵之值.（由 $l \geqslant r$ 或 $l \leqslant r$ 而决定）. 由此可知，图 11 中的最后那朵花可简化为紧挨着它的那朵蓝花. 根据这一理由，今后我们只要考虑纯为红色或纯为蓝色的花朵（天竺葵或飞燕草）就行了.

当游戏进行下去之后，某些花朵有可能完全摘去，只剩下一部分主干. 于是你可以把剩下来的绿色植物视为杂草或小蛇，它们的值不过是一些拧数，并可按照尼姆加法，求得最终的博弈和——一个拧数 $*n$.

## 蓝花游戏方略

> 倘使没有红花，至少有一朵蓝花以及任意数量的绿色植物，则左方必有一个取胜走法.

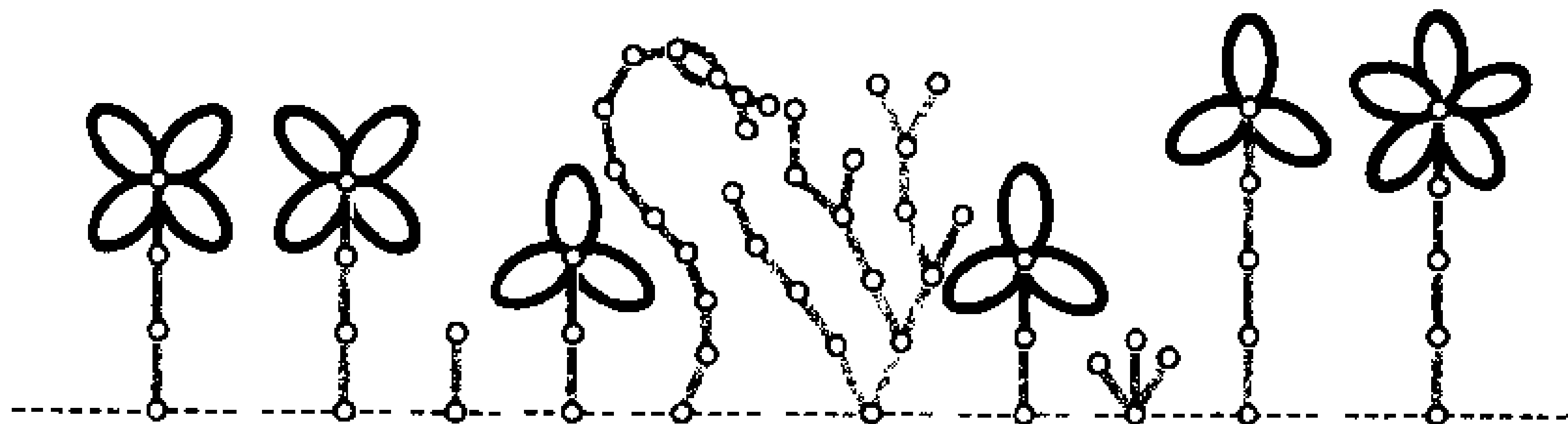


图 11. 一个杂色斑驳的花园.

这是由于对左方来说，这样一种局势(图 12(a))显然优于除去蓝色花瓣后而得出的局势(图 12(b))，而后者是有着一个拧数值 $*n$ 的. 如果 $n\neq0$，则左方可以走到 0(从而在原来的图形中走到$\geqslant0$ 的局势)；而如果 $n=0$ 的话，他就可以取走一朵蓝色花瓣而走到$\geqslant0$ 的局势.

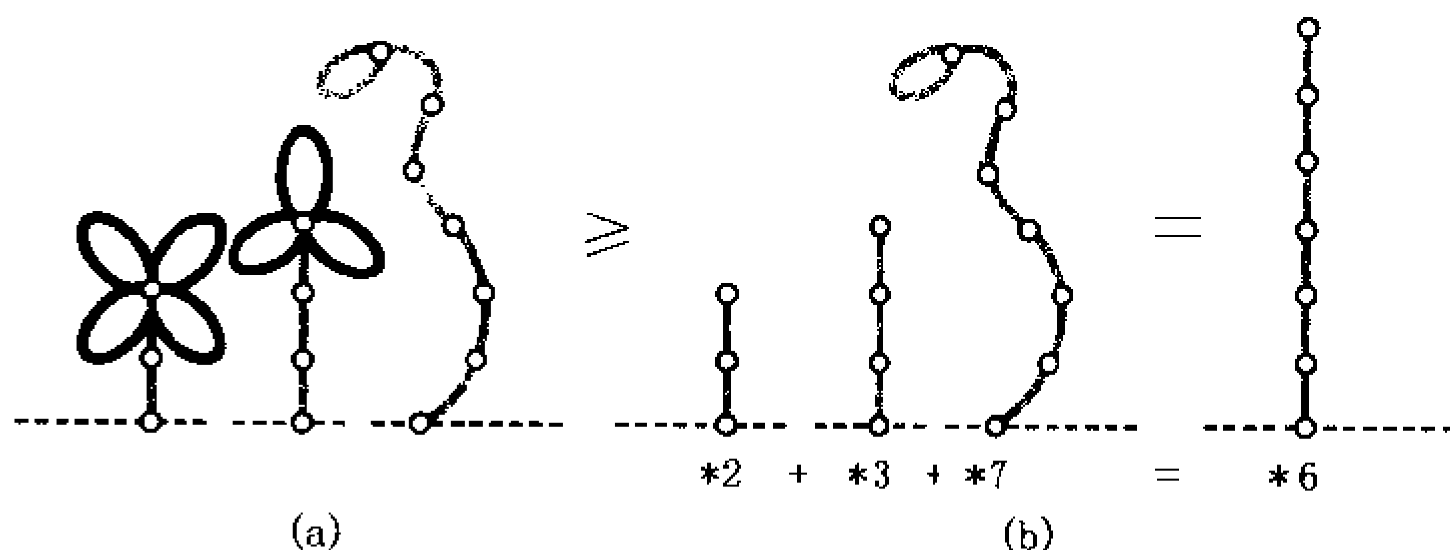



图 12. 蓝色花瓣对左方没有害处.

进一步来说：

> 如果没有红花，至多只有两朵蓝花，以及任意数量的绿色植物，则即使右方先走，左方也可取胜.

**领先两步法则**

因为右方至多只能破坏一朵蓝花.* 由此可见，任一朵蓝花与任一朵红花的差值要超过任意拧数，于是有：

> 在花朵与拧数混杂的和博弈中，左方宁愿走出切割红花的动作而不愿去走切割蓝花的动作.

当然，右方也宁愿走出那些将导致切割蓝花的动作而不切割红花. 总之，绿边的存在将使玩伐木大杂烩的高手比起单纯的蓝-红伐木游戏玩家更富于攻击性. 因为后者只是依靠保持自己

* 译者注：原文如此. 说得过于简略，令人不解. 因为右方是不能砍掉蓝边的. 其实际意义是指右方把绿色部分走到 0 值局势，迫使左方自己拿走蓝瓣，从而达到破坏蓝花之目的.

的资源优势而取胜的.而当绿边存在时,你将有办法消耗对方的资源.

## 原子量

在蓝—红伐木游戏中,基本度量单位(+1)是一条单独的蓝边——可是大杂烩局势却要用另一种单位去度量.

在花朵与拧数混杂的和博弈中,任一局中人都可以采用进攻性的玩法,抑制自己在任一拧数上的玩法,直至对方颜色的花朵全部耗尽为止.这就表明:

> 蓝花比红花至少多出两朵的花园是博弈正值的,而红花比蓝花至少多出两朵是负值的.

于是,在1或2朵的不确定性范围内,红花与蓝花的总数才是我们关心的一切;至于花朵的形状则是较为次要的.

我们要说,一切蓝花具有**原子量**+1,一切红花有着原子量−1,而纯绿色植物对原子量无所贡献.

> 若原子量≥2,则左方可获胜;
> 若原子量≤−2,则右方可获胜.

对其他原子量,我们必须更加密切地注视局势.

虽然原子量的基本单位是"蓝花",但它并不是一个很确切的单位,因为不同的蓝花肯定有着不同的值.一般来说,蓝花的主干越长,对左方的好处也就越少,仅仅对于主干长度相等的花,它们的花瓣个数才是起作用的.

然而,作为第一位重要性而言,这件事并不要紧!一千朵蓝花对于左方就有着一千朵花的好处,它同右方拥有998朵花好处的局势合在一起的话,即使红花既大而又漂亮,左方还是可以稳操胜算.

**数量压倒质量!**

> 在伐木游戏大杂烩的花朵中,数量的重要性远远胜过质量.

除非在某些情况下,数量差至多为1,那就属于例外. 任何一个原子量为0的局势同原子量为2或更大的局势相比时可以视为无穷小.

## 从林的原子量

不妨先回忆一下,在一个绿色丛林中或许也有红边与蓝边,但只有绿边可以接地. 对没有红边的丛林,我们只需对蓝花游戏稍作推广:

> 如果丛林中没有红边,至少有一个蓝边,则左方存在一个取胜走法.

**蓝色丛林方略**

因为如果我们抹掉所有的蓝边,则将得出一个纯属绿色的伐木游戏局势,从而可以利用中性伐木游戏理论算出 $*n$ 的值($*n$ 是拧数). 若 $n\neq0$,则左方在这里头有一个致胜走法,而在原来的从林中与之相应的走法至少与它一样好. 如果 $n=0$,则左方可砍去一条边.

对于更为一般的丛林,我们将在第8章的末尾证明,存在着一个整数原子量,尽管要把它具体求出来是相当困难的. 但是,对**分开的**丛林来说,却存在着一种基于"最大流最小切割"理论的办法.

一个**分开的丛**林(分隔式丛林)是指一个绿色丛林,其中红边与蓝边互不接触. 这种丛林看上去就像图13的样子. 左集合中含有一切蓝边的结点,右集合中则包含着一切红边的结点,夹

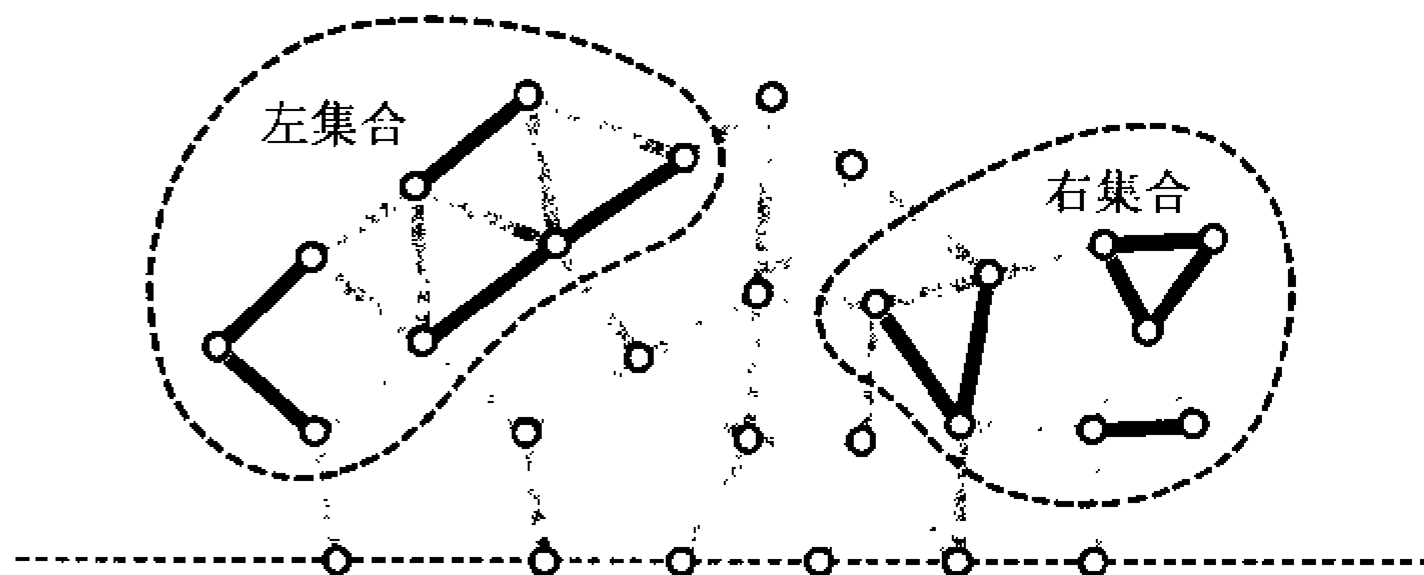



图13. 分开的丛林看上去就是这种样子.

在中间的则是属于绿边的其他结点.

下面说一说怎样求出分开丛林的原子量.

> 首先要找出从左集合经由绿边到达右集合的**最大流**,此时可把大地视为一个单独结点.然后,若能做到的话,你应当尽其所能**扩大**流动,找出从左集或右集通到大地的众多路线.如果这种扩大能找出从左集通向大地的 $n$ 条路线,则原子量是 $+n$;如果从右集能找到 $m$ 条通向大地的路线,则原子量是 $-m$.*

**流动规则**

在两个结点集合之间的一个**流**包含着一系列从第一集合到第二集合的绿色**通道**,如果所有的可能通道统统都已包括进去,则称为**极大流**.不允许两条通道合用一条边,但它们可以合用结点,如图 14 所示.该图的原子量为 $+3$.最大流含有五条通道 $a$,$b$,$c$,$d$,$e$.而扩大后则拥有三条外加通道 1,2,3.图上的细绿线不是流的一部分,红边与蓝边也不能算.

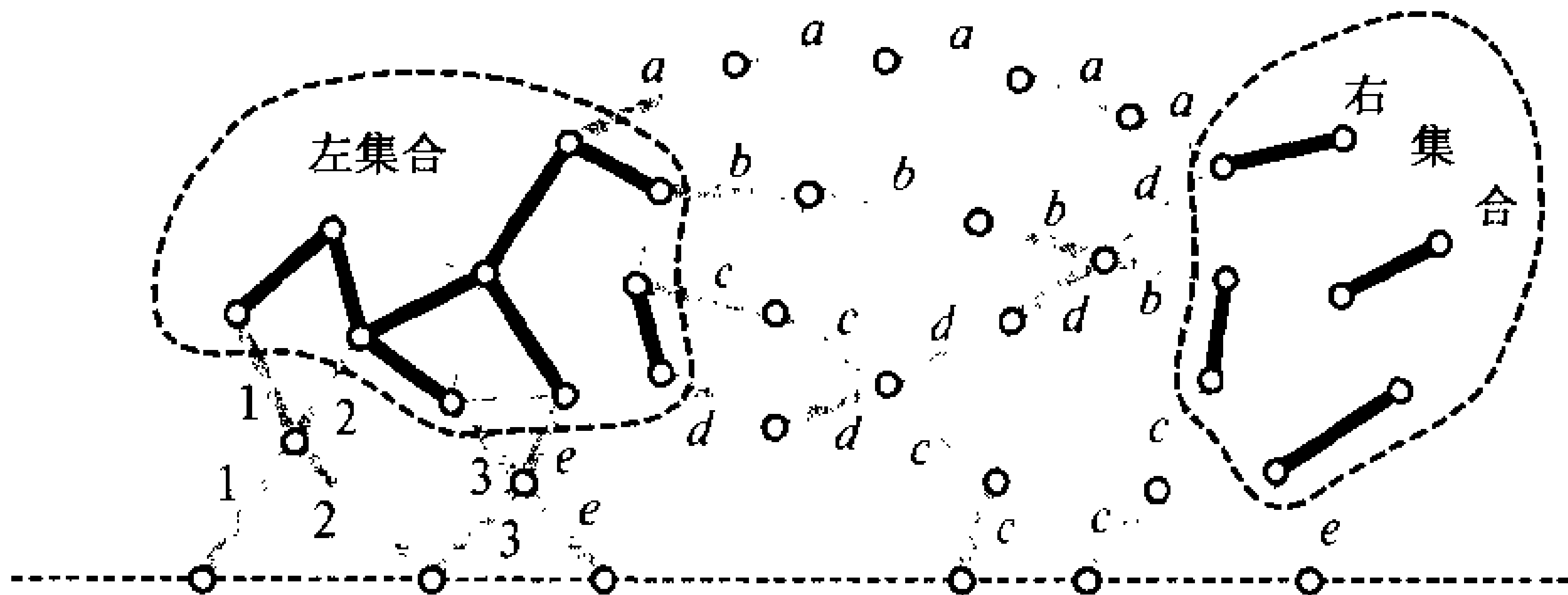



图 14. 原子量为 +3 的分隔式丛林.

在分开的丛林中,当然你不见得会碰到一清二楚地分处于图上左边和右边的左集合与右集合.试问:图 15 的原子量是什么?

* 译者注:原文如此.此处讲得不清楚.一个图形只能有一个原子量,而不是并列的左、右两个,详见下文的具体做法.



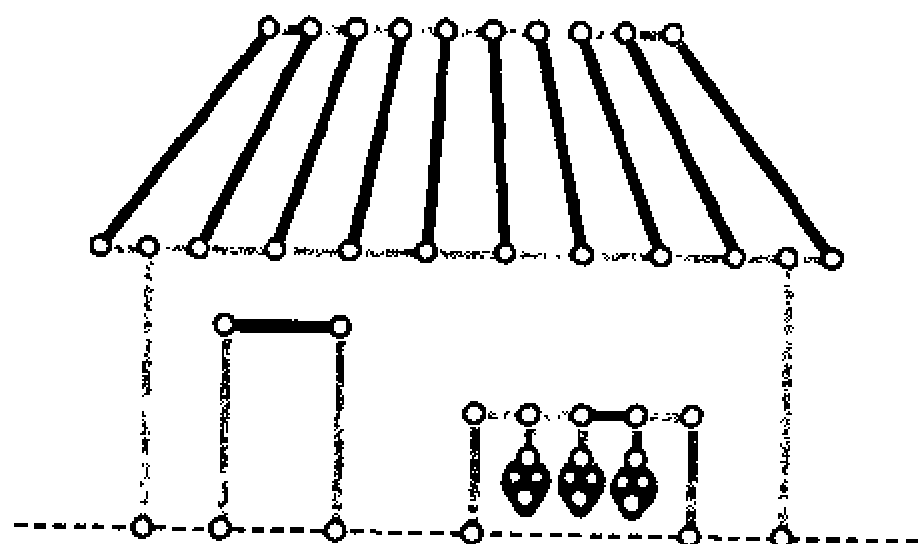


图 15. 横穿通道后,你发现了什么?

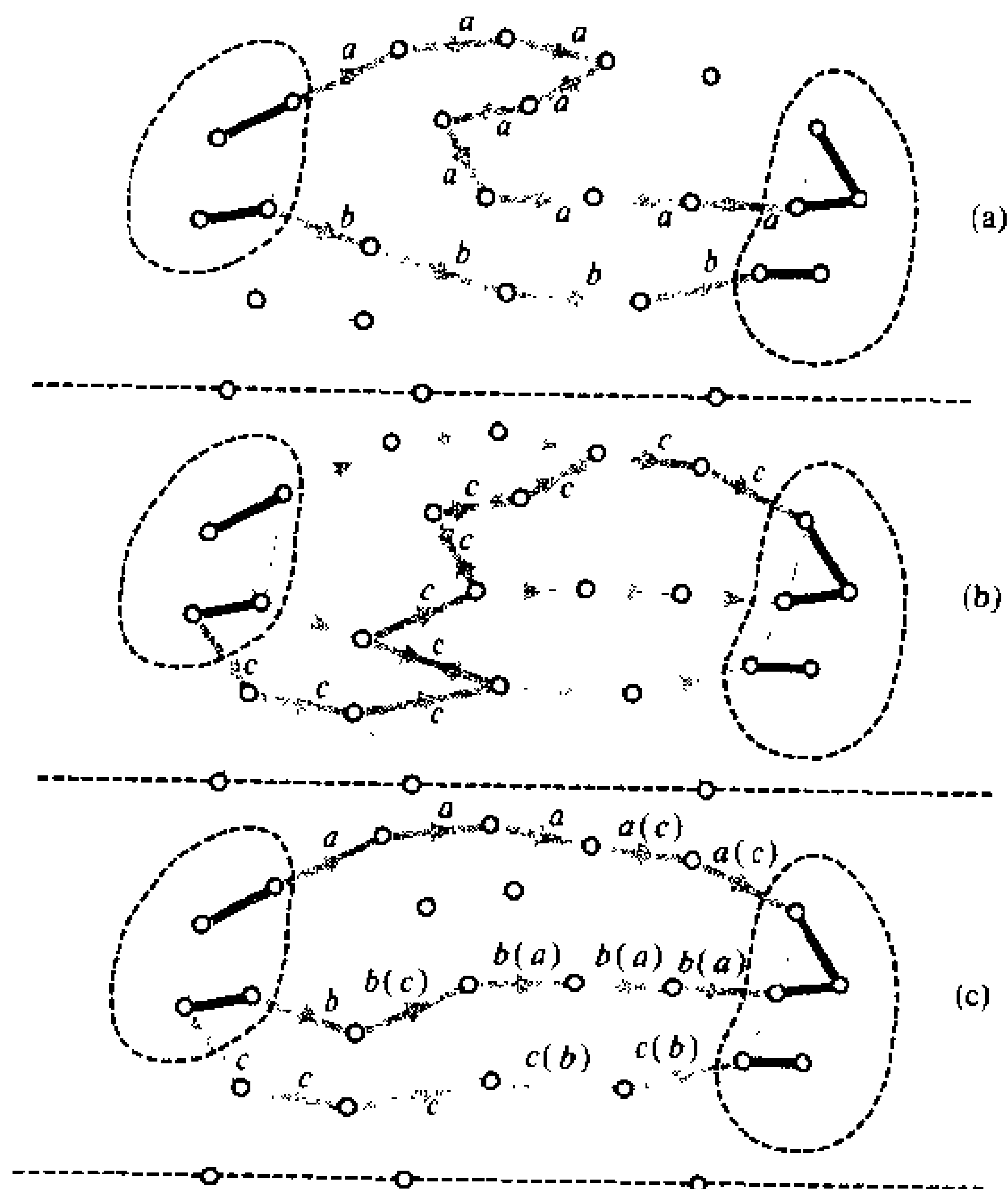



图 16. 重新探查你的通道.

## 在丛林中找通道

为了找出最大流，首先应找出尽可能多的，从左集合到右集合的绿色通道，每条绿色边不能用两次，并在你用过的一切绿边上标上箭头(见图16(a)).即使你已经无法再增加一条新的通道，你仍然不能肯定已经找出了最大流，因为你开始时可能已经误入歧途.

现在，再次从左集合开始，试图沿着你已用过的绿边到达右集合，但这次要改走相反的方向，如图16(b)所示.如果你能做到这一点，就删去你前后走过两次的边，从而得出一个较大的流，如图16(c)所示.按此办法反复进行，直至无法走得更远时，那么你就在左集与右集之间找到了一个最大流.

为了肯定此事，你应当对不同结点进行着色.左集合中的结点已经着成了蓝色，如果你能沿着一条不在流中的绿边到达另一结点(或者沿着流中的绿边，但按相反方向到达另一结点)则将此结点也着成蓝色.当然你也可以使用另一种办法，从右集合的红色结点开始.但这一次只准利用构成流的边的**前进**方向.当且仅当图中某些结点被着成两种颜色时，你才有可能把流加以扩大.而当你确实已经得了一个最大流时，那么你已把所有的结点分成了三个互不相交的集合：着成蓝色的，着成红色的，其他.

> 根据接地结点的颜色：蓝，红，或无色，可以判定丛林的原子量为正，负或零.

如果大地已被着色，那就可以在它与合适的集合之间增加更多的通道以扩大流.找出新通道时，你可以像以前一样，利用原有之流的边，但必须按相反方向.现在，流通规则将告诉我们，原子量就是你能把流加以扩大的最大通道数.(＋号表示从左集合到地线的通道，－号表示从地线到右集合的通道).

当然，扩大了的流又重新定义了一套全新的着色办法：

**着成蓝色的结点**是你从左集合沿着未用过的绿边，或沿着已用过的绿边(按相反方向)所能到达的结点；

**着成红色的结点**是你从右集合沿着未用过的绿边，或沿着已用过的绿边(按前进方向)所能到达的结点.

但是,除了以上两类结点之外,现在还有着成绿色的结点:

**着成绿色的结点**是你从能从地线不经过构成流的一边的任一方向直接从蓝到红,也不经过流的相反方向,从蓝直接到达地线,或者是沿着流,从地线到达红色结点.

所有其他结点都是不着颜色的结点.

如果原子量为负值,当然你可以把大地看成是蓝色结点以寻找扩大的流,在把结点着成绿色时也可作这样的设想.

## 在动物身上找通道

穿越一个特殊丛林,我们发现图 17 的那个寓言中的野兽.现在让我们找出最大流很容易画出图中两个带有箭头的、从左集合到右集合的通道,而且这就是最大流,因为我们只要从动物的头颈底部切两刀,就可以把它的头割下来.福特—福格森的最大流最小切割定理告诉我们,总是可以用这种办法来检验最大流.*

现在来找扩大流!地线马上就被着成蓝色,因为我们可以从尾巴直接向下,经过两条后腿之一而达到它.于是我们必须找出从左集合到达地线的更多通道.两条后腿显然是扩大流中的通道,它能算是最大吗?

不对!只要沿着长颈鹿的下腹,侧身向右,直至到达头颈底部,然后沿着原来的流的一边逆向而行,再沿着它的前脚向下,就能找到第三条通道(见图 18).

结果是形成了三度扩大的流(图 19),这才是最大的,因为从怪物尾部出发只能有 5 条绿边.于是,原子量等于+3,尽管红边有 10 条之多,而蓝

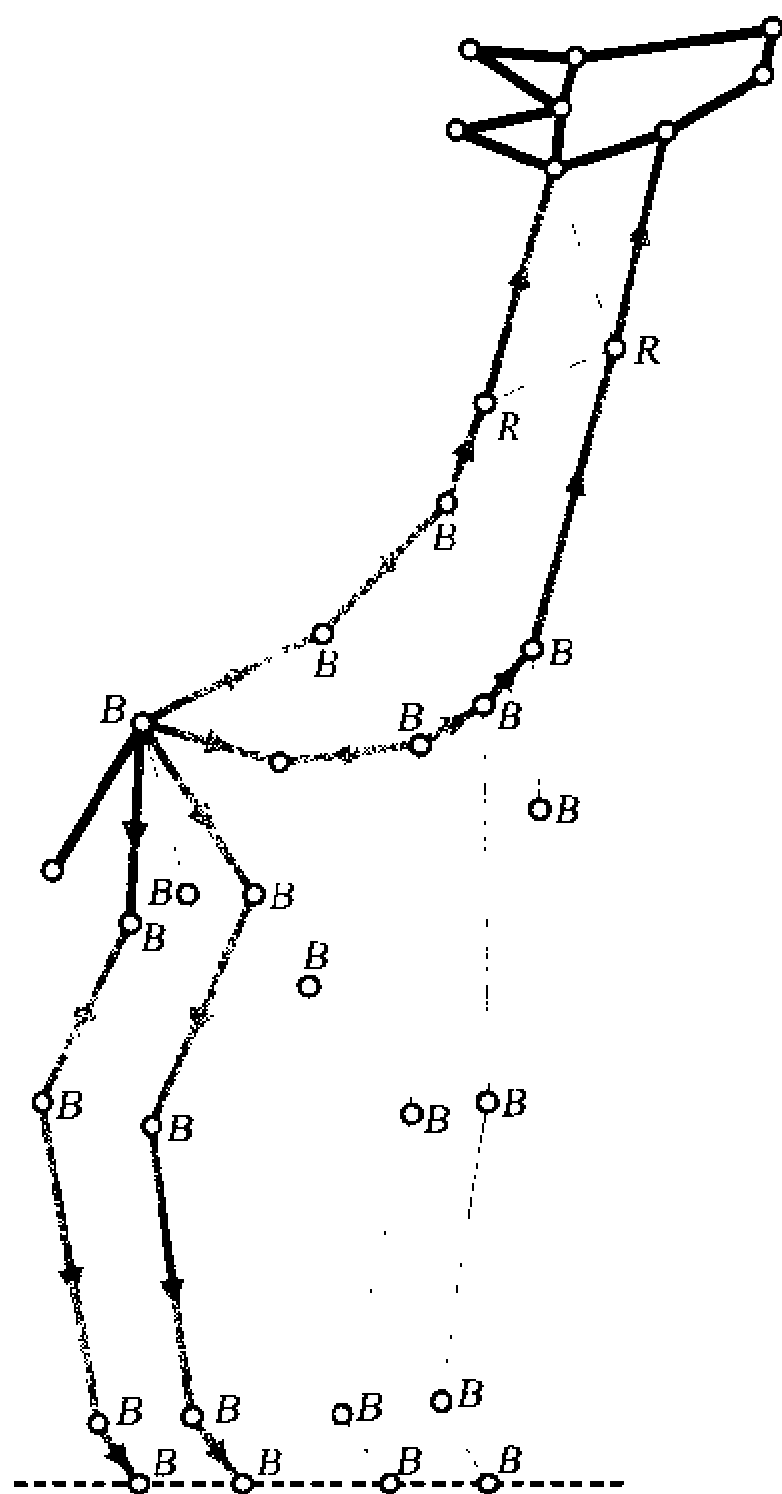
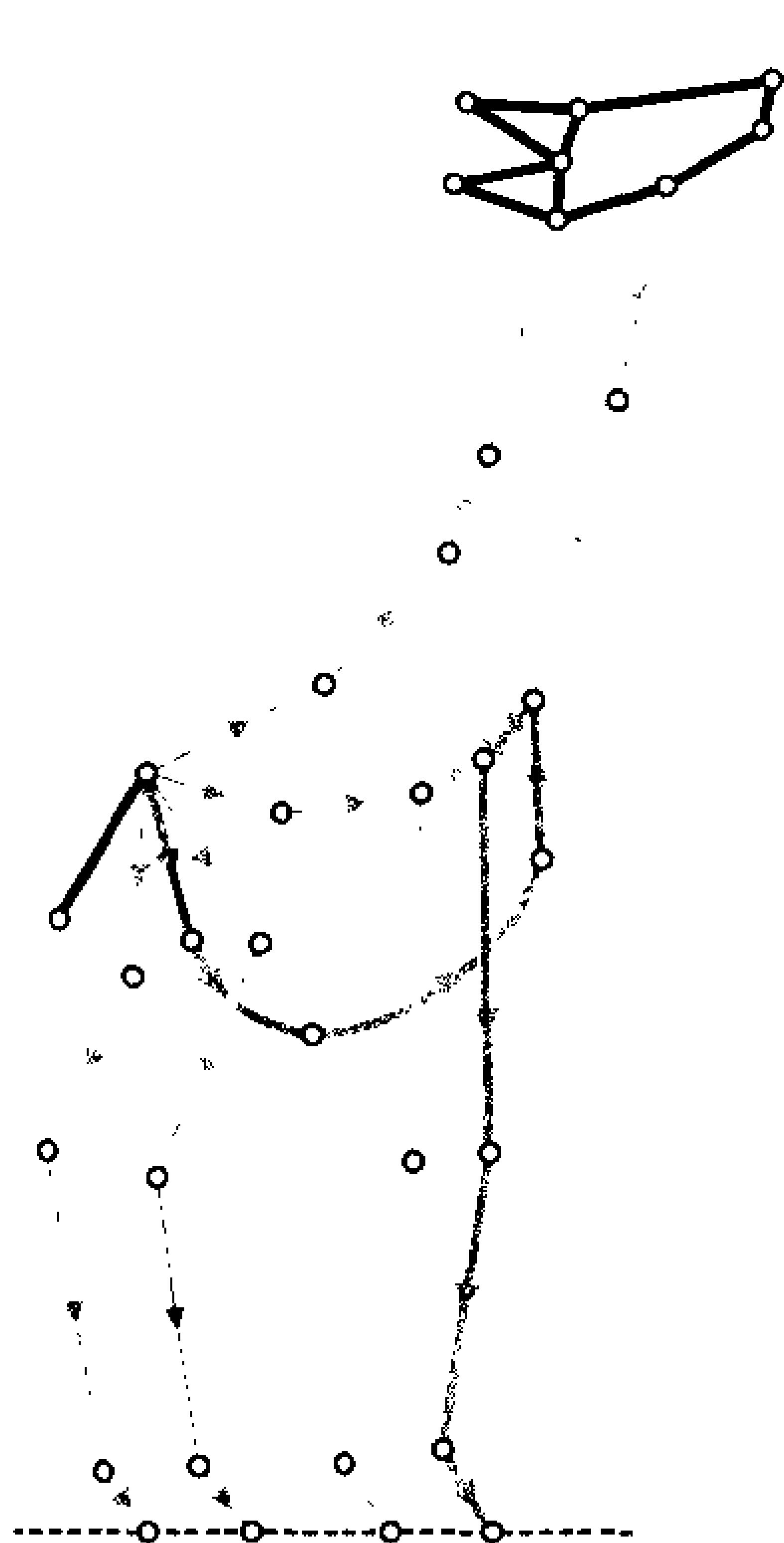



图 17. 红头蓝尾巴的长颈鹿(前).

---

* 译者注:此定理是运筹学中极有名的一条定理,详见有关课本与教材.

边只有 1 条. 本图的着色情况见图 19 的标号，没有着色的结点未加标号.


图 18. 扩大流中的第三条通道.

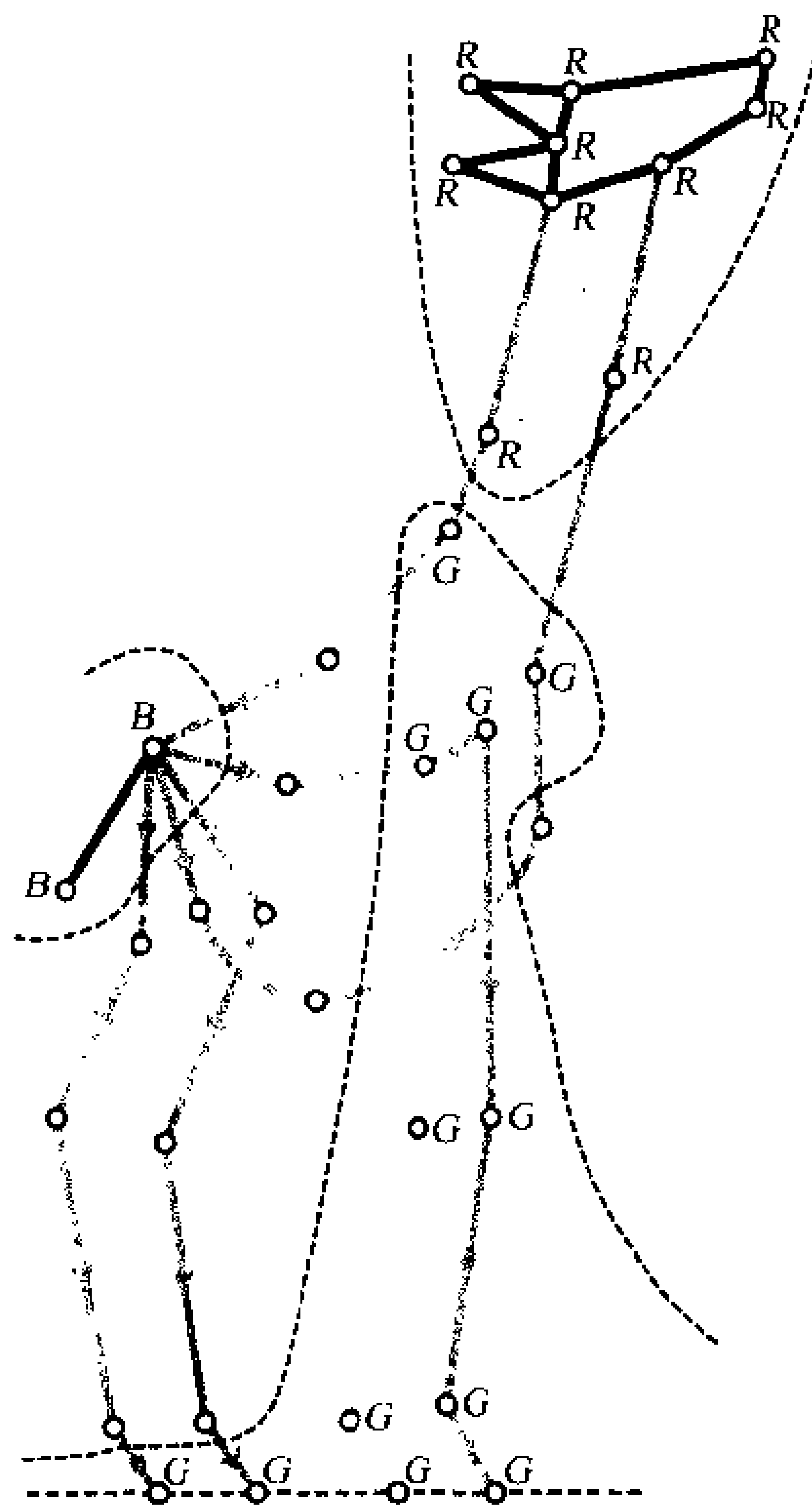


图 19. 红头蓝尾巴的长颈鹿(后).

## 目迷五色的丛林

图 20 是一个令人晕头转向的丛林. 地线是图上打着荫线的矩形. 试问：它的原子量等于多少？(答案见本章的增补材料)



图 20. 在五光十色的丛林中寻找通道.

## 在丛林中打个漂亮仗

作为有经验的旅行家，我们可以指点你在丛林中怎样找到果敢的行动. 它们可能不一定永远是最优解，但它肯定可以让你(左方)取胜，倘使原子量大于或等于 2，或者原子量等于 1 而轮到你先走的话.

你的丛林，加上扩大了的最大流以及各种颜色之后，看上去就像是图 21 那种模样. 但在你心

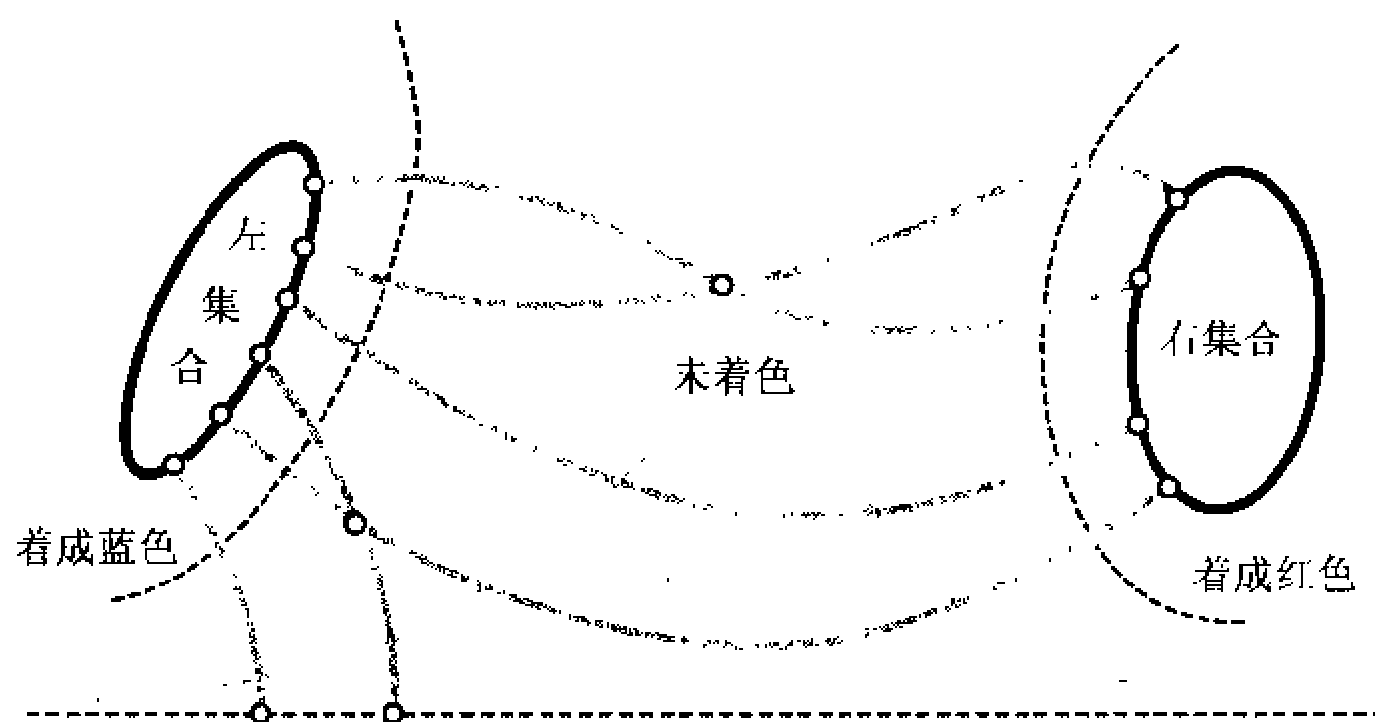



图 21. 分开的丛林，扩大后的最大流与着色状况.

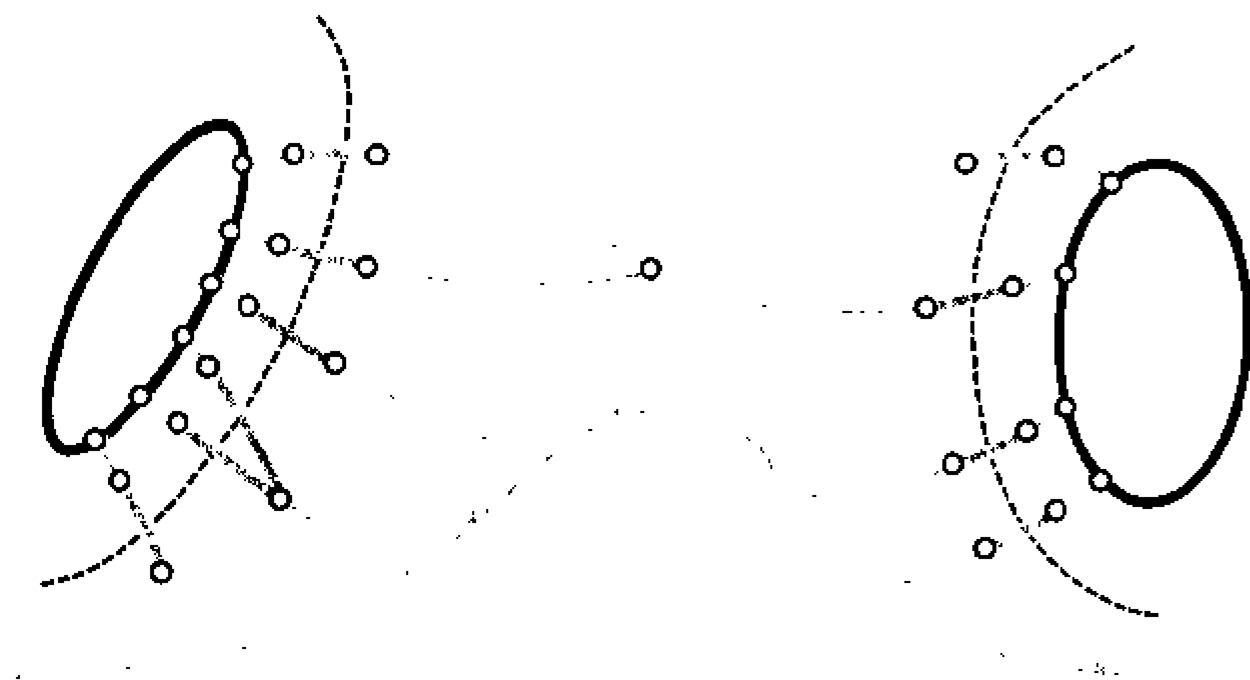


图 22. 在你心目中的图 21.

日中应当把它看成是图 22. 着成绿色的结点只不过是草地的延伸，而把它们联接到红蓝结点的(流的)通道就像是蓝花或红花缠成的茎干. 所有其他的边相对说来是无关紧要的，其中也包括那些在左、右集各通道上的未着成绿色的结点.

你应该采取何种行动呢?

对每朵栽种的花卉，要砍伐的茎干上的边是同红、蓝区域边界线相交的边. 一般地说，局中人的所作所为就像是他们在"花园"中所做的一样，富于攻击性地损害对方的花朵.

说得更确切一点：

> 如果你有一个行动，可导致出现绿色伐木游戏的 0 值局势，那就应当采取这一行动并在其后继续进行绿色伐木游戏(只能发生于 1 朵花的场合). 不然，设法砍去对方的一朵花(若有一朵的话)，如果这也没有，那就砍去同他的区域相交的通道中的一边. 如果这也不可能，那么，对方颜色中，连一条边都没有了，从而你就可以运用蓝色丛林的战术(若你是右方，则可运用红色丛林战术).

**丛林战的指导方针**

但是要当心!! 进行这种游戏时，各种结点的状态会有所改变，而你可能要在树皮上刻出痕迹来标出一些新的通道.

丛林战术可用来证明流通法则. 为了弄清楚这一点，你必须亲自实践，来做一些游戏.

## 不能分开的丛林

红边同蓝边在绿色丛林内相互接触时，理论就变得十分复杂起来，连我们也不了解它的解法. 图 23(a)与图 23(b)是不能分开的丛林，它们看上去似乎非常相像，但实际上(a)的原子量是 0，而(b)的原子量为+2. 第 8 章中将要讲到的原子量的一般性理论将可用来证明每个丛林都具有一个整数值原子量，但想要推广最大流最小切割定理则存在着极大困难.

伐木游戏真难啊!

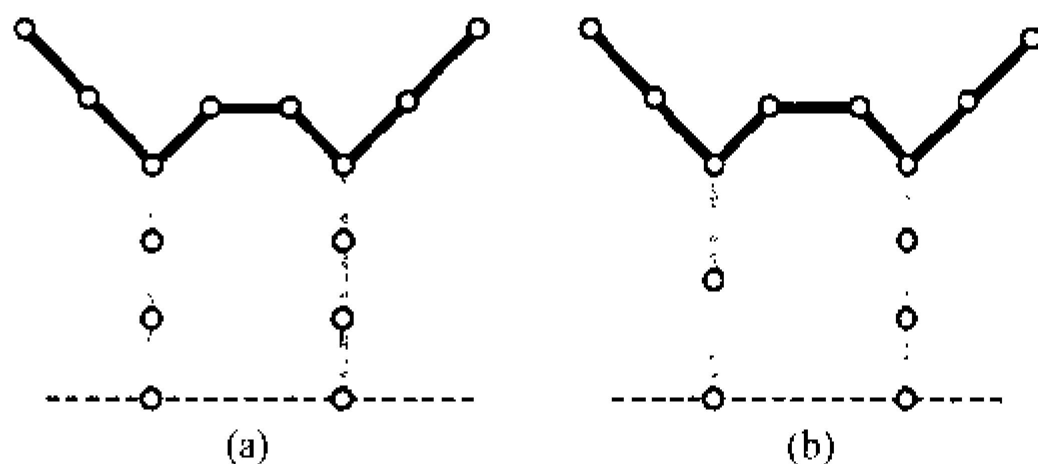



图 23. 一不小心就会上当的相似丛林.

## 蓝—红伐木游戏也很难呢!

伐木大杂烩游戏之所以困难,部分是由于在其中出现的,人们对之了解得很不够的无穷小值. 蓝—红伐木游戏的困难则有所不同. 尽管其博弈值全都是通常的数,但往往不容易确切地算出它们究竟是些什么样的数值. 如果你光是对个别图形的值感兴趣,那就不必花费精力,去阅读本章的剩余部分了.

## 红木家具

一件**红木家具**是指一种蓝—红伐木游戏图形,其中

任一条红边都不接地,

每条蓝边(脚)的一端接地,另一端则与

唯一的一条红边相连(称为家具的一条腿),

例如图 24 中的床,椅子与双杠.

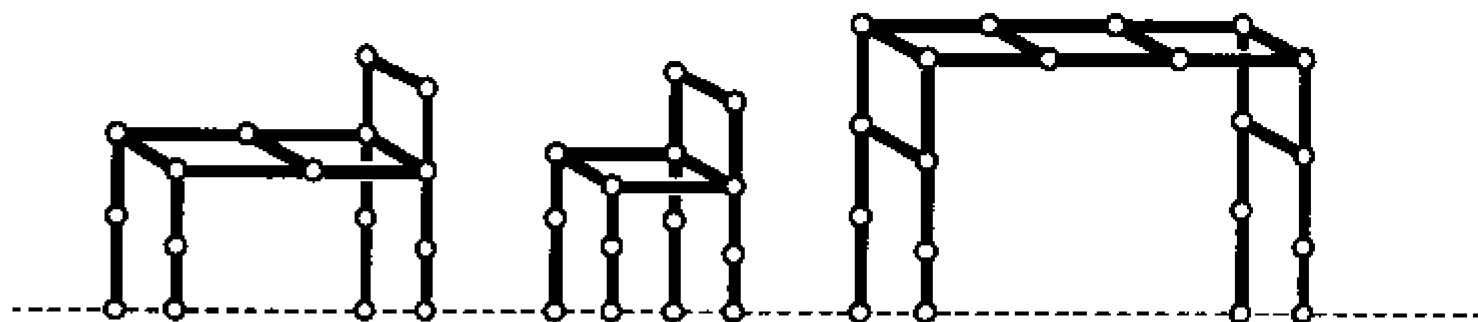


图 24. 几件红木家具.

今有下述定理：

> 任意一件完整红木家具的值为
>
> $$\frac{1}{2^n}$$
>
> （对 $n=0,1,2\cdots\cdots$ 中的某个值成立.）

**红木家具定理**

它可以用可逆论证加以证明. 对左方的任一行动（它必然是砍掉家具的一只脚），右方的反应是砍掉相应的一条腿. 设经过这样几个回合以后，$G$ 变成了下列局势

$$G^{LRLR\cdots\cdots LR}$$

则我们将断言

$$G^{LRLR\cdots\cdots LR}\leqslant G.$$

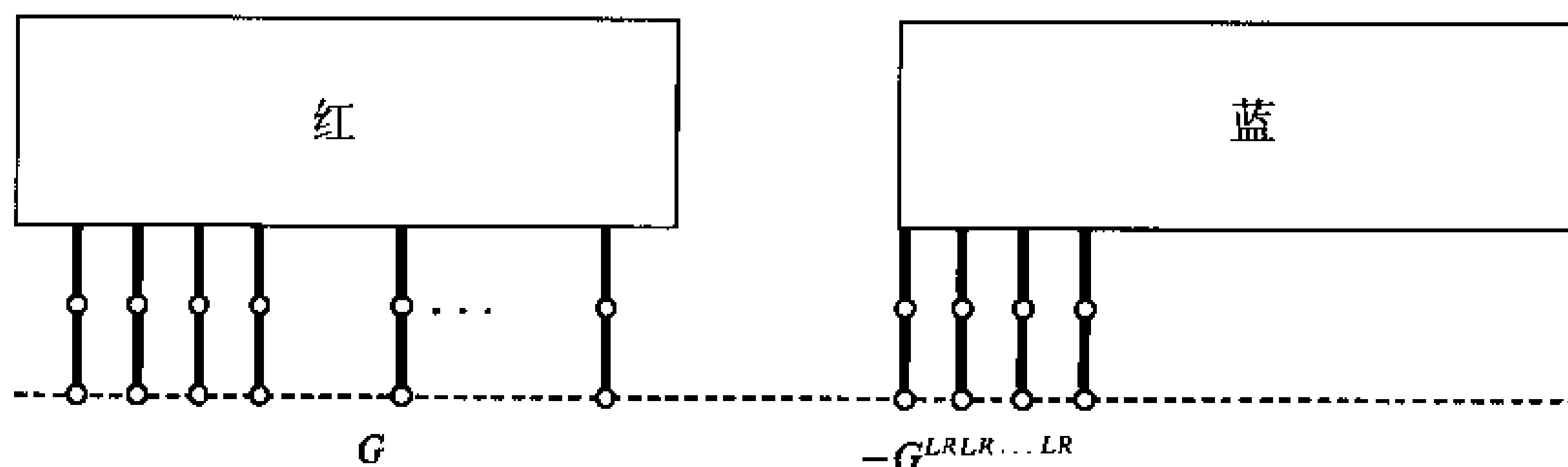



图 25. 家具值如何减少.

这是由于左方有着一个明显的策略可用，当右方像图 25 那样开始时，左方可将 $G$ 中的对应边同 $G^{LRLR\cdots LR}$ 中的边予以一一匹配，而对 $G$ 中剩下来的脚与腿则加以相互匹配.

作为特例来说，由于每个

$$G^{LR}\leqslant G,$$

所以 $G$ 的每一个左方选择都是可以逆转的. 这就表明 $G$ 可以简化为下列形式

$$\left\{G^{LRL}\middle|G^{R}\right\}.$$

从而由于每个

$$G^{LRLR}\leqslant G,$$

这里的每个左方选择都是可以逆转的，由此继续类推，只要家具还有支撑的“腿”可以站得住. 最后我们终于有

$$G=\{0|G^R\},$$

所以，它的值肯定就是

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$$

中第一个小于任一 $G^R$ 的分数.

在本节的剩余部分中可以看到，把只有一条蓝边的图形视为一件红木家具的退化情形是方便的. 由于它的值是 1，所以红木家具定理依然能够成立.

现在，我们有以下的定理：

> 如果右方有什么走法可使一件红木家具保持着连通状态，则这些走法之一是右方的一个值得采取的走法.

**“不可打碎家具”的定理**

我们最好还是来解释一下，它到底是什么意思. 由于

$$\frac{1}{2^n}=\left\{0\middle|\frac{1}{2^{n-1}}\right\},$$

任何走法，只要其值 $\leqslant 1/2^{n-1}$，对右方来说都是一个值得采取的走法（即使他还有其他走法可以获得更小的值）.

如果该定理有反例，那么必定存在着一个边数最小的 $G$. 由于 $G$ 中包含着一个使它保持连通的右方走法，所以它必然含有一个红色回路或一个红色树桠枝（一头自由的边）. 现在设 $G^R$ 为右方的一个值得采取的选择，即对应于一条边，它的砍去将使 $G$ 分裂为两个非空的部分 $G_1$，$G_2$. 由于 $G_1$ 的边数要比 $G$ 的边数少，于是可将“不可打碎家具”定理应用上去，也就是说，它有一个值得采取的选择，可以砍掉一边 $x'$ 而不使它分开. 现在设 $G^{R'}$ 为右方拿掉 $x'$ 边的 $G$ 中选择. 从而 $G$ 看来就像是图 26 的样子，该处 $G_3$ 是把 $x'$ 拿走以后 $G_1$ 所剩下来的部分.

设

$$G_2=\frac{1}{2^p},G_3=\frac{1}{2^q},$$



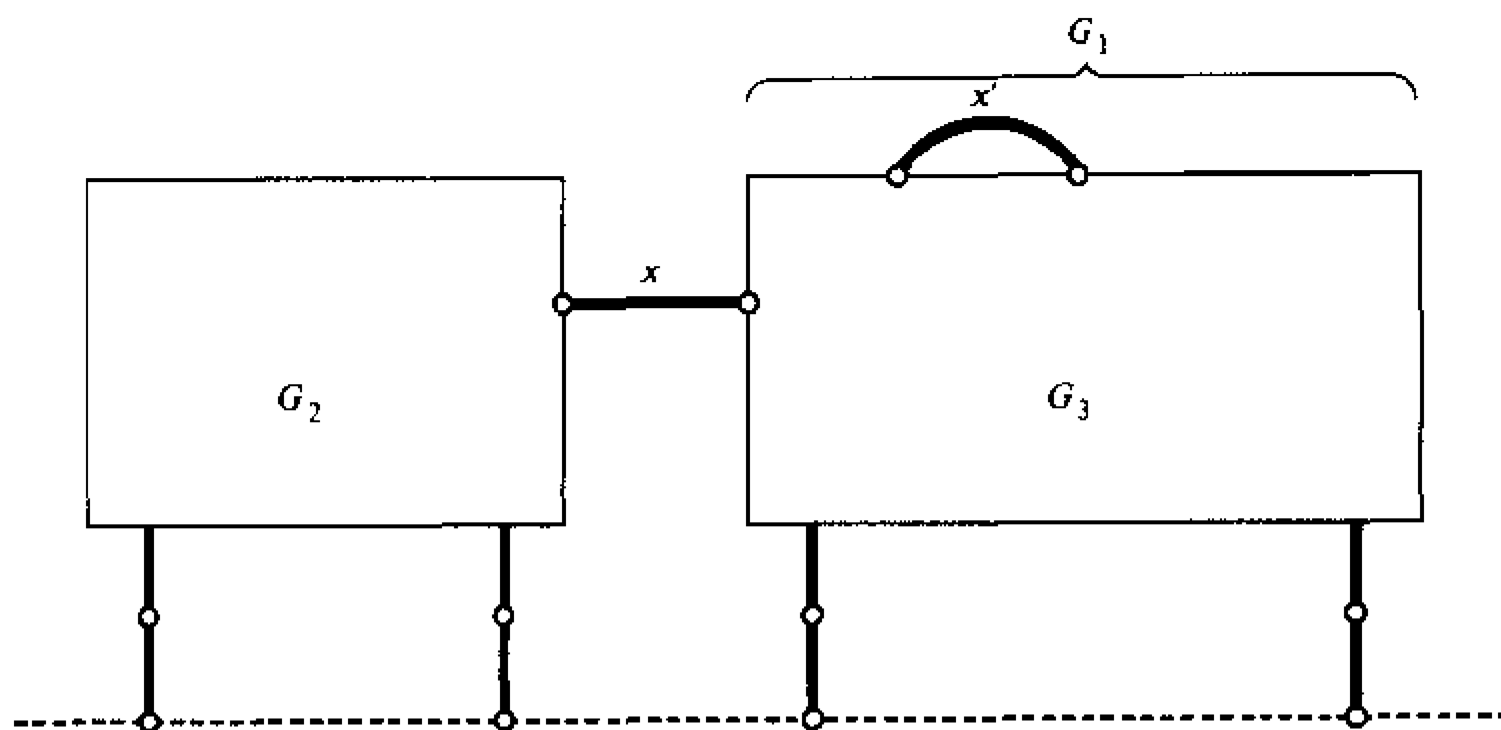



图 26. “不可打碎家具”定理的一个小小罪犯. *

于是

$$G_1=\left\{0\left|\frac{1}{2^q}\right.\right\}=\frac{1}{2^{q+1}},$$

$$G=\{0|G^R\}=\left\{0\left|\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{q+1}}\right.\right\}$$

与

$$G^{R'}\leqslant\left\{0\left|\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^q}\right.\right\}$$

这是因为从 $G^{R'}$ 中拿走 $x$ 将剩下$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^q}$之故. 但现在

$$\frac{1}{2}G^{R'}\leqslant\left\{0\left|\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{2^{q+1}}\right.\right\}\leqslant G,$$

表明 $G^{R'}$ 确是 $G$ 的一个使一切都连通的、值得采取的选择.

现在设 $A$ 是一件红木家具，其中有着右方的一个值得采取的走法，而能使所剩部分仍然联成一件家具 $B$. 于是

$$A=\{0|B\}=\frac{1}{2}B.$$

这是由于根据红木家具定理，$B$ 的值具有$\frac{1}{2^n}$形式之故. 与此类似，如果 $B$ 具有一个值得采取

---

* 译者注：原文如此. 指反例而言.

的、到达状态 $C$ 而仍然保持着完整的一件，则 $B=\frac{1}{2}C$，等等，依此类推. 走了这样的 $m$ 步值得采取的走法以后，我们最终得以断言

$$A=\frac{1}{2^m}T.$$

其中 $T$ 是一件红木家具，但现在若再拿走任意一条红边就要变成不连通了. 你应当把它颠倒过来看(见图 27)，因为没有回路的红边现在成为一棵树，而蓝边却碰着了天! *

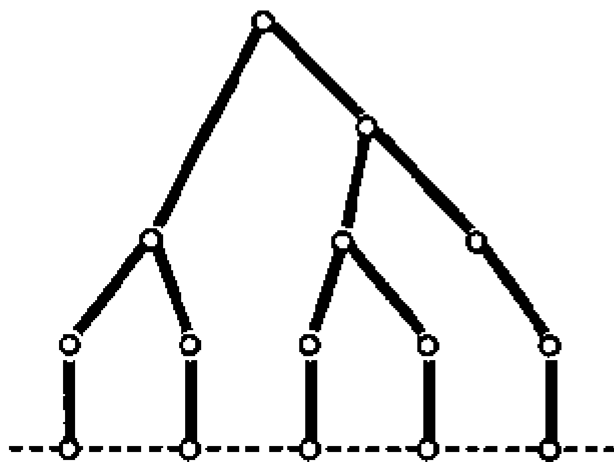


图 27. 一棵红木树.

## 红木床

一张**红木床**是指一种红木家具，其中构成**床垫**的各条边(一切异于家具的"腿"的红边)都正好有一个端点位于"腿"的顶上(见图 28). 它的值将具有如下形式：

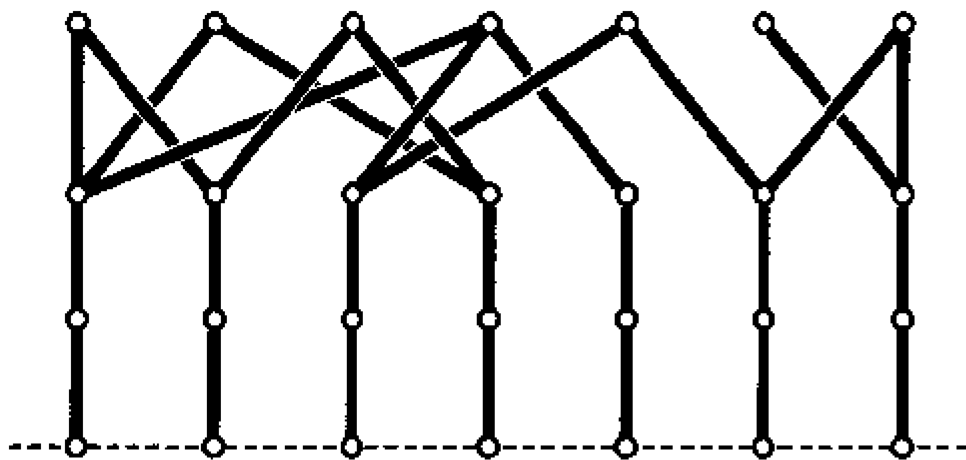


图 28. 一只红木床.

---

* 译者注：树当然是由下而上地生长的，故一般根部在下，于是作者有此种调皮说法. 但在我国一些运筹学及图论书刊中，并无此种刻板的规定. 人们常可见到一些倒立的"树"图，并不影响理解.

$$\frac{1}{2^n}T,$$

其中 $T$ 为一棵红木树，由右方的一系列值得采取的行动而得出，直到再走一步行动就会使图形变得不连通（见图 29）.

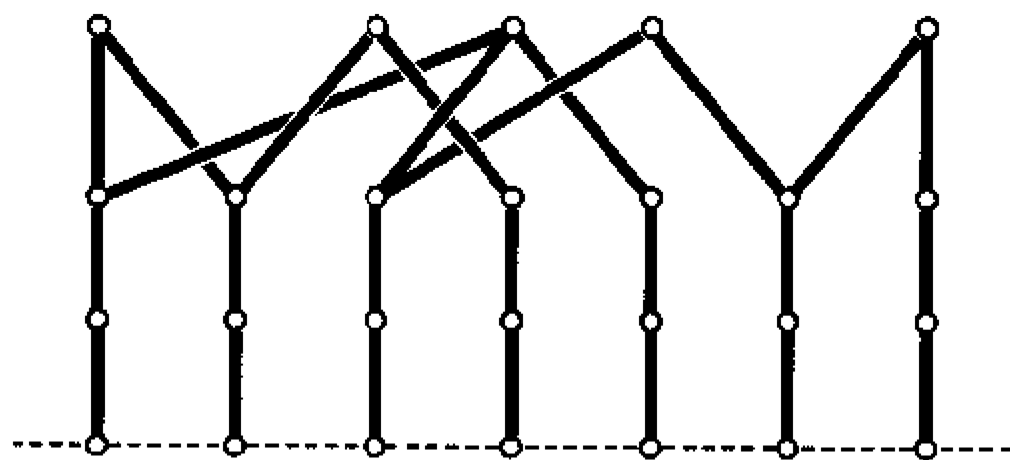


图 29. 做红木床时所用的红木树 $T$.

我们将断言

$$\boxed{T\text{的值为}\frac{1}{2}.}$$

如果不是这样，设 $T$ 为最小的反例，并使右方从 $T$ 采取所谓的值得采取的行动. 结果将是一对红木树，要末它们都是略小的同种类型的树$\left(\text{从而都有值}\frac{1}{2}\right)$，要末其中的一棵树有着一个外加的桠枝（见图 30 中右下这棵树的左上角）.

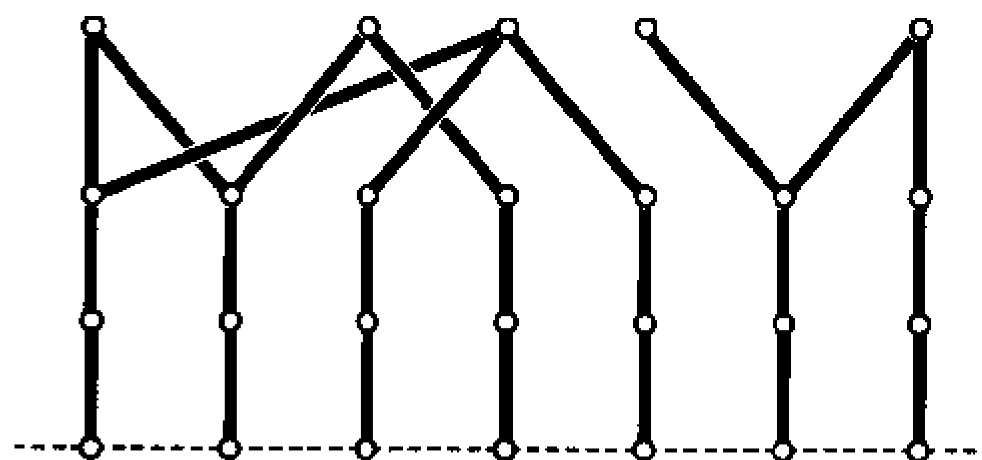


图 30. 不同型的两棵红木树.

但在前一种情况

$$T=\{0|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}\};$$

而在后一种情况有

$$T=\{0|\frac{1}{2}+\frac{1}{4}|-\frac{1}{2}\}.$$

这是由于根据"不要打碎家具"定理，树桠枝必定是一个值得采取的行动(从而使值变为一半)之故.

## 红木床有多大?

从红木床 $B$ 出发，尽你所能使它完整(保持连通性)而采取一系列"值得的"走法. 由于你所得到的树 $T$ 之值为$\frac{1}{2}$，于是有

$$B=\frac{1}{2^m}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{m+1}},$$

其中 $m$ 是你的走法的个数. 现在要问一句：$m$ 有多大?

我们断言：$m$ 是红边 $m'$ 中的最大者，它的拿走将仍能使红木床保持为完整的一件 $T'$. 因为，每次拿走一条边，将得出一系列的图形

$$B,C,\cdots,T'.$$

于是

$$B\leqslant\{0|C\}=\frac{1}{2}C,C\leqslant\{0|D\}=\frac{1}{2}D,\cdots$$

故有

$$B\leqslant\frac{1}{2^{m'}}T'=\frac{1}{2^{m'+1}},$$

从而

$$m\geqslant m'.$$

> 为了搞清楚红木床 $B$ 的大小，你必须知道 $B$ 中含有它的一切"腿"的最小红木树.

但是，根据卡普(Karp)的研究工作(也可参看加莱(Garey)与约翰逊(Johnson)的论文与专著)，这个问题的性质是"NP-完全"问题. 包括一些对此类问题有深刻了解的专家在内，一般都

认为是极其困难的问题. 所以

> 即使是蓝—红伐木游戏,它也是很难搞清楚的问题.

你想求一求图 31 的值吗?

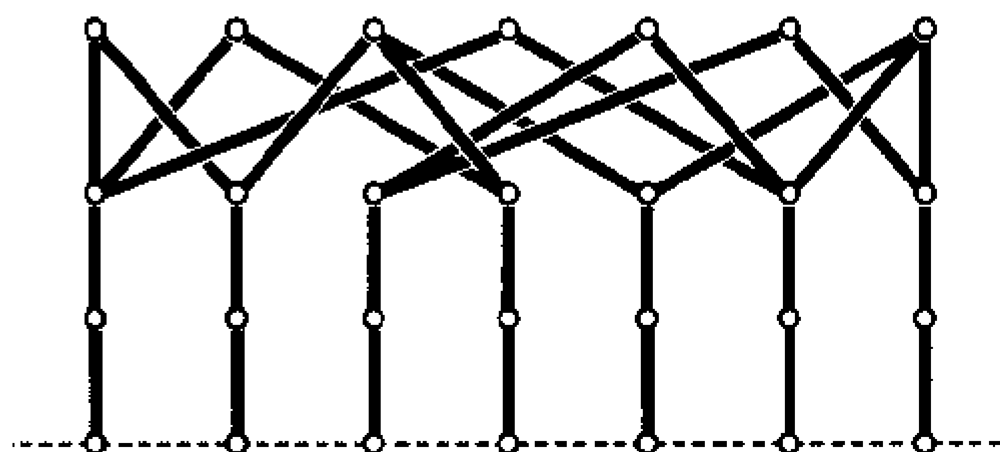
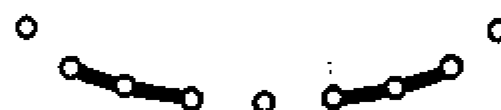


图 31. 一个中等难度的红木床问题.

## 油瓶的原子量



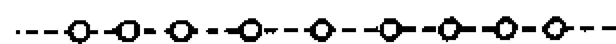


图 32. 油瓶的原子量等于什么?

# 增　　补

## 顺序和，冒号原理与诺顿引理

本章开头部分所提到的复合伐木游戏 $G_r : H$ 是顺序和 $G : H$ 的一种推广，对两个任意博弈可定义如下：

$$G : H = \{G^L, G : H^L \mid G^R, G : H^R\}.$$

在这种求和中，$G$ 的任一行动湮灭 $H$，而 $H$ 的任何行动却使 $G$ 不受影响(一般伐木游戏的复合与此相似，但也有可能在 $G$ 中存在着不湮灭 $H$ 的行动).

冒号原理，

$$H \geqslant K \quad 蕴含 \quad G : H \geqslant G : K,$$

一般都可应用，在特殊情况下则显示

$$H = K \quad 蕴含 \quad G : H = G : K,$$

从而 $G : H$ 只取决于 $H$ 的值，而不取决于它的形式. 不幸的是它有可能取决于 $G$ 的形式，因为确实存在着博弈 $G_1 = G_2$ 而 $G_1 : H \neq G_2 : H$. 这个缺陷可由诺顿引理(见第 8 章)取得补偿. 它蕴含着这样的意思：$G : H$ 同 $G$ 在博弈值上面通常几乎无法区别. 该引理更确切地断言，如果

$$G < K, G \parallel K, G > K,$$

则

$$G : H < K, G : H \parallel K, G : H > K,$$

除了 $K$ 的一些局势与 $G$ 有同样博弈值之外.

对于某些变化情况，例如一般伐木游戏的复合物 $G_r : H$，上述绝大多数性质能够继续成立.

## 无偏博弈的两种相加法

我们已经知晓，在你希望得知通常的无偏博弈和的结果时，尼姆值是确实有用的. 如果你还

想求出顺序和，那么还需要点什么呢？答案是：各种可能选择的尼姆值，有此就行.

若一博弈的尼姆值为 $m$，而各种选择的尼姆值是 $a,b,c,\cdots$，则尼姆值有可能改变为

$$\alpha=m\overset{*}{+}a,\beta=m\overset{*}{+}b,\gamma=m\overset{*}{+}c,\cdots$$

于是我们可记为

$$\{a,b,c,\cdots\}=m_{\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}}$$

并将 $\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$ 称为**变动集合**. 斯普莱格–格隆第理论告诉我们，怎样在通常意义下“相加”这种信息：

$$m_{\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}}+n_{\{\delta,\varepsilon,\zeta,\cdots\}}=(m\overset{*}{+}n)_{\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\delta,\varepsilon,\zeta,\cdots\}}$$

（把值按尼姆加法求和，将变动统一处理）. 譬如说，由于 $\{0,1,6\}=2_{\{2,3,4\}}$，而 $\{0,3,4\}=1_{\{1,2,5\}}$，于是得出

$$\{0,1,6\}+\{0,3,4\}=3_{\{1,2,3,4,5\}}=\{2,1,0,7,6\}.$$

如按**顺序和**的意义相加，我们可利用规则：

$$\{a,b,c,\cdots\}:\{d,e,f,\cdots\}=\{a,b,c,\cdots,m_d,m_e,m_f,\cdots\}$$

其中 $m_0,m_1,m_2,\cdots$ 是在 $\{a,b,c,\cdots\}$ 中不出现的一切数. 对 $\{0,1,6\}$ 来说，不出现的数为 $m_0=2$，$m_1=3,m_2=4,m_3=5,m_4=7,m_5=8,\cdots$ 从而有

$$\{0,1,6\}:\{0,3,4\}=\{0,1,6,2,5,7\}.$$

# 多维濯足节蛋糕

你可以随心所欲地去玩多维濯足节蛋糕游戏，自然可对某些玩家作出某些保留. 我们说，一个有着

$$a\times b\times c\times\cdots\qquad\times r\times s\times t\times\cdots\qquad\times l\times m\times n\times\cdots$$

的蛋糕的值，其中的维数

$$a,b,c,\cdots\qquad r,s,t,\cdots\qquad l,m,n,\cdots$$

可由

任一局中人都可以切割　　只限右方切割　　只限左方切割

相应地为　$abc\cdots M(rst\cdots,lmn\cdots)+*(\mu$ 或 $\mu+1)$.

此处 $M(x,y)$ 是第 2 章增补材料中所提到的函数，而

$$\mu = \alpha \overset{*}{+} \beta \overset{*}{+} \gamma \overset{*}{+} \cdots$$

其中的 $\alpha,\beta,\gamma$ 分别为 $a,b,c,\cdots$ 的奇素数因子(重复因子也得算进去),若 $abc\cdots$ 为偶数时需要加上 1.

在证明中要有一个抽象的绿色丛林从一个抽象的紫色山峦中滑落下去,在下滑的每个阶段,山峦都要乘上一个因子!

## 图 15 的解答

门的原子量等于 2. 自蓝到红的最大流除了屋脊与屋檐正中的一边之外占据了一切. 墙与屋檐相交的结点应当着成绿色,屋顶与墙的原子量是 0. 最大的蓝—红流占有了把两颗畏缩的蓝色人头挂起来的两根头发. 左边的桩子上没有通到地线的流,但右边的桩子上却有着一个从地线到红边的流. 因而挂着三颗人头的横杠与两边的桩子,其原子量为 −1. 整个图形的原子量为

$$2-0+(-1)=+1.$$

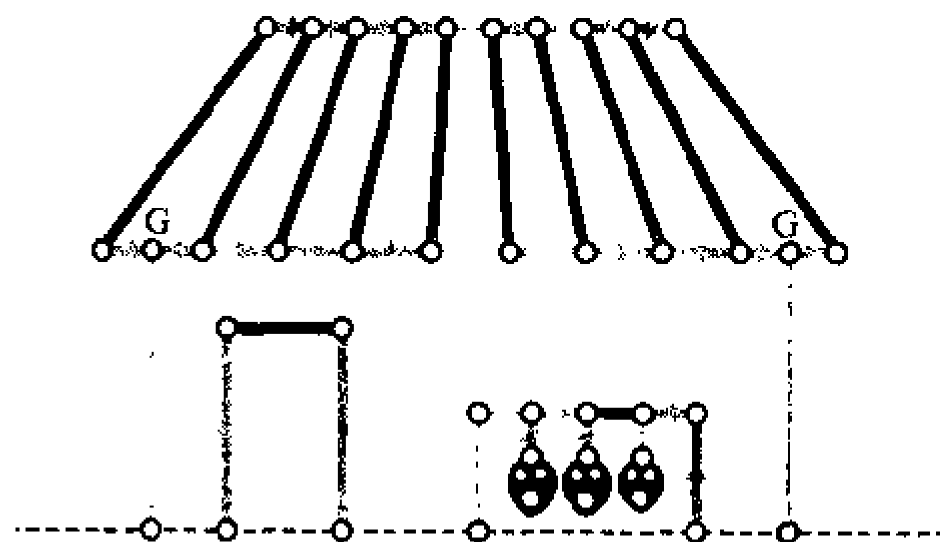



图 33. 究竟怎样计算才不至于搞糊涂.

## 在目迷五色的丛林中清出通道

有经验的玩家金伯利·金(Kimberley King)发现了从蓝到红的两条直接通道(见图 34 中的 1 与 2),还有第 3 条通道是从蓝边到地线,你不可能再找出更多的通道了,所以蓝方将领先一步,但他如果想十拿九稳地囊括一切,他最好还是先走.

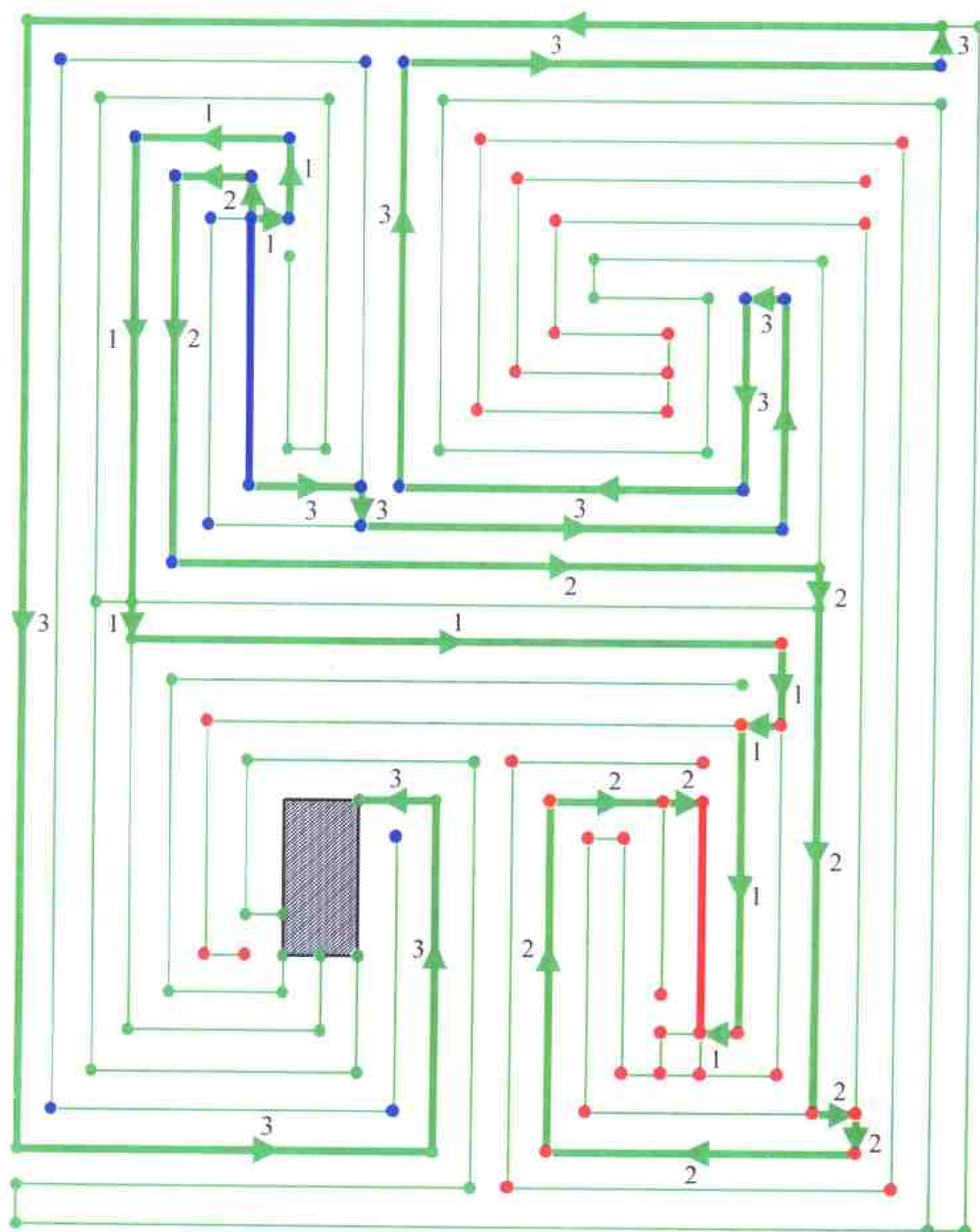


图 34. 在目迷五色的丛林中清出来的通道.

## 这张床有多少难度?

我们必须找出图 31 中包括一切床"腿"的最小红木树. 图 35 给出了顶上一排的两个结点与联结床"腿"之边的邻接矩阵*. 显然,只用顶上 3 个结点是不够的,因为它们中间只

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**图 35.** 中等难度红木床的床罩.

有两个结点(第 3 列与第 7 列与顶上一行的交点)是在三条边上,而 3+3−2=8 条边是不足以联起 7 条床腿的,那将需要 7+(3−1)=9. 如果我们用上 4 个结点,那就有 7+(4−1)=3+3+2+2,为此我们就可作出一种安排,用上第 3 列与第 7 列的结点,第 5 列与第 6 列中的一个结点(为了联结第三条床腿(第三行),再加上另外一个结点(第 1,2 或 4 列的结点). 所以,在 16 条联结边中,真正需要的只有 10 条边,而 6 条边可允许拿掉,因此,这张红木床的值是

$$\frac{1}{2^{6+1}}=\frac{1}{128}.$$

## NP(非多项式)难度

贯穿本书全部内容,我们想帮助你在博弈中稳操胜券. 我们始终一贯地把精力集中在那些

* 译者注:邻接矩阵是图的一种矩阵表示,请参阅图论或线性代数有关书籍.

博弈上.它们具有足够良好的结构,有助于帮你获得工具与技巧以便使你在比赛中一贯击败你的朋友,直至他们也来读这本书.双方都读了这本书以后,公平竞争依旧是可能的,但比赛的水准要高得多了.

许多组合理论家近来却作出另一种完全不一样的探索办法,他们不去研究各种特定的博弈以便从中找出灵巧的策略,却试图证明某些类型的博弈是非常困难的.所谓"困难",意思是指,正确指导一切玩法的任何算法都将需要花费十分庞大的计算工作量.从某种意义上来说,这种研究办法同我们的方法也有互补之功.任何一个正面的结果(即包含一种我们在进行探索的构造性策略)都提出了一个推广性质的问题:同样的技术能不能用来有效地解决规模更大的博弈?任何一个负面的结果(其中包含着一种证法,证明在扩大的博弈中能解决问题的任何算法从某种意义上来说必然是异常复杂的)则提出了一个特殊化的问题:在"困难"博弈的大类中有哪些子类是货真价实的困难,而哪些子类是比较"容易"的?典型的情况是,困难的类中包含着为数无限众多的困难博弈,但通常也会存在另一种情况,困难类中满足某些附加条件的一切博弈是比较"容易"的.有时,甚至存在着一个已知算法,它能迅速而有效地解决困难类中绝大多数的博弈,但需要无限漫长的时间来解决一个相对说来很小的子集合中的博弈;正是这个很小的子集合使这一种类"硬"得啃不动.

对计算数学认为很困难的问题存在着好几种不同的定义.最强的定义之一是指那些要用"指数时间才能完成"的问题.它意味着,能解决类中一切问题的任何算法都必然具有一种性质,即其运行时间(用于定义问题的输入长度的函数)将要大于该输入的指数函数,而这种情况将无限多次出现.斯笃克梅耶与钱德拉(Stockmeyer and Chandra)已经引进了一种名为"PEEK"* 的博弈以证明这一点.

另外也有一些游戏,看来似乎也同样困难,但无人能够真正证明它们是否真的需要指数时间!在这些问题中,两个最重要的种类是所谓的"PSPACE 中的完全问题"以及"NP—完全问题".如想了解确切定义,请大家参阅最近出版的加莱与约翰逊所写的一本很出色的书.伊文(Even)与塔尔詹(Tarjan)证明,广义六角星棋是 PSPACE 完全的,而谢弗(Schaefer)则对广义地理游戏,广义开勒司,科尔游戏及小放牛游戏作了类似的判定.至少与 NP—完全问题同样困难的问题称为 NP—困难问题.弗兰凯尔(Fraenkel)与叶谢(Yesha)证明他们的湮灭游戏是 NP—困难问题.弗兰凯尔等人证明 $N\times N$ 西洋跳棋在某些跳法下是 PSPACE –困难与 PSPACE –完全问题;列支敦士登(Lichtenstein)与西普塞(Sipser)证明 $N\times N$ 围棋是 PSPACE 困难的;关于国

* 译者注:详见《科学的美国人》杂志 240 卷第 5 期.

际象棋的类似结论则在最近由杰姆·斯笃娄(Jim Storer)在贝尔实验室取得. 指数时间完全问题是 PSPACE 困难问题,而 PSPACE 困难问题是 NP—困难问题,但人们并不了解这些命题的逆命题是否为真.

可是,确实已经知道,如果存在着一个良好算法,能解决一切 NP—困难问题,则它也必定能够解决一切 NP—完全问题. 例如,我们已在本章中看到,蓝—红伐木游戏局势的任一良好求值算法经过修改之后,也可得出一个求出二分图的最小生成树的良好算法. 另外,若有一个神奇的假想算法,用它来计算蓝—红伐木游戏局势的值时,其运行时间在输入的多项式函数的范围之内,则经过修正之后,求出最小生成树的导出算法也同样能具有上述性质. 由于后者是 NP—完全问题. 所以蓝—红伐木游戏局势的求值是 NP—困难问题.

追随柯克(Cook)与卡普(Karp)的先驱性研究以后,加莱与约翰逊已经发现范围很广的一类组合问题具有 NP—完全性. 解决其中任何一个问题的近似良好算法在经过改进以后,也必将能解决其他任何 NP—完全问题. 许多著名数学家与计算机科学家费尽心机企图解决这些问题中的某几个,可是毫无所获. 于是:

> 如果你能证明一个博弈是 NP—困难问题,那么你肯定有把握地可以断言,直到 1981 年为止*,还没有人知晓解决它的近似优良算法.

我们在第 6 章中提到的,以热图为基础的策略只需要很小的计算工作量,即可在许许多多小而热的博弈之和中找到近似的最优解. 热策略产生数以百万计的最优走法,可是只有为数很少的次优解. 但若你坚持要求出最优解,那么你就必须去做大量计算,因为最近洛克乌德·摩利斯(Lockwood Morris)已经找到一种办法,可将短而热的博弈作成其和为 NP—困难的问题.

在第 16 章中我们将正式证明"造房子"游戏**是 NP—困难问题. 然而,请注意这一近似结果对在很小棋盘上做精彩游戏的计算良好策略的难度讲得极少. 实际上,第 16 章的大部分内容是专门显示这些策略的. 我们当真认为被我们证明为 NP—困难的造房子游戏的一些局势毋宁是残局游戏中一种退化的、相对说来比较沉闷的子类. 有些人认为一类问题如果已被证明为 NP—

---

* 译者注:本书出版于 1982 年,所以作者有此说法. 迄今为止已过去 18 年之久,但 NP—完全问题的进展仍然停滞不前,没有取得重大突破.

** 译者注:直译是"点与盒"问题.

困难问题,那么它们就已经"完事大吉",不必再去进行研究了.我们强烈反对这种观点.

有一些具有 NP 困难性质的博弈是非常有趣的!

有可能找到玩这类游戏的良好策略,它将帮助你始终如一地击败从未读过本书的对手;造房子游戏就是一个出色的例子.

噢,我们还要顺便讲一讲.

## 第 7 章末尾的油瓶

其值是 7. ↑,可能再加上一些没有原子量的附加值.

## 参考文献及进一步阅读材料

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, pp. 86–91 (Blue-Red Hackenbush), 165—172 (Green Hackenbush), 188—189 (Hackenbush Hotchpotch).

Stephen A. Cook, The complexity of theorem-proving procedures, Proc. 3rd A. C. M. Sympos. Theory of Comput., 1971, 151—158; Zbl. 253.68020.

J. E. Damß and D. Markert, Strategien für ein kombinatorisches Spiel, Praxis Math. **20**(1978) 75—83.

S. Even and R. E. Tarjan, A combinatorial problem which is complete in polynomial space, J. Assoc. Comput. Mach. **23** (1976) 710—719; Zbl. 355.68041.

L. R. Ford and D. R. Fulkerson, "Flows in Networks", Princeton University Press, 1962.

A. S. Fraenkel and Y. Yesha, Complexity of problems in games, graphs and algebraic equations, Discrete Appl. Math. **1** (1979) 15—30.

A. S. Fraenkel, M. R. Garey, D. S. Johnson, T. Schaefer and Y. Yesha, The complexity of checkers on an $n \times n$ board—Prelim. Report. Proc. 19th Ann. Sympos. Foundations Comput. Sci., IEEE Comput. Soc., Long Beach, 1978, 55—64.

M. R. Garey and D. S. Johnson, Approximation algorithms for combinatorial problems: an annotated bibliography, *in* J. F. Traub (ed.) "Algorithms and Complexity; New Directions and Recent Results", Academic Press, New York and London, 1976, pp. 41—52.

Michael R. Garey and David S. Johnson, "Computers and Intractability; a Guide to the Theory of NP-completeness", W. H. Freeman, San Francisco, 1979.

M. R. Garey, D. S. Johnson and L. Stockmeyer, Some simplified NP complete problems, Proc. 6th A. C. M. Sympos. Theory of Comput., 1974, 47--63.

M. R. Garey, D. S. Johnson and L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems, Theor. Comput. Sci. **1** (1976) 237—267; Zbl. 338.05120.

M. R. Garey, D. S. Johnson and R. Endre Tarjan, The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete, SIAM J. Comput. **5** (1976) 704—714; Zbl. 346.05110.

I. J. Good, And Good saw that it was god(d). Parascience Proc. **1** #2 (Feb. 1975) 3--13.

Richard M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, *in* R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.) "Complexity of Computer Calculations," Plenum, New York, 1972, pp. 85—103.

Richard M. Karp, The fast approximate solution of hard combinatorial problems, Proc. 6th SE Conf. Combinatorics, Graph Theory, Computing, Boca Raton, 1975, 15—31; Zbl. 369.05049.

R. M. Karp, On the computational complexity of combinatorial problems, Networks, **5** (1975) 45—68; Zbl. 324.05003.

David Lichtenstein and Michael Sipser, GO is P-space hard, Proc. 19th Ann. Sympos. Foundations Comput. Sci., IEEE Comput. Soc., Long Beach, 1978, 48—54; MR **80e**: 68115.

W. J. Paul and R. E. Tarjan, Time-space trade-offs in a pebble game, Acta Inform. **10**(1978) 111—115.

Wolfgang J. Paul, Robert Endre Tarjan and James R. Celoni, Space bounds for a game on graphs, Math. Systems Theory, **10** (1977) 239—251; Zbl. 366.90151. Corrections, *ibid.* **11** (1977) 85.

Stefan Reisch, Gobang is PSPACE-complete, Acta Informatica; Zbl. 401.90112.

Edward Robertson and Ian Munro, NP-completeness, puzzles and games, Utilitas Math. **13** (1978) 99—116.

Thomas J. Schaefer. On the complexity of some two-person perfect information games. J. Comput. Systems Sci. **16** (1978) 185—225.

Larry J. Stockmeyer and Ashok K. Chandra, Provably difficult combinatorial games, SIAM J. Comput. **8** (1979) 151—174; MR **80d**:68055; Zbl. 421.68044.

Larry J. Stockmeyer and Ashok K. Chandra, Intrinsically difficult problems, Sci. Amer. **240** #5 (May 1979) 140—159.

# 第8章

# 它是一个小，小，小，小，……小世界！

> 陪审团成员全都在他们的小石板
> 上记录下来，"她不相信其中会有
> 一星半点的意思".
>
> 刘易士·卡洛尔《爱丽丝漫游奇境记》，第12章

有许多博弈，例如

$$* = \{0|0\},\quad \uparrow = \{0|*\},\quad *2 = \{0,*|0,*\},$$
$$\uparrow * = \{0,*|0\},\cdots$$

等等，其中两位局中人都有着从任一非终极状态出发的合法行动，这样就防止出现博弈值是数的情况，例如

$$1 = \{0|\},\quad -3 = \{|-2\},\cdots$$

从而事实上保证了一切局势都具有无穷小值. 我们将把这种博弈称为**全都是小的**.

图1是一个伐木游戏大杂烩花圃，从以前各章可以回忆得起

蓝边只能由左方砍伐，
红边只能由右方砍伐，
绿边可由双方砍伐.

由于唯一的接地边是绿边，所以图上若还有任何东西剩下来，双方都有合法行动可走. 从而，图中的伐木游戏花圃就是上面所说的全(都是)小博弈.

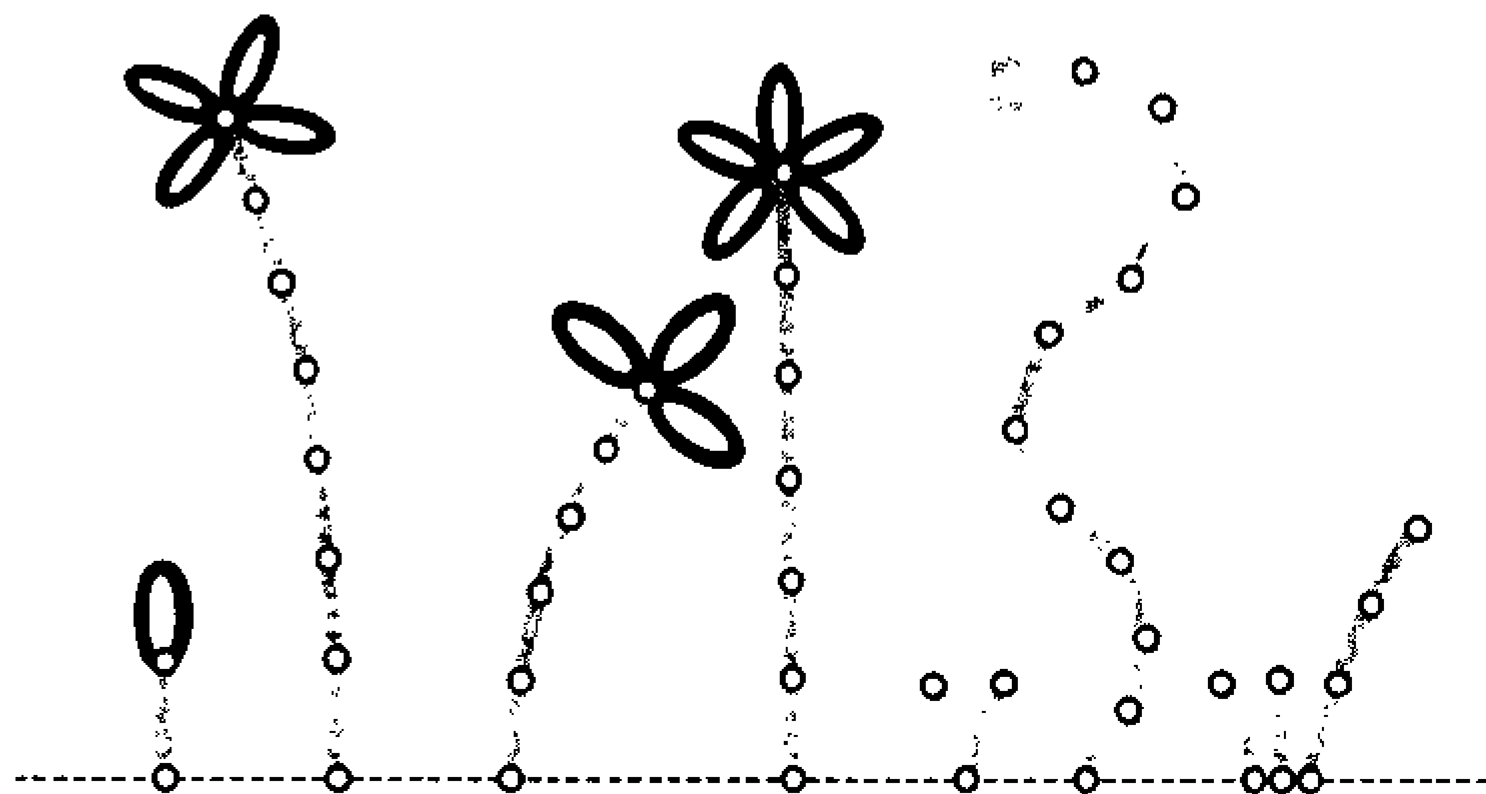


图 1. 另一个花圃.

你们不需要先去读第 7 章，那是讲复杂伐木游戏局势的，如果我们现在需要使用一些花的简单性质，我们将会重新推演.

## 特征度与不确定性*

第 7 章伐木游戏大杂烩中出现的小游戏，其值可以表为完整的花朵数或与之相当的向上箭头(↑)数. 在这一章中我们将表明每个很小的博弈也都具有一定的**原子量**，或者也可称为特征度*，因为它能告诉我们，它的值最接近等于多少个向上箭头.

即使在伐木游戏大杂烩的花朵之和中，也存在着↑或⇑的基本不确定性，从而使它的完整分析变得极其困难. 我们所能肯定的只是，2 或更多花朵的优势可以稳赢，即使下一步是对方先走也行. 如果只有一朵花或没有花，那就难说了. 也许够，也许不够，因为局中人必须准备，在茎

---

* 译者注："uppitiness". 在许多辞典(包括《数学名词辞典》)上根本查不出.《新英汉辞典》的解释是"傲慢的"、"盛气凌人的". 用在这里完全不合适. 根据上下文的意思，它实际上就是"原子量"，作者自己也认同了这种理解. 他们实际上是从"up"(向上箭头，即↑)出发，制造了这个单词的.

干长度上打一场类似于尼姆游戏的仗，还要加上他们的首要目标——清除掉对方颜色的各条边. 实际上当地面上的一切花朵都枯萎下来之后，天上的星辰仍将留下来，而结局如何，就得看尼姆值了.

即使对伐木游戏中不出现的全小博弈，要说的话基本上也是如此. 每一个这样的博弈 $g$ 都有着一个确定的原子量 $G$，而

> 如果 $G \geqslant 2$，则 $g \geqslant 0$.

**两个↑的优势就可以放心**

反之，若原子量 $G$ 为 0 或 1，那就有可能还不够，这是由于埋伏在 $g$ 中的尼姆游戏的微妙性难以捉摸.

我们能够减少不确定性，但要花上一些代价，那就是增添一个极其庞大的尼姆堆. 由于对某个庞大的数 $N$，可使其值为 $*N$，我们将把它称为**遥远的星**. 只要足够大，$N$ 的确切数值无关紧要，于是我们可以对任一足够遥远的星使用一个特殊记号，

☆（"远星"）

于是就有

> $G \geqslant 1$ 时，可以明确地说 $g + ☆ \geqslant 0$.

所以当右方先走而有远星存在时，要使左方取胜，则至少为 1 的原子量不仅是充分条件，而且也是必要条件.

远星使我们不必担心博弈中类似于尼姆游戏的那一部分的确切构造，因为从足够遥远的星出发，我们能达到任意向望的拧数，0，$*1$，$*2$，$*3$，…

> 要想知道 $g + ☆$ 的结局，你需要了解的只不过是 $g$ 的原子量.

一般，我们将用小写字母表示很小的博弈，而用大写字母表示它们的原子量.

## 计算原子量

计算原子量极像把温度冷却 2 度（见第 6 章），但我们必须不时将 $g$ 同远星加以比较.



设

$$g=\{a,b,c,\cdots|d,e,f,\cdots\}$$

而且我们已经知道了各个原子量

$a$ 的 $A$，$b$ 的 $B$，$c$ 的 $C$，…；　　$d$ 的 $D$，$e$ 的 $E$，$f$ 的 $F$，…，

则

> $g$ 的原子量 $G$
>
> $G_0=\{A-2,B-2,C-2,\cdots|D+2,E+2,F+2,\cdots\}$
>
> 除非 $G_0$ 是一整数而且或者 $g>☆$ 或者 $g<☆$.
>
> 在这些异常情况下：如果 $g>☆$，则 $G$ 是最大的整数而有
>
> $G\lhd|D+2, G\lhd|E+2, G\lhd|F+2,\cdots,$
>
> 如果 $g<☆$，则 $G$ 是最小的整数而有
>
> $G|\rhd A-2, G|\rhd B-2, G|\rhd C-2,\cdots.$

**原子量的计算**

我们通常只记为

$$G=\text{“}\{A-2,B-2,C-2,\cdots|D+2,E+2,F+2,\cdots\}\text{”},$$

这里的引号指出，在异常情况下必须谨慎从事.

现在要问，所谓远星，究竟远到什么程度呢？

> $*N$ 已经足够可以当作一颗远星，如果 $g$ 中没有什么局势（也包括 $g$ 本身在内）具有值 $*N$ 的话.

于是对 $\uparrow=0|*$ 来说，$*2$ 已经远得足够了，这样一来，因为 $\uparrow>*2$，从而我们可以写出 $\uparrow>☆$.

与此类似，对 $*m$ 来说，$*(m+1)$ 已经远得足够了，由于

$$*m\,|\,*(m+1)，故有 *m\,\|\,☆.$$

这已经足够说明

> 任一拧数 $*m$ 的原子量为 0，

因若我们已知 0，$*1$，$*2$ 的原子量是 0，则因 $*3 \| ☆$，我们将由上面的公式给出

$$*3=\{0, *1, *2 | 0, *1, *2\}$$

的原子量

$$G_0=\{0-2, 0-2, 0-2 | 0+2, 0+2, 0+2\}=0.$$

另一方面，

| ↑ 的原子量为 1， |
|---|

因为我们虽已求得

$$G=\text{“}\{0-2 | 0+2\}\text{”}=\text{“}\{-2 | 2\}\text{”},$$

却遇到一个异常情况

$$\uparrow > ☆,$$

因而必须选取最大整数 $\lhd | 0+2$，即 1.

现在让我们来核实 $\downarrow * | 0 = \Downarrow$ 的原子量是 $-2$. 我们的计算办法给出

$$G=\text{“}\{-1-2 | 0+2\}\text{”}=\text{“}\{-3 | 2\}\text{”}.$$

但由于

$$\Downarrow < ☆,$$

所以我们必须选取最小整数 $|\rhd -3$，即 $-2$.

## 吃饼游戏

它的发明者是杰姆·皮纳姆(Jim Bynum). 这种游戏是我们将在第 9 章中讲到的吃诸饼游戏的析取形式. 桌上放着一些长方形的烧饼(开始时只有一块)，用平行线划成许多 1×1 小正方形. 轮到左方(左兄)走时，他必须吃掉宽度为 1 的垂直条块，这样一来就有可能把原来的烧饼分割成较小的两块. * 右方(右妹)的走法与此类似，但她必须按水平方向横吃.

你们自然不需要请妈妈来烘烤许多烧饼的，皮纳姆建议你们只要用普通扑克牌来做游戏就行. 在下面的图 2 中你将看到右妹走的是游戏的第二步动作.

皮纳姆从很小的矩形开始，用穷举法一个事例、一个事例地进行分析，做了大量工作. 他用经验方法发现，本游戏的结果只取决于矩形两边长度的奇偶性. 该证明刊载于 ONAG 一书的

---

* 译者注：左方也可以沿着边缘吃饼，这样，剩下来的饼仍是一个整体. 所以此处只说是“可能”，并非必然如此.

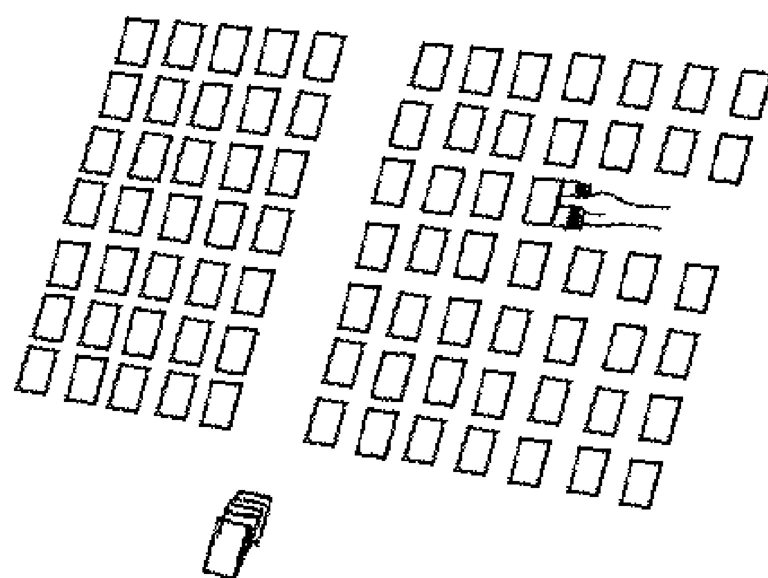


图 2. 右妹在吃饼游戏中走了第二步.

201 页至第 204 页，在下面的表 1(a)中给出了各种矩形饼的博弈值，其中的 $g_i$ 定义如下：

$$g_1=0|*=\uparrow,$$
$$g_2=\{g_1+g_1|*\},$$
$$g_3=\{g_1+g_2,g_2+g_1|*\},$$
$$g_4=\{g_1+g_3,g_2+g_2,g_3+g_1|*\},$$
$$g_5=\{g_1+g_4,g_2+g_3,g_3+g_2,g_4+g_1|*\}.$$

一般情况为

$$g_n=\{g_1+g_{n-1},g_2+g_{n-2},\cdots,g_{n-1}+g_1|*\}.$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $*$ | $-g_1$ | $*$ | $-g_1$ | $*$ | $-g_1$ | |
| 2 | $g_1$ | $*$ | $g_2$ | $g_2-g_1+*$ | $g_3$ | $g_3-g_1+*$ | |
| 3 | $*$ | $-g_2$ | $*$ | $-g_2$ | $*$ | $-g_2$ | |
| 4 | $g_1$ | $g_1-g_2+*$ | $g_2$ | $*$ | $g_3$ | $g_3-g_2+*$ | |
| 5 | $*$ | $-g_3$ | $*$ | $-g_3$ | $*$ | $-g_3$ | |
| 6 | $g_1$ | $g_1-g_3+*$ | $g_2$ | $g_2-g_3+*$ | $g_3$ | $*$ | |
| | | | | | | | |

表 1. (a) 吃饼游戏之值.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ‖ | — | ‖ | — | ‖ | — | ‖ |
| 2 | + | ‖ | + | ‖ | + | ‖ | + |
| 3 | ‖ | — | ‖ | — | ‖ | — | ‖ |
| 4 | + | ‖ | + | ‖ | + | ‖ | + |
| 5 | ‖ | — | ‖ | — | ‖ | — | ‖ |
| 6 | + | ‖ | + | ‖ | + | ‖ | + |
| 7 | ‖ | — | ‖ | — | ‖ | — | ‖ |

(b)吃饼游戏的结果.

这些局势的原子量是什么呢? 我们知道

$g_1=\uparrow$ 有着原子量 1,从而

$g_2=\Uparrow|*$ 有原子量$\{2-2|0+2\}=1$,于是

$g_3=\{g_1+g_2|*\}$有着同样原子量$\{2-2|0+2\}=1$,

由数学归纳法可知 $g_4,g_5,\cdots$也都是如此.

当你玩吃饼游戏时,可以利用表 1 来计算出下列形式

$$g_a+g_b+\cdots+g_c+\cdots(+*,\text{有时需要})$$

表示的各局势之值.

由于所有的 $g_i$ 都有着原子量 1,

> 如果正的 $g_i$ 比负的 $g_i$ 至少多出 2 个,或者至少多出 1 个而左方先走,则左方能赢.

对它作进一步分析时,比较聪明的办法是设

$$g_n=h_1+h_2+\cdots+h_n.$$

这些 $h_i$ 是正的无穷小量,其性质十分有趣(可参看 ONAG,第 203—204 页).

## 分割原子

原子量通常为整数,但并非永远如此,例如,

$$\Uparrow|\downarrow\text{的原子量为}\{2-2|-1+2\}=0|1=\frac{1}{2},$$

更复杂的数也能出现. 但原子量甚至可以不一定是数:

$\Uparrow|\Downarrow$的原子量为$\{2-2|-2+2\}=0|0=*$,

$\Uparrow\!\!\uparrow|\Downarrow\!\!\downarrow$的原子量为$\{3-2|-3+2\}=1|-1=\pm1$.

但是它们仍然能够很好地相加起来:

> 若 $g,h,k,\cdots$的原子量为 $G,H,K,\cdots$,
> 则 $g+h+k+\cdots$的原子量为 $G+H+K+\cdots$

例如，

$$\uparrow | \downarrow + \Uparrow, \Downarrow \text{的原子量为} \frac{1}{2} + *.$$

稍等一下我们就能看到在孩子气伐木大杂烩游戏中出现的一些饶有兴趣的原子量，但我们现在先来看

## 转一转再吃饼游戏

在ONAG这本书的第199页至第200页介绍了这种游戏，它是作为皮纳姆游戏的扭转形式来介绍的，它的玩法同吃饼游戏基本相同，但在吃去一条之前，局中人必须先把饼转动一个直角.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $*$ | $\uparrow$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^2$ | $*$ | $\uparrow$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^2$ |
| 2 | $\downarrow$ | 0 | $\downarrow$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow$ | 0 | $\downarrow$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 |
| 3 | $*$ | $\uparrow$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^2$ | $*$ | $\uparrow$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^2$ |
| 4 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_3$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_3$ | 0 |
| 5 | | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^3$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^3$ | | $\uparrow^2$ | $*$ | $\uparrow^3$ |
| 6 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 |
| 7 | $*$ | $\uparrow$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^2$ | $*$ | $\uparrow$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^2$ |
| 8 | $\downarrow$ | 0 | $\downarrow$ | 0 | $\downarrow_3$ | 0 | $\downarrow$ | 0 | $\downarrow$ | 0 | $\downarrow_3$ | 0 |
| 9 | $*$ | $\uparrow$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^2$ | $*$ | $\uparrow$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^2$ |
| 10 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 |
| 11 | | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^3$ | $*$ | $\uparrow^2$ | | $\uparrow^3$ | | $\uparrow^2$ | $*$ | $\uparrow^3$ |
| 12 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_3$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_2$ | 0 | $\downarrow_3$ | 0 |

**表 2.** 转一转再吃饼游戏中的绝大多数值.

除了一边为 $6n+5$ 形式的矩形之外，这些值的周期为6(见表2). 博弈

$\uparrow^2 = \{0 | \downarrow + *\}$ （读作:"向上箭头二次方"）

$$\uparrow^3 = \{0 \mid \downarrow + \downarrow_2 + *\}$$（读作:“向上箭头三次方”）

的性态看上去就像真的是 $\uparrow$ 的平方与立方,从而有:

任意多少个 $\uparrow^2$ 相加,还是小于 $\uparrow$;

任意多少个 $\uparrow^3$ 相加,还是小于 $\uparrow^2$.

我们还用 $\downarrow_2$(“向下箭头二次方”)与 $\downarrow_3$(“向下箭头三次方”)表示 $\uparrow^2$ 与 $\uparrow^3$ 之负博弈. 这些博弈的原子量为 0.

对应于边长为 $6n+5$ 的行,其中各款数字在第一行之后,其周期为 12. 表 2 中空缺的数字,另一边之长为奇数,而值为

（$\uparrow$ 的一个倍数）$+ *$.

| | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6n+5$ | $\uparrow + *$ | $*.\uparrow + *$ | $*$ | $\frac{1}{2}.\uparrow + *$ | $\frac{1}{4}.\uparrow + *$ | $*$ | $\frac{1}{2}.\uparrow + *$ | $\frac{1}{4}.\uparrow + *$ | $*$ | $\frac{1}{2}.\uparrow + *$ |

(表 2 中空缺的是这些值的负,也就是用 $\downarrow$ 来代替 $\uparrow$).

你可以看到,倍数中包含着 $*$ 与分数. 我们将在本章的后面部分告诉你怎样一般地定义 $\uparrow$ 的倍数. 但在转一转吃饼游戏中唯一能够出现的非整数的倍数是

$$*.\uparrow + * = \Uparrow \mid \Downarrow$$ 其激励为 $(2+*).\uparrow + *$.

$$\frac{1}{4}.\uparrow - * = \Uparrow \mid 1\frac{1}{2}.\downarrow$$,其激励为 $\left(-\frac{3}{4}\right).\uparrow + *$,

$$\frac{1}{2}.\uparrow + * = \Uparrow \mid \downarrow$$,其激励为 $\left(1\frac{1}{2}\right).\uparrow + *$.

你应当按照这个顺序来作出行动选择,宁可走到其中的一处(或其负博弈)而不是走到别处.

但是,要注意: $\uparrow^2 < \frac{1}{4}.\uparrow$ 是不成立的,

$\uparrow^2 = \uparrow.\uparrow$ 也不成立.

## 你必须掌握,但不想问人的原子量知识

虽然涉及原子量的事情证明起来相当困难,但使用却很方便,因为它们一般都是整数. 这里是有关性质的一张完整表格,大写字母为与之对应的小写字母的原子量.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 若 | $G \geqslant 2$ | 则 | $g \geqslant 0$. |
| 若 | $G \leqslant -2$ | 则 | $g \leqslant 0$. |
| 若 | $G \mid\!\triangleright 0$ | 则 | $g \mid\!\triangleright 0$. |
| 若 | $G \triangleleft\!\mid 0$ | 则 | $g \triangleleft\!\mid 0$. |
| | $G \geqslant 1$ | 正当 | $g > ☆$时. |
| | $G \leqslant -1$ | 正当 | $g < ☆$时. |
| | $-1 \triangleleft\!\mid G \triangleleft\!\mid 1$ | 正当 | $g \parallel ☆$时. |

还应当记住,对

$$g = \{a, b, c, \cdots \mid d, e, f, \cdots\},$$

我们的原子量计算法给出

$$G = \{A-2, B-2, C-2, \cdots \mid D+2, E+2, F+2, \cdots\},$$

除非以下异常情况,即这是一个整数而且

或者是 $g > ☆$;则 $G$ = 最大整数 $\triangleleft\!\mid$ 一切 $D+2, E+2, F+2, \cdots$;

或者是 $g < ☆$,则 $G$ = 最小整数 $\mid\!\triangleright$ 一切 $A-2, B-2, C-2, \cdots$.

另外还有:

| | |
|---|---|
| $g+h+k$ 的原子量是 | $G+H+K+\cdots$, |
| $-g$ 的原子量是 | $-G$. |

在下面的这个充满孩子气的小插曲之后,我们将回过头来证明所有这些结论.

## 孩子气伐木游戏大杂烩

像伐木游戏的其他变种一样,本游戏是在带有颜色边的图形上进行玩耍的.颜色边有红、蓝、绿三种.正如通常的伐木游戏大杂烩一样,两位局中人都可随心所欲地砍掉任何绿边,随之而俱去的是那些不再与地线连通的其他各边.左方也可砍去任意一条蓝边,但必须遵守带有孩子气的规定:在移去这条边时不能使任意一条别的边与地线不相连接.与此类似,右方也可砍去一条红边,但他这样做时,必须使任何别的边仍与地线连通.还应注意:以上孩子气规定只适用于红边与蓝边,而绿边不受约束.

左方与右方已经想不起来,在图 3 的孩子气伐木游戏局势中,下一步轮到谁走,这对胜负有

没有影响呢?

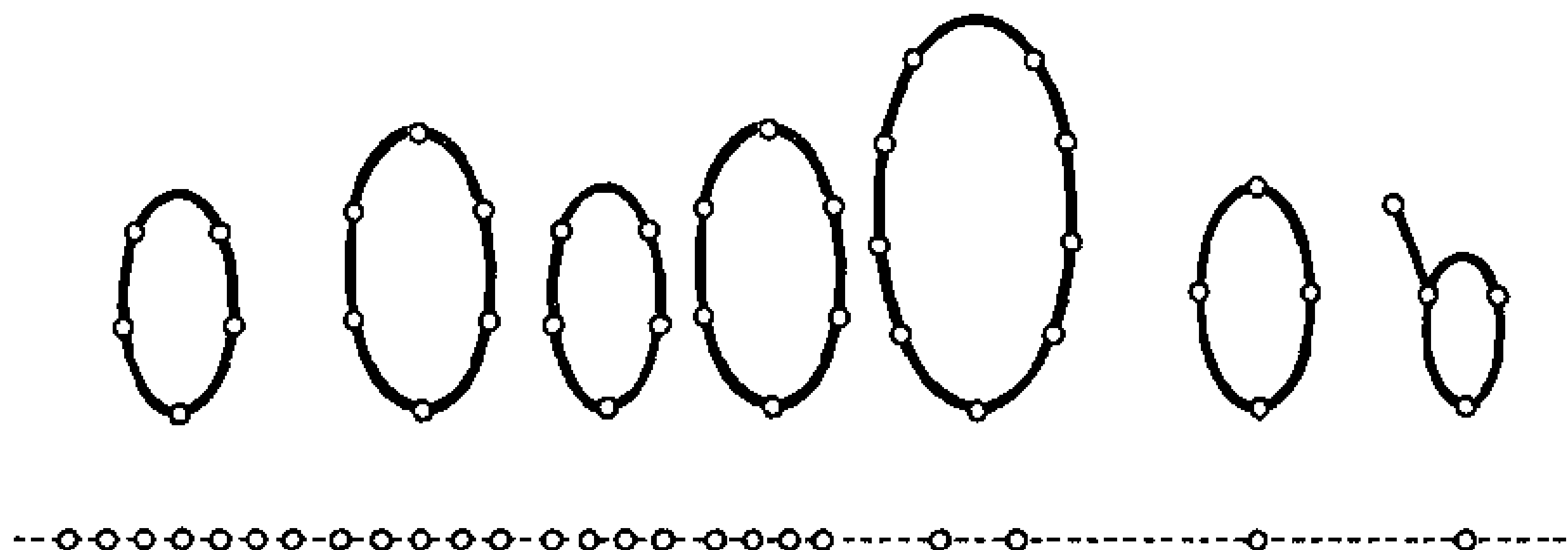


**图 3.** 对这些棒糖来说,谁先咬一口,有无影响?

除了最右边的被加项之外,该局势是一些"**棒糖**"之和.这种棒糖由红、蓝色环圈以及在圈的底部支撑它们的绿边所组成.每条绿边都与地线接通.由 $x+2$ 条蓝边与 $y+2$ 条红边在顶上相接而且直接地线的环圈,其值为$\{x|-y\}$,好的走法已在图 4 中标出.每个局中人砍去他的最低边,因为这将使他可以优哉悠哉地玩弄他的所有其他各边.除去一条边不能利用之外.

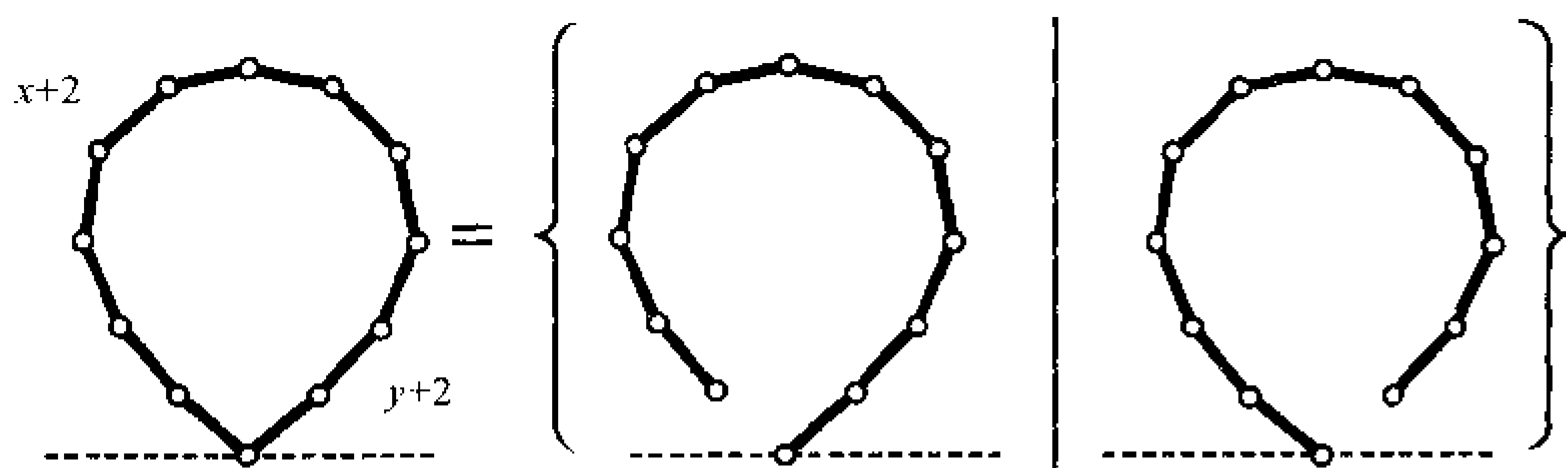



**图 4.** 值$\{x|-y\}$的孩子气伐木环圈.

由红-蓝环圈及 $n$ 条绿边支撑起来的图形,我们将使用记号

$$\{x|-y\}_n.$$

对此博弈而言,左方只有两个合理行动可取,即走到

$$\{x|-y\}_{n-1} \quad 或 \quad (x)_n,$$

此处$(x)_n$ 表示值为 $x$,且由 $n$ 条绿边支撑起来的图形.由于右方可选取的行动也基本类似,于是我们有

$$\{x|-y\}_n=\{\{x|-y\}_{n-1},(x)_n \| \{x|-y\}_{n-1},(-y)_n\}.$$

类似地有

$$(x)_n=\{(x)_{n-1},(x^L)_n|(x)_{n-1},(x^R)_n\}.$$

采用此种记号之后，图 3 的六根棒糖之值如下：

$$\{1|0\}_7,\{0|-2\}_5,\{0|-1\}_4,\{1|-1\}_4,\{4|-1\}_2,\{0|0\}_1.$$

你也可以验证最右端的非棒糖的值为$\left(\frac{1}{2}\right)_1$.

## 棒糖的原子量

若 $z$ 是一整数，则局势$(z)_n$ 实际上是一个成熟的伐木游戏大杂烩局势，其原子量分别为

$$n \qquad 0 \quad \text{或} \quad -n$$

按照

$$z>0, \quad z=0 \quad \text{或} \quad z<0$$

而定(请你自己把它算出来，或利用第 7 章的流图方法).

现在我们可以利用原子量计算法求出一切孩子气伐木游戏"棒糖"的原子量. 当 $x=y=0$ 时，

对一切 $n$，我们将有$\{0|0\}_n \| ☆$，所以它具有原子量 0，在更加有趣的场合 $x>0, y=0$，我们有

$$\{x|0\}_n>☆,$$

于是我们可以算出下列原子量：

| 博弈 | 原子量 |
|---|---|
| $\{x\|0\}_1$ | "$\{1-2\|0+2\}$"$=1$，一个异常情况， |
| $\{x\|0\}_2$ | $\{2-2\|0+2\}=1$， |
| $\{x\|0\}_3$ | $\{1\|2\}=1\frac{1}{2}$， |
| $\{x\|0\}_4$ | $\{2\|2\}=2*$， |
| $\{x\|0\}_5$ | $\{3\|2\}=2\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$， |
| $\{x\|0\}_6$ | $\{4\|2\}=3\pm1$， |
| $\{x\|0\}_7$ | $\{5\|2\}=3\frac{1}{2}\pm1\frac{1}{2}$， |
| …… | …… |

在 $x>0, -y<0$ 的绝大多数情况，我们有

$$\{x|-y\}_n \| ☆,$$

于是有

| 博弈 | 原子量 |
|---|---|
| $\{x,-y\}_1$ | $\{1-2\mid-1+2\}=0$, |
| $\{x,-y\}_2$ | $\{2-2\mid-2+2\}=*$, |
| $\{x\mid-y\}_3$ | $\{1\mid-1\}=\pm1$, |
| $\{x\mid-y\}_4$ | $\{2\mid-2\}=\pm2$, |
| $\{x\mid-y\}_5$ | $\{3\mid-3\}=\pm3$. |
| …… | …… |

根据这些结果,我们能求出图3中所有组件的原子量:

$$3\frac{1}{2}\pm1\frac{1}{2}\qquad -2\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\qquad -2*\qquad \pm2\qquad *\qquad 0\qquad 1$$

它们是与以下各值分别对应的:

$$\{1\mid0\}_7\qquad \{0\mid-2\}_5\qquad \{0\mid-1\}_4\qquad \{1\mid-1\}_4\qquad \{4\mid-1\}_2\qquad \{0\mid0\}_1,\qquad \left(\frac{1}{2}\right)_1$$

所以整个图形的确切原子量为

$$\pm2\pm1\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

如果我们根据这些原子量来玩相应的支票兑现游戏(见第5章),则第一局中人肯定可赢并可省掉一步,故而,若用

$$g=\{a,b,c,\cdots\mid d,e,f,\cdots\}$$

表示图3中一切东西之和,我们可以假定

$$A\geqslant1\text{ 而 }D\leqslant-1.$$

由于$A\geqslant1$就蕴含着$a>☆$的意思,而$D\leqslant-1$蕴含$d<☆$,从而支票兑现游戏中的最优策略也能保证第一局中人能够取胜,只要有一颗遥远的星就行.但我们从单独的一个图3中能推论出什么呢?由于在原子量为1的博弈中,有一些是正值(例如$\uparrow$),也有一些是模糊的(例如$\uparrow*$),所以我们不能肯定说,走到原子量至少为1的局势肯定能够使左方取胜.

尽管如此,我们能够断言(还能加以证明)第一局中人只要通过原子量的优化,肯定可以赢得图3的博弈.其理由是:确实存在着一颗遥远的星!原子量为0的棒糖,其值是

$$\{0\mid0\}_1=(*1)_1=*2.$$

对图中其他一切东西来说,$*2$是遥远的!

## 证明涉及原子量的事物

做这件事将使我们花费很长时间，所以如果你只想使用这些知识，那么奉劝你还是先去多玩一些孩子气游戏，而让我们写完本章. 你不需要拜读这种枯燥乏味的证明!

我们将用伐木游戏花园来说明，力求证明更为容易一些，更加漂亮一些. 为了确切起见，需对以下名词进行定义：一株**花**要有一个绿色**茎干**，其长度至少是一条边，上面长着完全蓝色或完全红色的**花朵**，它至少含有一条边(**花瓣**). 一个**花园**是这些花组成的局势，其中也有可能有着纯粹的绿草(或绿蛇!)，如图 1 所示.

你们应当能够回想得起游戏规则，什么人能砍什么颜色的边，在每次砍伐之后，任何一条不再接地的边统统都得拿走. 掌握这些游戏规则之后，你们无需重读第 7 章，我们将在这里提醒你们，以便在花园里玩得很好.

## 在花丛中玩耍

如果你的花园里头没有花，那么，每棵草(也可称为蛇)都有着值 $*n$，而你实际上是在玩尼姆游戏(见第 2 章).

如果只有一株蓝花而没有红花，则如果左方先走，他可照下法取胜：如果不考虑蓝色花瓣而存在着一个可以取胜的尼姆局势，那他就可按尼姆策略行事. 若并非这种情况，那他就可摘取一片蓝色花瓣，而把这一可恶的尼姆局势"抛"给右方去走. 留下任何数量的蓝色花瓣对左方都不会造成损害(这就是第 7 章里所讲到的蓝花方略).

在更一般的花园里：

> 若轮到左方先走，而他前面至少有一株花，那么左方能赢($G \geq 1$).

**胜人一筹法则**

> 如果前面至少有两株花，那么左方即使不先走也能赢($G \geq 2$).

**领先两株法则**

这些都是下面原子量规则的特例：

**原子量规则**

若 $G \,||\!\!\!\!\!\triangleright 0$，则 $g \,||\!\!\!\!\!\triangleright 0$；
若 $G \geqslant 2$，则 $g \geqslant 0$.

但也可以直接证明，因如果某一局势的蓝花比红花多两株，而左方把先手拱手让给右方，则当先手返回左方时，至少仍将多出一株蓝花，于是他可以通过耗尽对手红花的办法*来保持优势，如果没有红花剩下时，则可运用蓝花方略.

## 什么时候 $g$ 同 $h$ 的特征度一样？

我们要把"花坛"这个名词专门保留下来以供蓝花与红花个数相等的花园使用：

如果你的花园是均衡的
（蓝花与红花一样多），我
们将称之为一个**花坛**.

由于蓝花与红花互相抵销，我们想要说花坛的原子量为 0. 但是，在证明与之有关的一些性质之前，我们不能应用原子量的概念，所以若存在两个花坛 $f_1$，$f_2$ 以使不等式

$$f_1 \geqslant g - h \geqslant f_2$$

成立，我们将认为 $g$ 与 $h$ 有着相等的特征度，并记为 $g \doteqdot h$.

若我们能使两个博弈之差受两个花坛的制约**，则此两个博弈的特征度是相等的.

显然

$$g \doteqdot h \quad 蕴含 \quad g + k \doteqdot h + k,$$

* 译者注：原文是"砍去红花"，左方怎么能直接砍红花呢？这是违反游戏规则的，也是作者故弄玄虚之处（他的意图是要让读者自己"领悟"），详见第 7 章的注解.

** 译者注：指不等式 $f_1 \geqslant g - h \geqslant f_2$.

以及由于两花坛之和为一花坛，

故而 $g \div h$ 与 $h \div k$ 蕴含 $g \div k$.

若我们能找到单独的一个花坛使有

$$g-h \geqslant f,$$

则称 $g$ 至少具有 $h$ 的特征度，并记为 $g \gtrsim h$.

若 $g$ 的特征度恰巧是某个向上箭头的若干倍，譬如说

$$g \div G. \uparrow,$$

我们将认为 $G$ 就是 $g$ 的特征度. 我们将花费很多时间去证明它实际上就是原子量. 请注意任意花坛的特征度为 0，因为

$$f \geqslant f - 0. \uparrow \geqslant f.$$

设 $g$ 为任意蓝花，而 $h$ 为 ↑，则对图 5 的花坛 $f$ 将会有

$$g-h=f.$$

这表明：

| 任意蓝花的特征度为 1. |
|---|

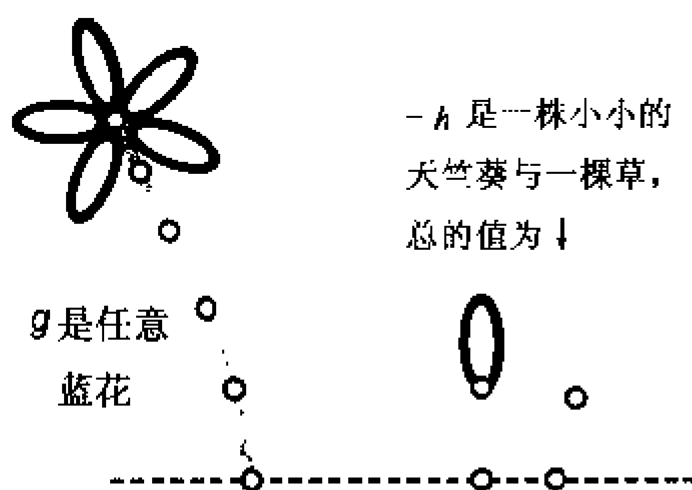



**图 5.** 花坛 $f$.

[注意花的茎干长度为 1，只有一个花瓣的是红的天竺葵与蓝的飞燕草，它们的值分别是 ↓ * 或 ↑ *.]

## 放飞一只风筝！

我们必须说明，在计算 $g$ 的原子量时，究竟你使用哪一颗遥远的星是无关紧要的. 在伐木游

戏中,遥远的星只是一串极长的绿色植株,只要它足够长,在它顶上到底长着些什么东西,那是无足重轻的.无论何种风筝你都可以放飞(见图6).

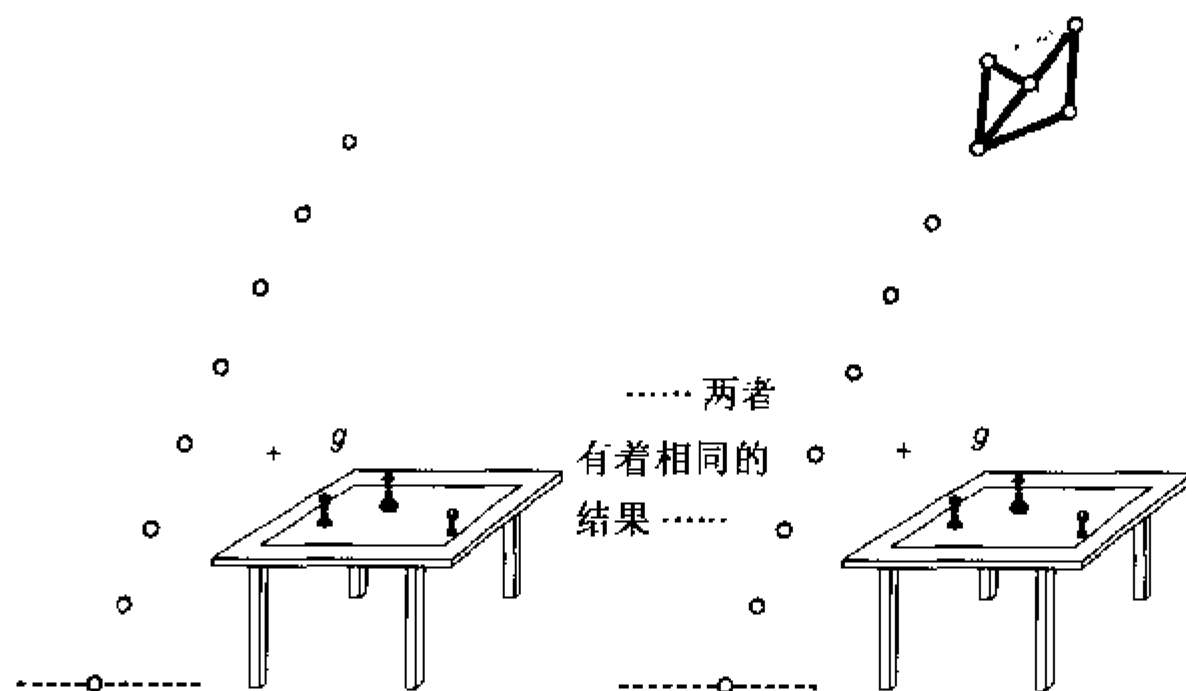



**图6.** 风筝策略.

我们将证明左方能把

$$绿色植株^{\times}+g$$

中的取胜策略转变为

$$上有风筝的绿色植株+g$$

中的取胜策略,假定植株极长极长,其值与 $g$ 中一切局势的值都有显著不同的话(这就是"遥远"一词的确切含意).

左方可以不理会风筝,玩他的老策略,直到右方在风筝中采取行动.其时,由于我们根本不考虑风筝,于是就像他根本没有采取行动一样.但既然我们不考虑风筝时,左方的策略也能取胜,于是右方刚从它那里采取行动的局势

$$有风筝的绿色植株+h$$

中,必然是
$$绿色植株+h\geqslant 0.$$
再由于
$$绿色植株\neq h,$$
从而必有
$$绿色植株+h>0.^{**}$$
这就表明在绿色植株 $+h$ 中,左方有取胜走法,由于右方的行动既不能影响绿色植株,也不影响

---

* 译者注:显然 $h+h=0$,故而在证明中应考虑及之.

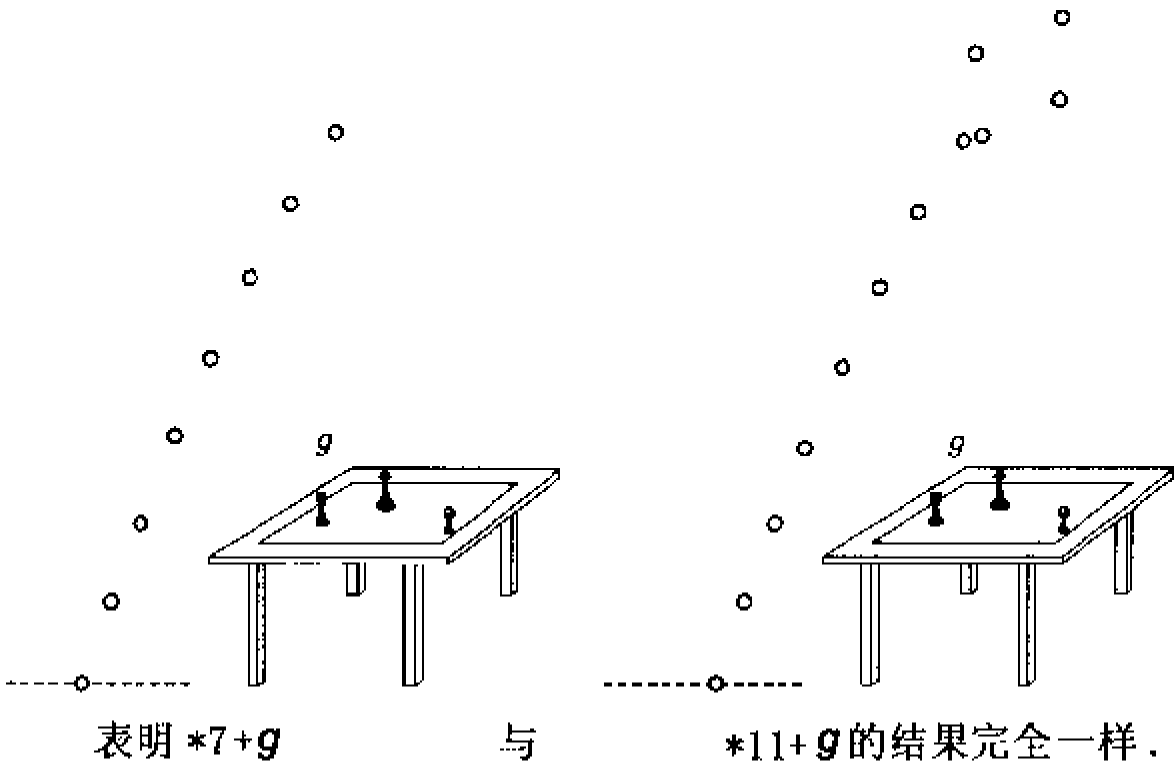
** 译者注:在此之前,string 的意思一直是表示没有分支的植物长株.但 string 是一个多义词.故在与风筝连用时,当然可以理解为一根很长的"线".这也是作者的故弄玄虚之处.



$h$,所以左方依然可以继续实施他的策略.

若采用第 7 章增补材料中介绍的冒号记法,则上面有风筝的绿色植株的值即可记为绿色长线:风筝.我们的上述论证实际上证明了**诺顿引理**(此处说明得更为确切),即对任何 $S$ 与 $K$,对每一个其中没有值为 $S$ 的局势的博弈而言,博弈 $S$ 与 $S:K$ 有着同样的顺序关系.

## 一切遥远的星都同意




表明 $*7+g$ 与 $*11+g$ 的结果完全一样.

上图表明,$*7+g$ 与 $*11+g$ 有着一模一样的结果,如果 $g$ 中不存在值为 $*7$ 局势的话.更一般地说,

> 如果 $g$ 中不存在值为 $*m$ 或 $*n$ 的局势,则 $*m+g$ 与 $*n+g$ 的结果是一样的.

这就表明我们用☆表示一切遥远的星的合法性:

$g>$☆ 意味着 $g>*m$

$g<$☆ 意味着 $g<*m$

$g\|$☆ 意味着 $g\|*m$

其中,$g$ 的任何局势之值都不是 $*m$.

## 大与小的花坛

图 7 表明任何花坛 $f$ 小于一个有 2 株花的花坛，其中的一株花是一个极高的红花．这是由于在一棵极长的绿色植株顶上究竟长着什么花是无关紧要的，所以我们可将高高的红花调换成高高的蓝花，从而使左方面前有了两株红花．

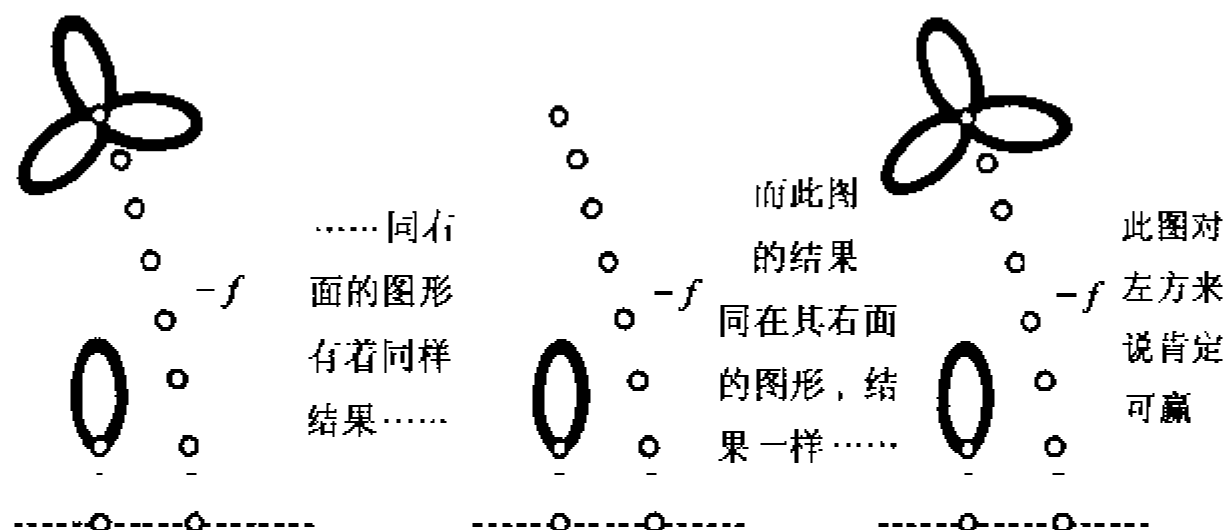



图 7．花长得很高时你就难以看到它的花瓣了．

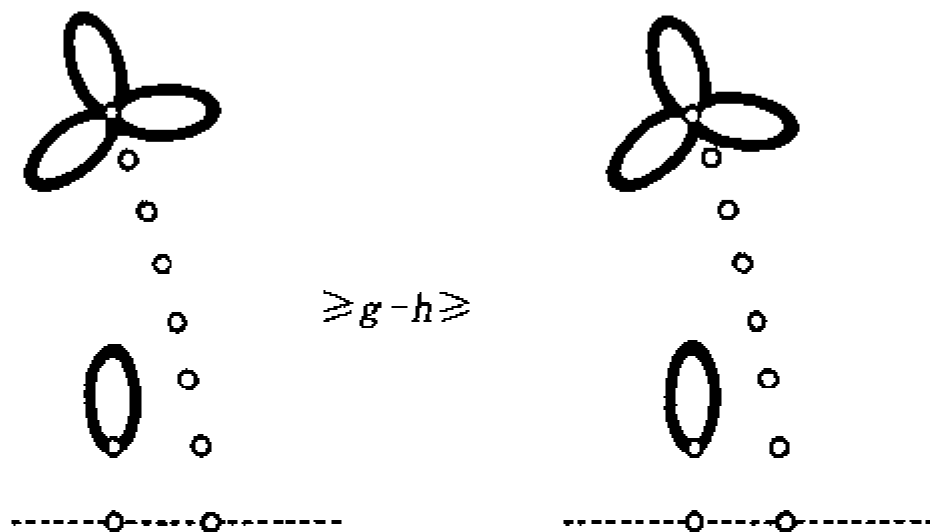
对一个很大的花坛
你只需要一朵高高
的红花．

以及

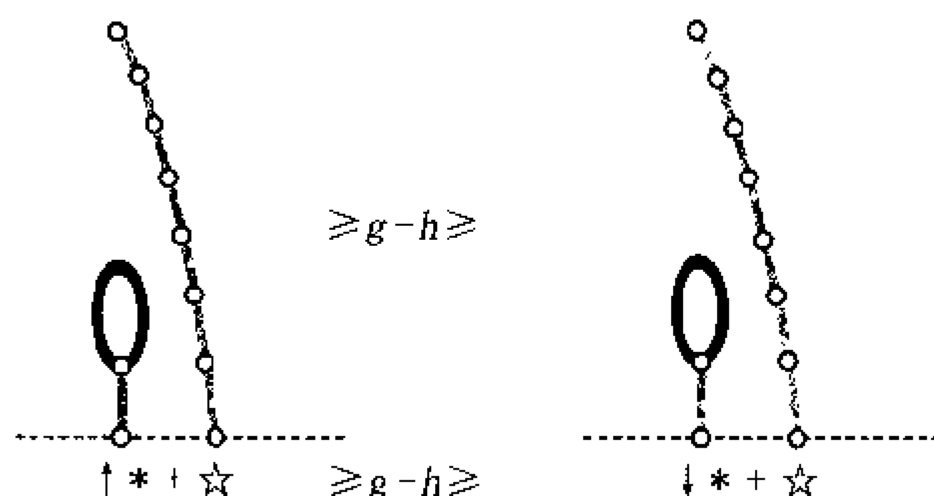
你的花坛将会很小，
如果蓝花长得挺高．

由于我们现在已经知道了最大与最小的花坛，所以我们得以简化特征度的测试．

博弈 $g$ 与 $h$ 将具有相等的特征度，只要



(对长得足够高的花朵而言),甚至还可作更进一步简化.如果




(对远得足够的☆而言). 我们将称之为“**遥远之星测试**”.

将遥远之星同其他博弈之和进行比较时,最聪明的办法是取

$$☆ = * N$$

其中 $N$ 是 2 的下一个幂,要大于所有的 $m$($*m$ 出现于其他博弈之中).

则 $m < N, n < N$ 蕴含 $m \overset{*}{+} n < N$.

# 在幸运之星照耀下做游戏

如果你发现自己在玩着通常的博弈与一颗遥远之星之和,那么你是幸运的,因为

> 如果有一颗遥远之星在场,那么你可以把一个博弈同任何一个有同样特征度的博弈进行交换.

**交换原理**

用符号表示,若 $g \doteq h$,则

$g+☆$ 同 $h+☆$ 有同样的结果.

只要能证明出以下情况即已足够:

如果 $g \geqslant h$ 而且左方能赢得 $h+$高高的红花,

则他将能赢得 $g+$高高的蓝花.

因为根据风筝策略,我们可用遥远的星取代这些高高的花而不影响其结果.

但这样一来之后,由于

$$g-h\geqslant \text{某个花坛}, f,$$

我们就有

$$(g+\text{高高的蓝花})-(h+\text{高高的红花})\geqslant f+(2\text{ 棵高高的蓝花}),$$

于是根据两步领先法则，可知它必为正值.

## 向上箭头( ↑ )的一般倍数

我们现在即将到达这样的地步，证明原子量算法可给出正确的答案. 我们所应做的是要证明当规则认为 $g$ 的原子量为 $G$ 时，则

$$g \div G.\uparrow,$$

或者根据遥远之星测试，应满足下式：

$$\uparrow * + \star \geqslant g - G.\uparrow \geqslant \downarrow * + \star.$$

但因原子量不一定是整数，我们必须说清楚 $G.\uparrow$ 到底是什么意思，譬如说，当 $G$ 是一个非整数的博弈，例如

$$\{0|1\}=\frac{1}{2},\ \{0|0\}=*,\ \text{或}\ \{1|-1\}=\pm 1,$$

以及整数的情况，例如

$$\{1|\ \}=2,\ \{\ |-3\}=-4\ \text{或}\ \{\ |\ \}=0.$$

西蒙·诺顿已指出，对任何正的博弈 $U$，应当如何定义这类倍数 $G.U$. 设 $U=\uparrow$，他的定义将化约到

$$G.\uparrow=\{G^L.\uparrow+\Uparrow * | G^R.\uparrow+\Downarrow *\}.$$

但这一公式只能用于非整数的博弈 $G$，而当 $G$ 是一个整数时，你必须使用明显的法则：

$$2.\uparrow=\uparrow+\uparrow,(-4).\uparrow=\downarrow+\downarrow+\downarrow+\downarrow,0.\uparrow=0.$$

对非整数乘数

$$\frac{1}{2}=\{0|1\},\ *=\{0|0\},\ \pm 1=\{1|-1\},$$

则有

$$\frac{1}{2}.\uparrow=\{0.\uparrow+\Uparrow * | 1.\uparrow+\Downarrow *\}=\{\Uparrow * | \downarrow *\},$$

$$*.\uparrow=\{0.\uparrow+\Uparrow * | 0.\uparrow+\Downarrow *\}=\{\Uparrow * | \Downarrow *\},$$

$$(\pm 1).\uparrow=\{1.\uparrow+\Uparrow * | (-1).\uparrow+\Downarrow *\}=\{\text{⤊} * | \text{⤋} *\}.$$

在增补材料中我们将对一切正的博弈 $U$ 给出诺顿的 $G.U$ 定义，并证明

$$(A+B+C+\cdots).U=A.U+B.U+C.U+\cdots$$

作为它的特例，有

$$(A+B+C+\cdots).\uparrow=A.\uparrow+B.\uparrow+C.\uparrow+\cdots.$$

## 遥远之星法则的证明

我们需要证明的，有关原子量的一件事是

$$\text{当}\quad g>☆\text{时，确切地有 } G\geqslant 1$$

由此，再根据对称性，故

$$\text{当}\quad g<☆\text{时，确切地有 } G\leqslant -1$$

$$\text{而当}\quad g\parallel ☆\text{时，确切地有 } -1\lhd\!\!|\, G\lhd\!\!|\, 1$$

对 $$g=\{a,b,c,\cdots|d,e,f,\cdots\}$$

的一切选择，当然我们可以假设这些结果.

我们首先假定 $g>☆$ 并证明右方在 $G-1$ 中没有好的走法（即 $G\geqslant 1$）. 由于右方在 $g+☆$ 中没有好的走法，于是我们知道

$$d\,|\!\!\rhd ☆,\ e\,|\!\!\rhd ☆,\ f\,|\!\!\rhd ☆,\cdots$$

故而

$$D\,|\!\!\rhd -1,\ E\,|\!\!\rhd -1,\ F\,|\!\!\rhd -1,\cdots$$

若 $G$ 不是一个整数，右方不应在 $-1$ 这个分支中采取行动（"决不要在一个整数博弈中采取行动，除非迫不得已），于是他的行动，只能是下列之一：

$$(D+2)-1,(E+2)-1,(F+2)-1,\cdots,\text{全都是}\,|\!\!\rhd 0.$$

若 $G$ 是一个整数，它是最大的数而且 $\lhd\!\!|$ 一切

$$D+2,\ E+2,\ F+2,\cdots$$

于是我们可以假定，譬如说，

$$G+1\geqslant D+2,$$

从而

$$G\geqslant D+1\,|\!\!\rhd -1-1=0.$$

但是，$|\!\!\rhd 0$ 的一个整数实际上就是 $\geqslant 1$.

当然我们也能证明

$$g<☆ \quad 蕴含 \quad G\leqslant -1.$$

现在我们假定 $G\geqslant 1$ 并将推出 $g>☆$. 由以前的说明可知我们不能有 $g<☆$. 所以如果我们的论证失败，我们也只能有 $g\parallel ☆$ 并能假定

$$G=\{A-2,B-2,C-2,\cdots|D+2,E+2,F+2,\cdots\}.$$

因为 $G\geqslant 1$　我们必得有

$$1 \lhd\!| D+2,\ E+2,\ F+2,\cdots$$

即　$D|\!\rhd -1,\ E|\!\rhd -1,\ F|\!\rhd -1,\cdots$

于是　$d+☆,\quad e+☆,\quad f+☆,\ \cdots$

都$|\!\rhd 0$，但由于 $g\parallel ☆$，右方从 $g+☆$ 出发是有一些良好走法的. 于是这必然是走到 $g+*m$（对某个 $m$）.

我们将证明这是不可能做到的. 由于 $G\neq 0$，我们不能使所有的

$$A-2,B-2,C-2,\cdots \lhd\!| 0$$

于是可以假定

$$A-2\geqslant 0,\ 即\ A\geqslant 2.$$

于是左方可以采取行动，从 $g+*m$ 走到 $a+*m$，根据两步领先法则，他可稳操胜券.

## 证明原子量＝特征度

我们再次假定

$$g=\{a,b,c,\cdots|d,e,f,\cdots\}$$

其中 $a,b,c,\cdots d,e,f,\cdots$ 的原子量已经证明同它们的特征度相吻合，可用记号表示如下：

$$a\doteq A.\!\uparrow,\ b\doteq B.\!\uparrow,\ c\doteq C.\!\uparrow,\cdots$$
$$d\doteq D.\!\uparrow,\ e\doteq E.\!\uparrow,\ f\doteq F.\!\uparrow,\cdots$$

我们需要证明

$$g\doteq G.\!\uparrow,$$

其中的 $G$ 是原子量计算法给出之值.

由特征度的遥远之星测试，我们只需证明

$$\uparrow * + ☆ \geqslant g - G.\!\uparrow \geqslant \downarrow * + ☆.$$

由对称性可知，只要能证明右方在

$(G.\!\uparrow + \uparrow * + ☆) - g$ 中没有好的走法就足够了.

注意到我们永远有着

$$A-2,B-2,C-2,\cdots\lhd|\,G\lhd|\,D+2,E-2,F+2,\cdots$$

即便在 $G$ 没有定义的异常情况

$$\{A-2,B-2,C-2,\cdots|D+2,E+2,F+2,\cdots\}\text{亦然.}$$

假定右方从分支 $-g$ 中行动，譬如说，走到 $-a$. 则因我们有一颗幸运之星☆，所得局势可以同

$$(G.\uparrow+\uparrow*+\text{☆})-A.\uparrow$$

进行交换. 但 $G|\!\rhd A-2$，所以此博弈具有形式

$$X.\uparrow+\downarrow*+\text{☆}\ (\text{对某个 } X|\!\rhd 0).$$

若 $X$ 是一整数，我们有

$$X.\uparrow+\downarrow*+\text{☆}\geqslant\uparrow+\downarrow*+\text{☆}=*+\text{☆},$$

由该处可以有一个走到 0 的取胜策略. 否则将存在某个 $X^L\geqslant 0$，而左方将能走到

$$(X^L.\uparrow+\Uparrow*)+\downarrow*+\text{☆}\geqslant\uparrow-\text{☆}\geqslant 0.$$

现在我们必须考虑右方从

$$(G.\uparrow+\uparrow*+\text{☆})-g.$$

所出发的行动，即这个式子的括弧部分. 幸运的是(请参看增补材料中的星移原理)，我们能把括弧化简到

$$\{(G^L.\uparrow+\Uparrow*)-\uparrow*+\text{☆}\,|\,(G^R.\uparrow+\Downarrow*)+\text{☆}\}.$$

当 $G$ 为非整数时，这是

$$\{(A+1).\uparrow+\text{☆},(B+1).\uparrow+\text{☆},\cdots|(D+1).\uparrow+\text{☆},(E+1).\uparrow+\text{☆},\cdots\}$$

而当 $G$ 为

$$\cdots\quad -4\quad -3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad\cdots$$

时，它变为

$$\cdots\quad\{\Downarrow+\text{☆}|0\}\quad\{\downarrow+\text{☆}|0\}\quad\{\text{☆}|0\}\quad *+\text{☆}\quad\{0|\text{☆}\}\quad\{0|\uparrow+\text{☆}\}\quad\{0|\Uparrow+\text{☆}\}\quad\cdots$$

有四种情形:

在非整数集合，我们可以假定右方走到

$$((D+1).\uparrow+\text{☆})-g,$$

由此左方应走到

$$(D+1).\uparrow+\text{☆}-d,$$

而我们可以把它同

$$(D+1).\uparrow+\text{☆}-D.\uparrow=\uparrow+\text{☆}\geqslant 0.$$

进行交换.

若 $G$ 为一负整数,右方只能走到

$$*m+g \qquad (\text{对某个} *m)$$

(事实上 $*m=0$,除非 $G$ 是 $-1$). 但在此种情况下,我们有 $g<☆$,于是不能有 $g\geqslant *m$.所以右方的行动并非良策.

若 $G$ 是零,右方的行动将使他走到

$$☆+g.$$

但是,不幸对他来说,在此种场合,我们将有 $g \| ☆$.

若 $G$ 是一正整数,右方已走到

$$G.\uparrow+☆+g.$$

但在此场合,$G$ 是最大的整数使有

$$G \lhd| D-2, E+2, F+2,\cdots$$

于是我们可以假定,

譬如说,$G-1\geqslant D-2$,

左方现在能走到

$$G.\uparrow+☆+d$$

(对适当的 $d$ 而言),而这又可以同

$$G.\uparrow+☆-D.\uparrow\geqslant\uparrow+☆\geqslant 0.$$

进行交换.

## 伐木游戏大杂烩的整数性

我们在本章所作的最后一个证明将揭示:一切通常的伐木游戏大杂烩局势都有着整数原子量.

若不然,可设

$$g=\{a,b,c,\cdots|d,e,f,\cdots\}$$

是一最小的反例,其中 $a$ 为左方的一项选择,它是砍掉 $\alpha$ 边而得的,具有最大的原子量 $A$,而由砍去 $\delta$ 边而得的 $d$ 是右方的一项选择,它具有最小的原子量 $D$.

现将 $\alpha$ 与 $\delta$ 两边都砍掉以得出原子量为 $H$ 的局势 $h$. 于是由于 $h=a$ 或 $h$ 是 $a$ 的右方选择,我们必有

$$A-2 \lhd\!| H, \text{类似地有 } H \lhd\!| D+2,$$

这就表明 $H$ 为一整数而使

$$A-2, B-2, C-2, \cdots \lhd\!| H \lhd\!| D+2, E+2, F+2, \cdots$$

所以 $g$ 的原子量必然为一整数(但它不一定非为 $H$ 不可).

## 留神异常情况

为了解释公式

$$G = \text{“}\{A-2, B-2, C-2, \cdots | D+2, E+2, F+2, \cdots\}\text{”}$$

你不必老是将 $g$ 同遥远之星比较.

事实上你可以不顾引号,除非存在着两个或更多的整数 $N$ 来满足它,即满足下式

$$A-2, B-2, C-2, \cdots \lhd\!| N \lhd\!| D+2, E+2, F+2, \cdots$$

进一步说,若只有一个正整数能适合,

$$\text{“}\{A-2, B-2, C-2, \cdots | D+2, E+2, F+2, \cdots\}\text{”}$$

意味着**最正的**一个;如果只有一个负整数适合,那就是最负的一个.唯一令人犹豫的场合是 0 值而且至少另有一个整数能满足的情况.当 $G$ 为

最正　　零　　或　　最负

分别按照

$g > ☆$　　$g \parallel ☆$　　或　　$g < ☆$

而决定.

例:

$$\text{“}\left\{-\frac{1}{2}\middle|1\right\}\text{”}=0, \quad \text{“}\{0|1\}\text{”}=\frac{1}{2}, \quad \text{“}\{1|-1\}\text{”}=\pm 1,$$

$$\text{“}\{0|4*\}\text{”}=4, \quad \text{“}\{-3|\downarrow\}\text{”}=-2,$$

$$\text{“}\{*|4\}\text{”}=0 \text{ 或 } 3, \quad \text{“}\{-2|6+\downarrow\}\text{”}=-1, 0 \text{ 或 } 5.$$

## 加尔文游戏

原子量学说对下面这种特殊的和博弈有着令人惊讶的应用.设左方与右方在玩下面的**加尔文和**

$$l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots.$$

这种“和”同通常的“和”很相像,然而要根据最后玩的游戏是一个 $l_i$ 或 $r_j$ 而认定是左方或右方获胜,所以你必须迅速果敢地干掉对方的博弈而取胜.

在加尔文和中出现的博弈

$$g=\{a,b,c,\cdots|d,e,f,\cdots\}$$

具有**电荷** $G$,其定义为

$$G=\text{“}\{A-2,B-2,C-2,\cdots|D+2,E+2,F+2,\cdots\}\text{”}$$

除非现在有不止一个整数能满足时,我们要取

最正的,若 $g$ 是 $l_i$ 中的一个(带正电荷)

以及

最负的,若 $g$ 是 $r_j$ 中的一个(带负电荷)

(当然 $A,B,C,\cdots,D,E,F,\cdots$ 是 $a,b,c,\cdots,d,e,f$ 的电荷). 如果你能回忆得起在伐木游戏大杂烩中竞相采摘对方花朵的情况,那么你将看到,通常的和

$$L_1.\uparrow+L_2.\uparrow+L_3.\uparrow+\cdots+R_1.\uparrow+R_2.\uparrow+R_3.\uparrow+\cdots+☆$$

的性态同加尔文和

$$l_1+l_2+l_3+\cdots+r_1+r_2+r_3+\cdots$$

是极其类似的. 从而得以按照

$$X=L_1+L_2+L_3+\cdots+R_1+R_2+R_3+\cdots$$

满足

$$X\geqslant 1,\quad X\leqslant 1 \quad \text{或} \quad -1\lhd\!|\, X \lhd\!|\, 1$$

的情况来判定

左方　右方　　　先走者

获胜.

由于我们的电荷同原子量有紧密联系. 理论的这一简单变种只能适用于一种特殊的博弈,即局中人在尚未结束的、每一个对方的博弈中都有着合法行动. 尽管如此,它也能应用到一切无偏博弈中去,并为弗来德·加尔文(Fred. Galvin)的巧妙定理提供了一个简单证明,即当 $l_1$ 与 $r_1$ 是同样的无偏博弈时,则它们的加尔文和是先走者可以获胜的.

## 三角形数游戏

此游戏是一个简单的例子. 每位局中人都有好几堆东西,他可将属于随便哪位局中人的一

堆东西中取走个数为三角形数

$$1,3,6,10,15,21,\cdots$$

的物品.让我们用 $T_n$ 表示左方拥有的,有 $n$ 个东西的一堆的电荷,于是我们有以下结果:

| | |
|---|---|
| $T_0$ | $0$ |
| $T_1$ | “$\{0-2\mid 0+2\}$”$=1$, |
| $T_2$ | “$\{1-2\mid 1+2\}$”$=2$, |
| $T_3$ | $\{2-2,0-2\mid 2+2,0+2\}=1$, |
| $T_4$ | “$\{1-2,1-2\mid 1+2,1+2\}$”$=2$, |
| $T_5$ | “$\{2-2,2-2\mid 2+2,2+2\}$”$=3$, |
| $T_6$ | $\{3-2,1-2,0-2\mid 3+2,1+2,0+2\}=1\frac{1}{2}$. |

……………………………………………………

| | |
|---|---|
| $T_0$ | $0$ |
| $T_1,T_2$ | $1\quad 2$ |
| $T_3$ 至 $T_5$ | $1\quad 2\quad 3$ |
| $T_6$ 至 $T_9$ | $1\frac{1}{2}\quad 2\quad 3\quad 2$ |
| $T_{10}$至 $T_{14}$ | $1\quad 2\quad 3\quad 2\quad 3$ |
| $T_{15}$至 $T_{20}$ | $1\frac{1}{2}\quad 2\quad 3\quad 2\quad 3\quad 2$ |
| $T_{21}$至 $T_{27}$ | $1\quad 2\quad 3\quad 2\quad 2\quad 3\quad 2$ |
| $T_{28}$至 $T_{35}$ | $1\quad 2\quad 3\quad 2\quad 3\quad 3\quad 2\quad 3$ |
| $T_{36}$至… | $1\frac{1}{2}\quad 2\quad 2\quad \cdots$ |

其中有没有一个简单规律?高斯日记中最出名的一条记录是他在 1796 年 7 月 10 日所记下来的,其内容是:

我发现!数$=\triangle+\triangle+\triangle$.

现在我们知道,这位数学王子在那一天最后证明:任一整数可以表为至多三个三角形数之和.迄今为止,我们所计算的任一三角形数的电荷为 0 或 1(这种情况发生在 0,1,3,10,21,28 等场合)或 $1\frac{1}{2}$(这种情况发生在 6,15,36,…等场合).让我们把这两类三角形数称为

锐角的(电荷 0 或 1);

钝角的$\left(\text{电荷 }1\frac{1}{2}\right)$.

于是我们能够证明,直到电荷 4 首次出现为止,一个非三角形数的电荷是需要用来表示它

的、不全是钝角的、个数最小的三角形数. 此外,可以证明一个三角形数是钝角的,当且仅当存在一种走法,可从它那里走到某个电荷为 3 的一堆. 尽管我们还没有看到过电荷 4(因为绝大多数三角形数为钝角数),但看来它终究会出现,而在其后,我们将预期会遇到其他一些新电荷,例如 2*, $2\frac{1}{2}$,等等. 我们甚至不能肯定,电荷会不会趋向于无穷大!

你们也可以来玩一个类似的游戏,它叫做“**打发正方形数**”,即从每一堆东西中,可以拿走个数为正方形数的物品. 这时,几乎马上就会出现一大批形形色色的电荷.



# 增　补

## 正博弈的倍数

原子量学说同以基本单位 $\uparrow$ 的倍数的近似游戏有关系. 事实上,如果取任意正博弈 $U$ 作为单位,我们可以定义倍数 $G.U$. 对整数倍数而言,我们当然是用一目了然的定义,譬如说

$$2.U=U+U,\ (-4).U=-U-U-U-U,\ 0.U=0.$$

对非整数的倍数,西蒙·诺顿的巧妙定义要用上 $U$ 的**激励**

$$I=U^L-U \quad 或 \quad U-U^R.$$

从第 6 章里我们可以回忆起激励是永远 $\lhd|0$ 的. 诺顿的定义是

$$G.U=\{G^L.U+(U+I_1),G^L.U+(U+I_2),\cdots|G^R.U-(U+I_1),G^R.U-(U+I_2),\cdots\}$$

其中 $I_1,I_2$ 为不同的激励.

幸而 $U$ 的绝大多数选择都有着唯一的最大激励 $I$,于是我们得以简化诺顿公式:

$$G.U=\{G^L.U+(U+I)|G^R.U-(U+I)\}.$$

例如,对

$$U=\uparrow=0|*$$

来说,激励是

$$0-\uparrow=\downarrow 以及 \uparrow-*=\uparrow*,$$

于是 $I=\uparrow*$ 是优超激励. 由于

$$U+I=\Uparrow*,$$

我们从而对 $\uparrow$ 的倍数建立起定义:

$$G.\uparrow=\{G^L.\uparrow+\Uparrow*|G^R.\uparrow+\Downarrow*\}.$$

要记住,对 $G$ 的非整数倍数,你只应使用诺顿氏的定义.

# 倍数起作用！

有一大堆涉及博弈倍数的事物需要加以证明：

**形式独立性：** 若 $A=B$，则 $A.U=B.U$.

**单调性：** $A\geqslant B$ 当且仅当 $A.U\geqslant B.U$.

**分配性：** $(A+B).U=A.U+B.U$.

幸而从极其粗浅的直观等式

$$(-G).U=-G.U$$

即易推出这些结果.

你可以用类似方式去玩

$$A+B+C+\cdots \text{与} A.U+B.U+C.U+\cdots$$

两种游戏，不过每一步都要使“和”$U+I$ 易手.

所以，如果你用一种走法能在左手的博弈和中取胜的话，那么你用它之后，也能在右手的博弈和中减去 $U+I$ 之后而获胜：

$$A+B+C+\cdots \,|\!\!\rhd 0 \quad \text{蕴含} \quad A.U+B.U+C.U+\cdots-(U+I)\,|\!\!\rhd 0.$$

**“用”它的法则**

只要你能在左手的博弈和中取胜，那么不用这种走法时，将可在右手的和中取胜

$$A+B+C+\cdots\geqslant 0 \quad \text{蕴含} \quad A.U+B.U+C.U+\cdots\geqslant 0.$$

**“不用”它的法则**

由于乘以整数因子显然成立，所以我们只要集中精力去考虑非整数因子 $A,B,C,\cdots$ 就行. 当我们在任一非整数博弈中走出一步时，我们将认为问题将比某些整数因子增大时还要简单. 当然，我们也将假定一切简化情形都已经建立起来.

# 先证明“用”它的法则

如果一切 $A,B,C,\cdots$ 为整数，则条件 $A+B+C+\cdots\,|\!\!\rhd 0$ 告诉我们其和至少为 1，从而有

$$A.U+B.U+C.U+\cdots \geqslant U,$$

而这就是$|\!\rhd U+I$,因为激励永远是$\lhd\!|\,0$ 的.

如果它们中间有一个是非整数,那么从 $A+B+C+\cdots$出发的一步好走法是来自一个非整数分支(譬如说 $A$)的,于是就有

$$A^L+B+C+\cdots \geqslant 0.$$

由于这是一个更简单的情况,而根据不用它的法则我们已知

$$A^L.U+B.U+C.U+\cdots \geqslant 0.$$

这就为我们提供了从

$$A.U+B.U+C.U+\cdots-(U+I)$$

走到 $$A^L.U+(U+I)+B.U+C.U+\cdots-(U+I)\geqslant 0$$

的所想要的上好走法.

## 再证"不用"它的法则

假定右方从 $$A+B+C+\cdots$$

出发,没有什么好的走法,我们必须证明他从

$$A.U+B.U+C.U+\cdots$$

出发,也不会有什么好走法.

如果他从某一项 $A.U$(此处 $A$ 是一个非整数)出发而走到

$$A^R.U+(U+I)+B.U+C.U+\cdots,$$

由"用"的法则可知它$|\!\rhd 0$,因我们已知

$$A^R+B+C+\cdots |\!\rhd 0 \text{ 之故}.$$

如果 $A$ 为一整数,则 $A.U$ 的形式将是

$$U+U+U+\cdots \text{或} -U-U-U-\cdots.$$

分别由 $A\geqslant 0$ 或 $A\leqslant 0$ 来决定,而右方采取过行动以后将代之以

$$U^R+U+U+\cdots \text{或} -U^L-U-U-\cdots,$$

我们将它们重新记为

$$(U^R-U)+A.U \text{ 或} (U-U^L)+A.U.$$

于是左方将会面对

$$A.U+B.U+C.U+\cdots-I=(A+1).U+B.U+C.U+\cdots-(U+I)$$

(对某个激励 $I$). 但是由于

$$A-B+C-\cdots\geqslant 0 \quad \text{蕴含} \quad (A+1)+B-C+\cdots>0,$$

从而根据已证过的"用"的法则的一个分支情形可知

$$(A+1).U+B.U+C.U+\cdots\ \cdot(U+D)\rhd 0.$$

尽管这里整数 $A$ 换成了 $A+1$,但这并不影响证明.

当我们从"不用"法则推导出"用"的法则时,我们总是要对至少一个非整数乘数进行简化. 而当我们从"用"的法则推导出"不用"法则时,我们不想使非整数乘数变得更复杂,至于整数乘数将发生什么变化则无关紧要.

## 把向上箭头($\uparrow$)的倍数用星平移

从第 6 章可以回忆得起,任一非零博弈都有着某个激励 $G^L-G$ 或 $G-G^R$,它们至少为 $-1$. 若 $G$ 为非整数时,则两位局中人都具有这种激励. 我们将用来证明公式

$$G.\uparrow=\{G^L.\uparrow+\Uparrow * \mid G^R.\uparrow-\Downarrow *\}.$$

也就是说,非整数的 $G$ 可以用任一拧数来平移,亦即

$$G.\uparrow-*N-\{G^L.\uparrow\cdots\Uparrow *+*N \mid G^R.\uparrow+\Downarrow *+*N\}.$$

**星移原理**

因为在差

$$\{G^L.\uparrow+\Uparrow *+*N \mid G^R.\uparrow+\Downarrow *+*N\}-G.\uparrow-*N$$

中,唯一没有确切计数的走法是从 $*N$ 中出发的行动. 如果右方采取这种行动的话,左方可回敬他一个走到局势

$$G^L.\uparrow+\Uparrow *+*N \quad G.\uparrow-*N'=(G^L-G).\uparrow+\Uparrow *-*N+*N'$$

的行动,而当 $G^L-G\geqslant -1$ 时,其值肯定是正的.

对非整数的 $G$,星移原理将给出一个公式给我们

$$G.\uparrow+\uparrow *-☆=\{(G^L.\uparrow+\Uparrow *)+\uparrow * \mid ☆\ (G^R.\uparrow+\downarrow *)+\uparrow *+☆\}.$$

而这在本章开始时我们已经用过了.

若 $G$ 是一个整数,那么你可以从第 3 章的表 3 中读出 $G.\uparrow-*N$ 的一些最简单例子.

作为其特例,我们有:

$$\uparrow + ☆ = \{0 \mid ☆\},\ \Uparrow + ☆ = \{0 \mid \uparrow + ☆\},\ \Uparrow\!\!\uparrow + ☆ = \{0 \mid \Uparrow + ☆\},\cdots$$

## 有关激励的一个定理

> 在一切异于 0，*，*2……的很小博弈 $g$ 中，至少有一位局中人拥有至少一个激励，其原子量至少为一.

**至少为一定理**

设 $g$ 的原子量为 $G$，我们再一次应用以下事实，即除掉 $G=0$ 之外，一定有着某个 $\geqslant -1$ 的激励.

如果

$$G=\{A-2,B-2,C-2,\cdots \mid D+2,E+2,F+2,\cdots\}$$

且有(譬如说)

$$(A-2)-G \geqslant -1$$

则 $g$ 的激励

$a-g$ 有着 $\geqslant 1$ 的原子量.

若 $G$ 定义为

最大整数◁| $D+2,E+2,F+2,\cdots$

则我们可以假定

$$G+1 \geqslant D+2$$

而激励

$g-d$ 有着 $\geqslant 1$ 的原子量.

[若 $G$ 被定义为最小整数|▷ $A-2,B-2,C-2,\cdots$，则也有类似情况.]

最后，若 $G=0$，则两位局中人由 $g+☆$ 出发都有着好的走法. 若其中之一来自分支 $g$ 而由我们去完成，如果

$$a > ☆ \quad 则 \quad A \geqslant 1$$

从而 $a-g$ 的原子量至少为 1. 否则两个好走法都是来自分支☆的，譬如说，要走到 $*m$ 与 $*n$，于是我们有

$$*m \leqslant g \leqslant *n$$

因此 $g$ 必须在博弈值方面同时与 $*m$，$*n$ 吻合.

我们已把定理的范围限制于一切很小的博弈以便能应用原子量算法. 但是实际上它对**一切**不是以下列形状为其值的博弈

$$x, x-*, x+*2, \cdots(\text{对某个 } x)$$

都是对的. 它有着一个极其简单的结果,甚至可以不提原子量:

> 每一个不是数的博弈 $g$ 有着一个激励,≥各颗星 $*, *2, *3, \cdots$ 中之一

**星—激励定理**

这是因为,原子量≥1 的任何激励都将超过一切遥远的星,而如果 $g=x+*m$,则走到 $x$ 的行动就会有激励 $*m$.

## 五口之家就座

经历了第 5 章之末安排孩子们宴会上就座的重大挫折之后,左方与右方认为,在下一次安排孩子们的宴会活动时,最好还是一起邀请他们的父母. 于是他们邀请的每一个家庭都有着三个孩子与一父一母. 为了保持安静气氛,每个家庭的孩子都要坐在他们的父母中间. 左方的安排办法是按照下列次序:

母亲,孩子,孩子,孩子,父亲

而右方则宁愿采用相反的顺序. 但为了保持另一种正派社交礼仪,两位异性成年人均不能坐在相邻的位置上.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L$n$L | − | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | * | * | * | * | ↓ * | ↓ * | *2 | ↓ |
| L$n$R | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | * | * | * | * | * | * | *2 | *2 | *2 |
| R$n$R | − | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | * | * | * | * | ↑ * | ↑ * | *2 | ↑ |

**表 3.** 五口之家就座游戏的值.

我们将使用以前的记号来进行分析. 即以前我们曾经做过的夫妻入座问题(见第 2 章),男孩与女孩入座问题(第 5 章). 但这一次(表 3),我们看到的希腊十字形中提示了下列恒等关系:

$$-F_k = L(3k-1)L \quad = \quad L(3k)L \quad \left| \; L(3k+1)L \; \right|$$

$$=$$

$$\left| \; L(3k)R \quad = L(3k+1)R = L(3k+2)R \; \right| = D_k$$

$$=$$

$$F_k = R(3k-1)R \quad = \quad R(3k)R \quad \left| \; R(3k+1)R \; \right|$$

可以证明这些关系能持续存在,实际上 $D_k$ 就是你们已在第 4 章中遇到过的道森开勒司游戏的值. 所以 L$n$R 即是三重道森开勒司游戏. 我们也能证明

$$D_{k-1} \leqslant F_k \geqslant D_k.$$

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_k$ | 0 | 1 | $*$ | $\uparrow_{0}$ | $\uparrow_{1}$ | $\uparrow_{1}$ | $\uparrow_{02}$ | $*$ | $\uparrow_{3}$ | $\uparrow_{1}$ | $\uparrow_{12}$ | $\uparrow_{0}$ | $\uparrow_{03}$ | $\uparrow_{13}$ | $\uparrow_{12}$ | $\uparrow_{2}$ | $\uparrow_{034}$ |
| $F_{k+17}$ | $\uparrow_{03}$ | $\uparrow_{15}$ | $\uparrow_{12}$ | $\uparrow_{21}$ | $\uparrow_{3}$ | $\uparrow_{3}$ | $\uparrow_{023}$ | $\uparrow_{12}$ | $\uparrow_{31}$ | $\uparrow_{45}$ | $*$ | $\uparrow_{2}$ | $\uparrow_{13}$ | $\uparrow_{13}:-1$ | $\uparrow_{0}$ | $\uparrow_{\overline{04}}$ | $\uparrow_{1235}$ |
| $F_{k+34}$ | $\uparrow_{125}$ | $\uparrow_{2347}$ | $*$ | $\uparrow_{06}$ | $\uparrow_{15}$ | $\uparrow_{123}$ | $\uparrow_{024}$ | $*$ | $\uparrow_{30}$ | $\uparrow_{15}$ | $\uparrow_{\overline{12}}$ | $\uparrow_{04}$ | $\uparrow_{03}$ | $\uparrow_{13}$ | $\uparrow_{12}$ | $\uparrow_{2}$ | $\uparrow_{0134}$ |
| $F_{k+51}$ | $\uparrow_{034}$ | $\uparrow_{015}$ | $\uparrow_{125}$ | $\uparrow_{114}$ | $\uparrow_{34}$ | $*$ | $\uparrow_{02}$ | $\uparrow_{125}$ | $\uparrow_{115}$ | $\uparrow_{031}$ | $*$ | $\uparrow_{236}$ | $\uparrow_{125}$ | $\uparrow_{\overline{123}}$ | $\uparrow_{0}$ | $\uparrow_{\overline{01}}$ | $\uparrow_{1235}$ |

**表 4.** 在五口之家就座游戏中出现的星,超星以及其他奇妙形式.

在我们为 $F_k$ 制备的扩大表格(表 4)中,可以看到它们中的绝大部分都具有形式

$$\{*a, *b, *c, \cdots \mid *\alpha, *\beta, *\gamma, \cdots\}.$$

这个博弈的值为

$$\uparrow_{\alpha\beta\gamma\cdots} \qquad *m - *\mu \qquad \downarrow^{abc\cdots}$$

分别由

$$m > \mu \qquad m = \mu \qquad m < \mu$$

而决定,其中的 $m = \text{mex}(a, b, c, \cdots)$, $\mu = \text{mex}(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$.

博弈 $\downarrow^{abc\cdots}$ 是 $\uparrow_{abc\cdots}$ 之负. 博弈 $\uparrow_{abc\cdots}$ 是典型的**超星**;其原子量为 1,并有着最简形式

$$\uparrow_{abc\cdots} = \{0, *, \cdots, *(m-1) \quad *a, *b, *c, \cdots\}, \text{ 其中 } m = \text{mex}(a, b, c, \cdots)$$

但是,当给予左方任意多的额外拧数可供他选择时,值并不改变.

我们有 $\qquad \uparrow_{abc\cdots} \| *a, \quad \uparrow_{abc\cdots} \| *b, \quad \uparrow_{abc\cdots} \| *c, \quad \cdots$

否则

$$\uparrow_{abc\cdots} > *n.$$

有着一个**限制平移法则**:

> 若 $A,B,C,\cdots\cdots$ 是 $a \overset{*}{+} n, b \overset{*}{+} n, c \overset{*}{+} n,\cdots\cdots$ 中的某个排序而 $n$ 为具有此种性质的最小数,则
>
> $$\uparrow_{ABC\cdots} = \uparrow_{abc\cdots} + *n.$$

如果只有一个下标,

$$\uparrow_0 = \uparrow *,\quad \uparrow_1 = \uparrow,\quad \uparrow_2 = \uparrow + *3,\quad \uparrow_3 = \uparrow + *2,\quad \uparrow_4 = \uparrow + *5,\quad \cdots.$$

超星的这些性质,再加上我们的有关原子量的定理,把五口之家就座问题的计算戏剧性地大大简化了.我们设想表 4 中的下标模式最终将共享一个等于 102 的一般周期,从而使全面分析有了可能.

记号 $\uparrow_{abc}\cdots$ 代表由 $\uparrow_{abc}\cdots$ 而得出的博弈,此时将给予右方某些(不重要)的额外行动,即

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 自 | $F_{31}$ | $F_{33}$ | $F_{45}$ | $F_{48}$ | $F_{65}$ | $F_{67}$ |
| 到 | $\uparrow_{13}$ | $\uparrow_{047}$ | $\uparrow_{126}, \uparrow_{1235}$ | $\uparrow_{135}, \uparrow_{0137}$ | $\uparrow_{1235}, \uparrow_{1236}$ | $\uparrow_{0457}, \uparrow_{0467}$ |

还有类似的游戏,称为"**N 口之家的就座**问题",即对任意的 $N$,每位局中人在安排一家人就座时,需要有效地为其对手保留着两只相邻位置.这些游戏是冷冰冰的,极大多数都具有无穷小值.在安排家庭人口数为

$$2,\qquad 5,\qquad 8,\qquad 11\qquad \cdots$$

的家庭就座时,局势 L$n$R 的值是下列八进码游戏

**·7　　·07　　·007　　·0007　　…**

每个都要重复三次.家庭人数为

$$3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12,\ \cdots$$

的家庭就座游戏,其值也是拧数,但生成它们的法则要更加复杂得多.

只要利用简易的小小定理,即可证明这些值都是拧数,所谓小小定理是指,

若
$$-a \leqslant a,\quad -b \leqslant b,\quad -c \leqslant c,\cdots,$$

则

$$\{-a,-b,-c,\cdots \mid a,b,c,\cdots\} = *m,$$

其中 $m$ 是最小的数而使 $*m$ 与一切游戏 $a,b,c,\cdots$ 不同者.



还有其他一系列就座问题，这时局中人要安排 $n$ 个男孩或 $n$ 个女孩就座而要有效地为他们自己保留相邻的位置. 安排男孩与女孩就座问题就是 $n=1$ 的情形. 勤奋的读者将能发现，其他情形可以为热图学说(见第 6 章)提供一些有用练习.

## 参考文献及进一步阅读材料

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapters 15 and 16.



# 转入鸡心！

*崭新的建筑风格，完全改变了主意.*

惠司坦·休·奥登，《先生，人皆可以为朋友》

*我听到她在玫瑰花丛下说红心是她最喜爱的花色.*

查尔斯·兰姆《埃利亚随笔》，巴德尔夫人对惠斯特*的看法

迄今为止，我们的复合游戏有两位局中人，他们轮流地每次在一个分支中采取行动，游戏规则保证他们终将有一个尽头，而最后一位可以行动的局中人就是赢家. 现在我们将转入本书的第二部分——红鸡心，让我们看看，将有哪些规则要发生变化.

第 9 章中，你必须在**每个**分支中采取行动；第 10 章中，你可以在随便哪个你喜欢的分支中行动.

第 11 章中，某些有偏博弈有无穷多个局势，另有一些有圈游戏可以永远玩下去，没完没了.

第 12 章要讨论一些不同的无偏多圈游戏理论，还要讨论无偏理论的另外一些变化，它允许一个局中人可以连走几步.

第 13 章要研究最后一位能走的局中人被认定为**输家**的无偏博弈理论.

---

* 译者注：惠斯特(Whist)，类似打桥牌的一种游戏.

# 第9章

# 倘使你打不败它们，就同它们联合！

前不靠村，后不靠店，他做着虔诚的长跑.

——奥列佛·哥德史密斯(Oliver Goldsmith)，《荒芜的乡村》，1，143

悬念很可怕，我希望它能继续维持下去.

——奥斯卡·王尔德(Oscar Wilde)，《老实最重要》，Ⅲ.

## 国王的全部马匹

在普通的博弈和中，某个分支博弈中走一步是被认作在博弈和中走出一步的. 现在我们将要考虑的是几个博弈的**联合**，这时我们必须在它的每一个分支中都走出一步.

我们将用一些马匹来玩图1所示的，8×8国际象棋盘上的为数不多的首批游戏. 在轮到他走时，左方必须把棋盘上的**每一匹**马向西移二格，向北或向南移一格；右方则必须把每匹马向北移二格，再向东或向西移一格，如图1所示. 于是我们看到，马的行动很像国际象棋中的骑士，但存在着几点差异. 骑士可以在八个方向行走，但这里的每个局中人只能走其中的二个方向；在同一格子里可以任意放上许多匹马；两个局中人都能移动同一匹马(马是属于国王所有，不是属于左方或右方

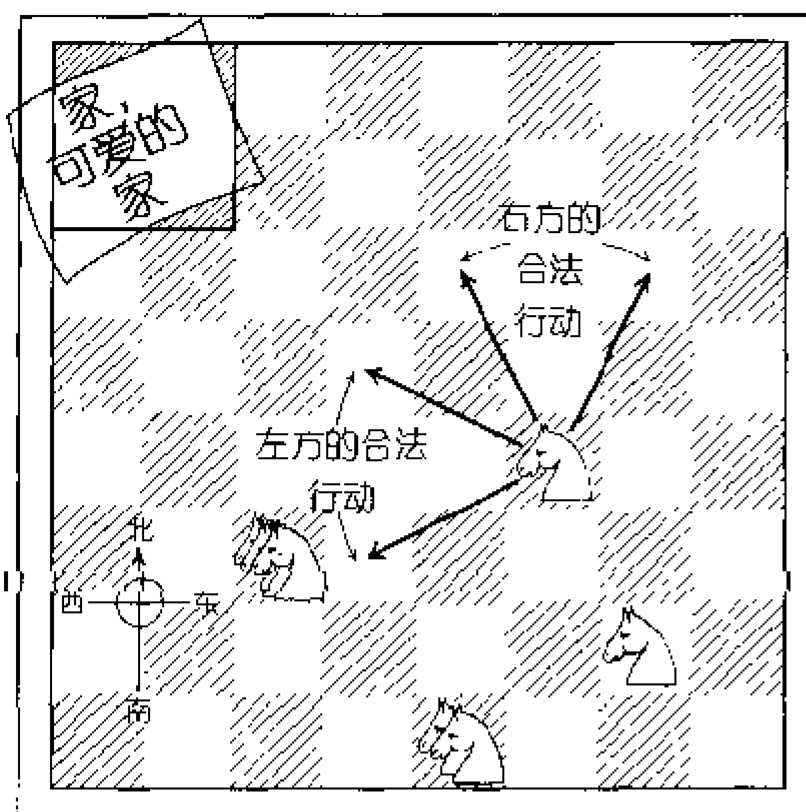


图 1. 马匹怎样回家.

的). 请读者们把它同第 3 章中的白骑士游戏加以比较.

如果一位局中人不能走动任意一匹马,那就认为他在该博弈中已经不能行动了. 按照正常的游戏规则就认为他是输家. 但在本章中我们对反常的游戏规则也给予同等对待,如按照后一情况,那他就是赢家了.

## 我们能联合任何博弈

我们的博弈可视为许多一匹马博弈的联合. 实际上任何博弈

$$G,\ H,\ K,\cdots$$

都能像这样同时去玩以得出一个复合博弈

$$G\wedge H\wedge K\wedge\cdots(\text{“}G\text{ 与 }H\text{ 与 }K\text{ 与}\cdots\text{”}),$$

史密斯(Smith)以及 ONAG 书中把它称为**合取复合物**,但在此处,可简单地称为它们的**联合**. 所谓在复合游戏中走一步,其意思就是说你必须在**每一个**分支

$$G,H,K,\cdots\text{中}$$

都走出对你说来是合法的一步. 而不是在通常的"和"或析取复合物中,你只须在某一个分支中走出一步. 如果你办不到,那么在正常游戏规则下就算你输,而在反常游戏规则下作为你赢.

## 一匹马有多远?

一切都依赖于第一匹要结束的马,因为它将使整个博弈停下来. (在此博弈中,若轮到一位局中人行走时,他无法走动一匹马,就说此马已经"结束"或"完蛋".) 如果某一匹马——最钟爱的宠物——看上去比别的马更加接近于"完蛋",那么你就要对它特别留神. 如果你有办法,那就尽量移动它以便迅速取胜,否则你就尽量拖延,推迟失败的到来,希望另一匹更受宠爱的马匹先完蛋——总而易之,你的指导方针是:




对任意博弈的联合要最大限度地按此原则行事. 当我们已知哪一方先走,按这种方针做游戏的博弈将能持续进行完全确定的步数,后者被 C · A · B · 史密斯称为**斯泰因豪斯**(Steinhaus)**函数**或**遥远度**.

当左方先走时,我们将使用**左方遥远度**这一名词,而在右方先走时

称为**右方遥远度**. 由于双方轮流走棋，所以我们只需考虑左方选择中的右(方)遥远度与右方选择中的左(方)遥远度. 你应当去尽量尝试，以便给你的对手留下一个遥远度(当然是越小越好)，以便保证遥远度(遥远性的数量指标)减少到 0 时是轮到他先走的. 这是因为(在正常游戏规则下)

> [illegible] 局势具有偶数遥远度，
> [illegible] 局势具有奇数遥远度.

故可根据以下规则计算遥远度：

> 在正常游戏规则下求 $G$ 的左遥远度，可在具有偶数右遥远度的任何 $G^L$ 中取**最小的偶数**右遥远度，再加上 1. 不然的话，如果所有的 $G^L$ 都有奇数右遥远度，则可取**最大的奇数**右遥远度，再加上 1. 最后，若 $G$ 没有左方选择时，可取 0.

以上要诀，也可更简明地记为：

> 在正常游戏规则下，如有可能，应尽量利用 1＋**最小偶数**，否则就用 1＋**最大奇数**，如果你没有选择，那就取零.

在求右方遥远度时，可利用右方选择 $G^R$ 的左方遥远度，但仍同上面一样，**最小偶数**要优先于最大奇数.

表 1(ε)给出了处于每一个可能位置的马的左方与右方遥远度(正常游戏规则的情况). 请注意左边的 0 是一个左方不能走动的局势. 图 2 则是一个有着较大遥远度的例子. 这里的两个左方选择，其右方遥远度分别为 0 与 1；对此他宁愿取唯一的偶数 0，再加上 1 之后，就得出 1. 右方的两个选择，其左方遥远度都是 1(没有其他选择！)，于是他再加 1，就得出 2 来.

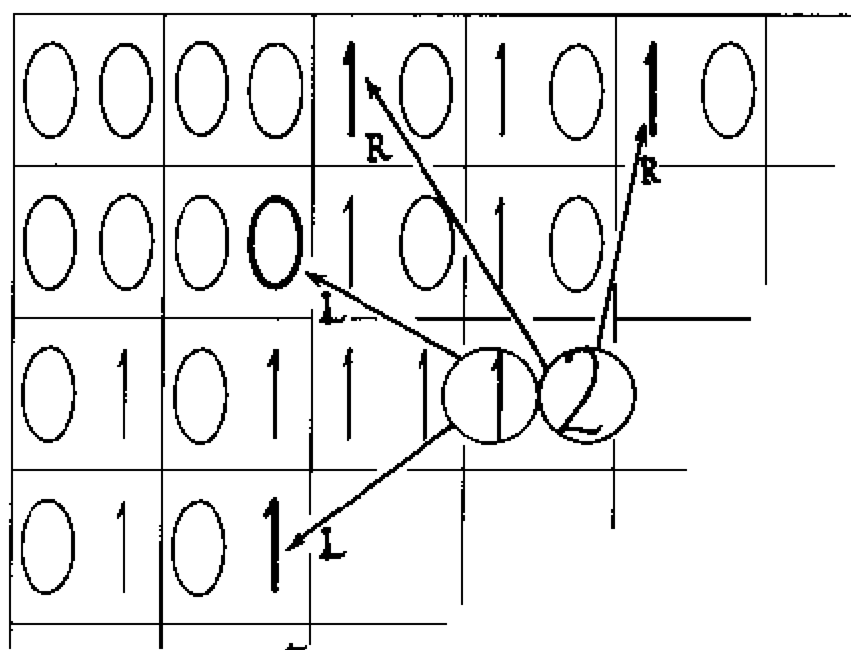



**图 2.** 一匹马离家有多远？



$R_L^- R_R^+$（正常游戏规则）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 00 | 00 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 01 | 01 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 01 | 01 | 21 | 22 | 22 | 32 | 32 | 32 |
| 01 | 01 | 21 | 22 | 22 | 32 | 32 | 32 |
| 01 | 01 | 21 | 23 | 23 | 33 | 34 | 34 |
| 01 | 01 | 21 | 23 | 23 | 43 | 44 | 44 |
| 01 | 01 | 21 | 23 | 23 | 43 | 44 | 44 |

(a) 第一匹马动弹不得就算输.

$R_L^- R_R^-$（反常游戏规则）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 00 | 00 | 20 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| 01 | 02 | 22 | 42 | 52 | 52 | 52 | 52 |
| 01 | 03 | 24 | 44 | 64 | 74 | 74 | 74 |
| 01 | 03 | 25 | 46 | 66 | 86 | 96 | 96 |
| 01 | 03 | 25 | 47 | 68 | 88 | X8 | x8 |
| 01 | 03 | 25 | 47 | 69 | 8X | XX | TX |
| 01 | 03 | 25 | 47 | 69 | 8x | XT | xx |

(b) 第一匹马动弹不得就算赢.

$R_L^- R_R^+$（正常游戏规则，允许“派司”）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 12 | 12 | 34 | 34 | 56 | 56 |
| 00 | 00 | 12 | 12 | 34 | 34 | 56 | 56 |
| 21 | 21 | 11 | 14 | 34 | 36 | 56 | 56 |
| 21 | 21 | 41 | 44 | 44 | 56 | 56 | 76 |
| 43 | 43 | 43 | 44 | 44 | 56 | 56 | 76 |
| 43 | 43 | 63 | 65 | 65 | 55 | 58 | 76 |
| 65 | 65 | 65 | 65 | 65 | 85 | 88 | 86 |
| 65 | 65 | 65 | 67 | 67 | 67 | 68 | 66 |

(c) 第一匹马回了家，就算赢.

$R_L R_R$（反常游戏规则，允许“派司”）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 12 | 12 | 45 | 56 | 56 | 56 |
| 00 | 00 | 23 | 34 | 34 | 34 | 67 | 78 |
| 21 | 32 | 22 | 42 | 42 | 56 | 56 | 56 |
| 21 | 43 | 24 | 44 | 54 | 64 | 74 | 77 |
| 54 | 43 | 24 | 45 | 66 | 76 | 86 | 76 |
| 65 | 43 | 65 | 46 | 67 | 66 | 98 | X8 |
| 65 | 76 | 65 | 47 | 68 | 89 | 88 | x9 |
| 65 | 87 | 65 | 77 | 67 | 8X | 9x | XX |

(d) 第一匹马回了家，就算输.

$R^+$（正常游戏规则，无偏博弈）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |

(x) 第一匹马回了家，就算赢.

$R^-$（反常游戏规则，无偏博弈）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 3 | 3 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 4 | 6 | 5 | 6 | 7 | 6 |
| 3 | 5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 6 | 7 |

(y) 第一匹马回了家，就算输.

**表 1.** 所有的马匹离家有多远？($X=10, x=11, T=12$)

## 第一匹马不能动弹时，怎么去赢？

在反常游戏规则的情况，胜者与负者交换了角色. 因此局中人宁愿走到奇数而不是走到偶数. 此时，计算遥远度的办法可以扼要地叙述如下：

> 反常游戏规则的情况如有可能，尽量利用 1＋**最小奇数**，不然的话，就用 1＋**最大偶数**，如果你已没有选择余地，则取零.

表 1(b)给出了反常游戏情况下的各个遥远度.

不论正常或反常，当第一个分支游戏宣告终止时，整个博弈的联合必然也终止. 由此可见，遥远度是按照同一种类的、任何分支的最小遥远度来计算的：

$$R_L^+(G\wedge H\wedge\cdots)=\min(R_L^+(G),R_L^+(H),\cdots),$$
$$R_R^+(G\wedge H\wedge\cdots)=\min(R_R^+(G),R_R^+(H),\cdots),$$
$$R_L^-(G\wedge H\wedge\cdots)=\min(R_L^-(G),R_L^-(H),\cdots),$$
$$R_R^-(G\wedge H\wedge\cdots)=\min(R_R^-(G),R_R^-(H),\cdots).$$

在此处及相关的上下文之中，符号的意思是：

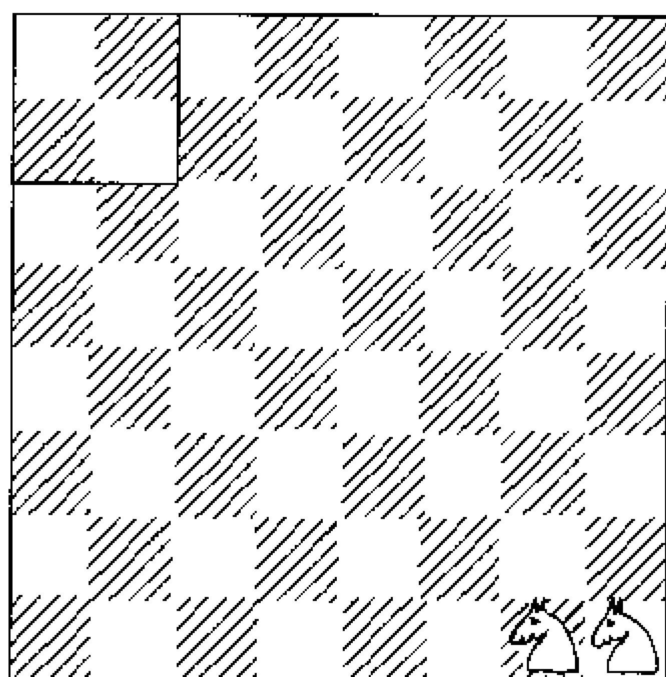
| | | |
|---|---|---|
| $L$ | 表示 | 左方先走， |
| $R$ | 表示 | 右方先走， |
| $+$ | 表示 | 正常游戏规则， |
| $-$ | 表示 | 反常游戏规则. |

要想赢，你必须走到一个位置，

> 务必使对手的遥远度：在正常游戏规则下，为偶数；在反常游戏规则下，为奇数.

让我们来看一看，在反常游戏规则下，哪一方能在以下游戏中取胜：

两匹马的左方遥远度为 10 与 11(X 及 x),所以从整体来看,局势的左方遥远度是两数中的最小者,即为 10. 由于这是一个偶数,所以左方有一个好的走法,即把它变为奇数,然而两匹马的右方遥远度为 12 与 11(T 及 x),较小者是 11,所以从这个局势出发的话,右方是没有好走法的. 左方宠爱的马是左面的一匹,而右方则是右面的一匹,尽管它看来距结束状态要远一些.



## 一种略为缓慢的联合

我们可以将规则略加修改,而使游戏变得格外有趣. 如果有一位局中人不能移动某一马匹而对方却能移动,我们可以允许他对那匹马说一下"派司",但他仍须对其他能走的马采取适当的行动. 现在,当第一匹马一旦回到老家(左上角的 2×2 方格,这时双方都不能走动这匹马,而又不能说一声"派司"). 游戏即告结束. 此种情况下,正常与反常遥远度的计算可由表 1(c)与

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 0 0 | 1 2 | 1 2 | ④⑤ | |
| 0 0 | 0 0 | 2 3 L | | R | |

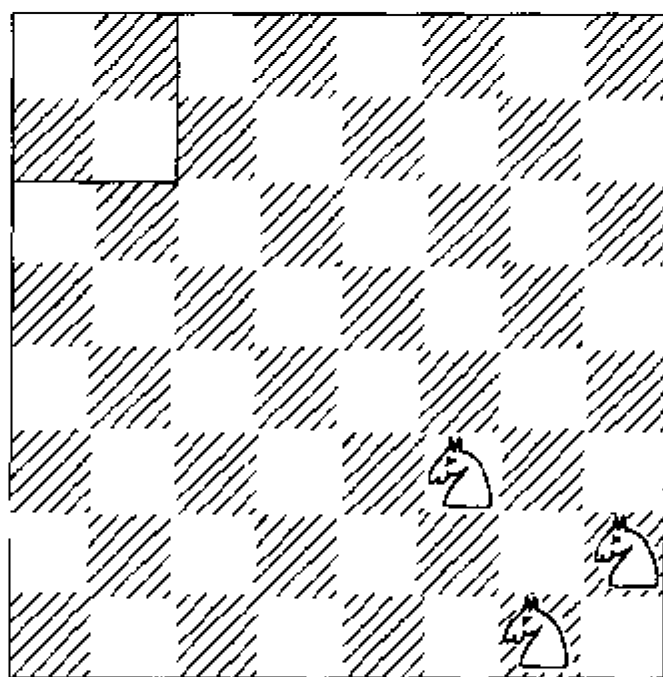
**图 3.** 右方稍为远一点,因为他已动弹不了了.

表1(d)给出.它们的计算方法完全相同，但应考虑到新添的"派司"行动.对图3所要计算的反常遥远度而言，左方有一合适的行动可走到右方遥远度为3的位置，所以他的遥远度是1+3=4.右方则没有合适的动作可走，但可以"派司"到同一位置而让左方去走，所以他的遥远度是1+4=5.

## 无偏地走动马匹

作为另一个变种，我们可以认为，图1中的四个方向对两位局中人来说都是合法的，这样一来，游戏的性质变为无偏博弈，任一位置的左、右遥远度已经全然没有区别，所以表1(x)与表1(y)(分别对应于正常及反常游戏规则的情况)的每一个格子里只有一个数字.

对下图的游戏来说，跑在前面的那匹马，就正常游戏规则的情况下来说是一匹得宠的马(遥远度为4，其他两匹马却是5)，但在反常游戏规则的情况下，两匹落后的马却是合起来作为宠物(遥远度6对遥远度7).



所有这些游戏都可放在任意大小的棋盘上进行，甚至可利用四分之一无限长棋盘.表5(详见附录)给出了后面这种情况的遥远度.

## 切割每一块饼

切饼游戏有着一种合取的变化形式，名为**切割诸饼**，其玩法同以前所说的基本上一样(请参

阅第 2 章的图 3). 这时左兄必须直切(而右妹必须横切), 切割时必须在事先划好的格子上进行, 并且对**每块**饼都要切. 当一位局中人最先得到一条饼而使对手无法切割时, 那么在正常游戏规则下便算他赢, 而在反常游戏规则下就算他输. 表 2(a) 与表 2(b) 给出了遥远度, 而图 4 则指出了它们的计算办法.

在另一个变种中(表 2(c) 与 2(d)) 若一位局中人无法切割一块特定形态的饼而其对手却能切割时, 可以准许他说一声"派司"而把切割权让渡给对手. 当第一块 1×1 饼出现时就认为此种博弈已到达终止状态, 因为此时双方都已经无法切割. 故对一条水平形状的饼来说, 因为右妹无法可切, 所以其遥远度将比左兄的遥远度大 1.

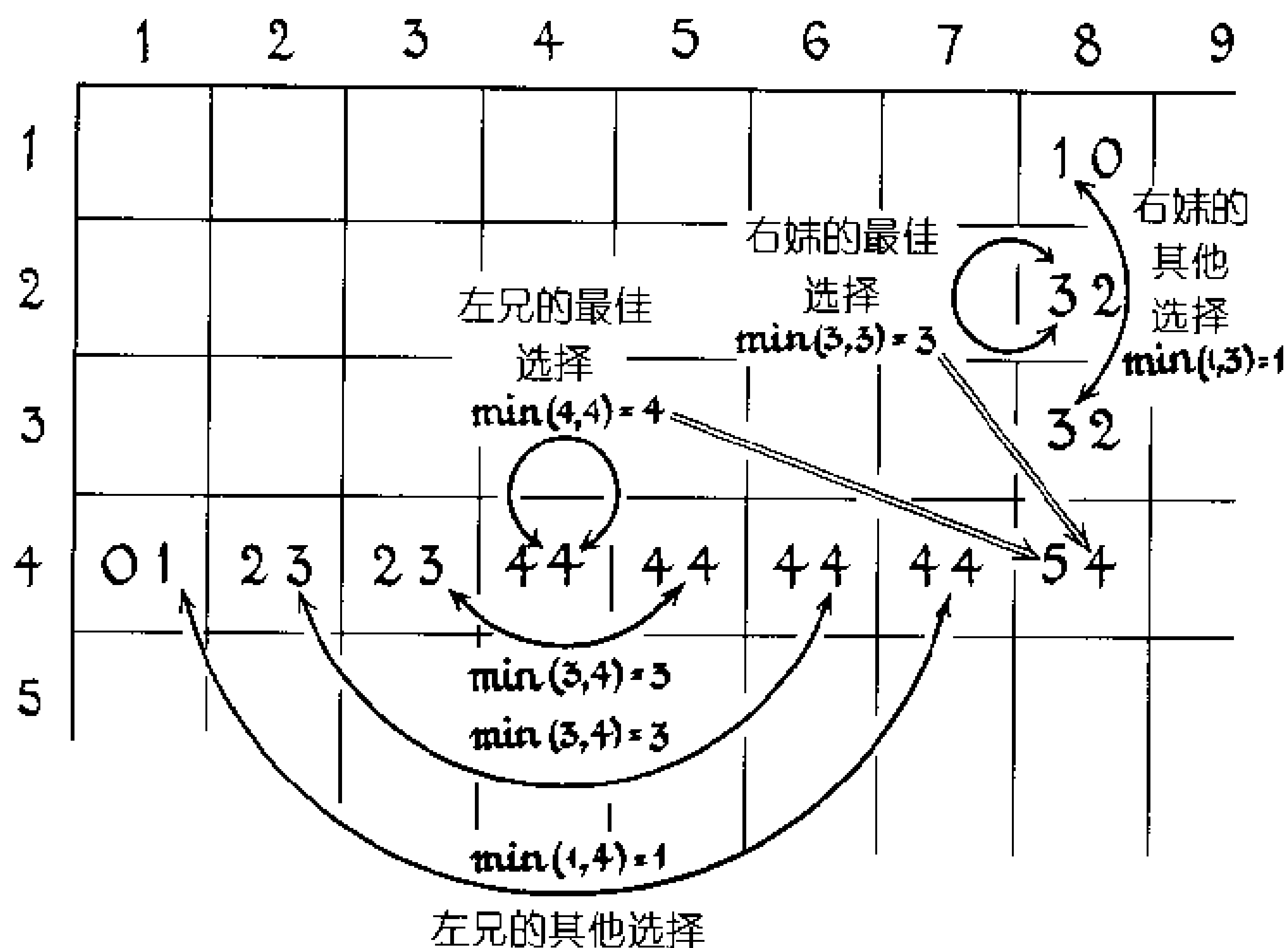
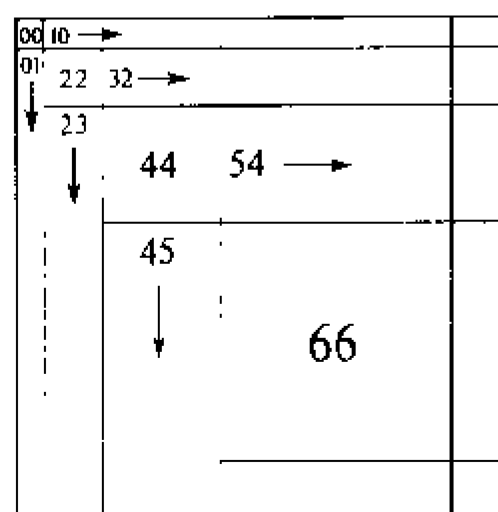



**图 4.** 左兄与右妹正在深思熟虑地思考一个 4×8 形式的饼.

在无偏性质的切诸饼游戏中(见表 2(x) 与表 2(y)), 局中人仍然必需切割所有的饼, 但每人都可以横切或直切.

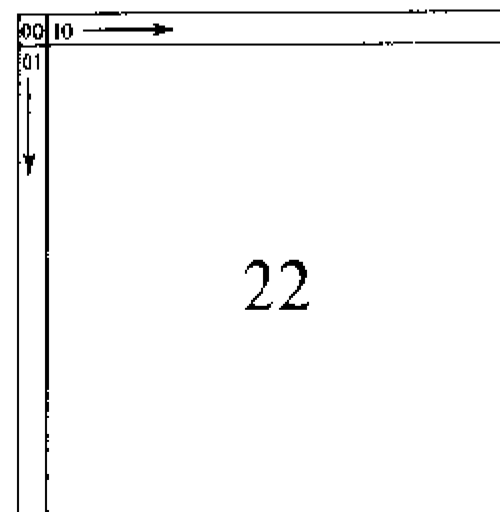
在下面这些表格中, 我们经常使用较大的字体来表示相同的遥远度, 在整个大方块中均是如此.

$R_L^+R_R^+$（正常游戏规则）



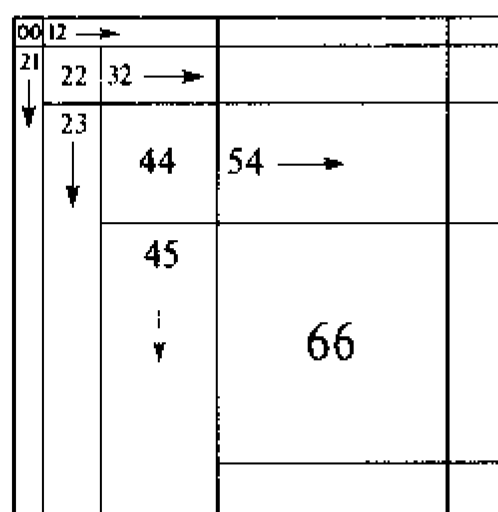

(a) 率先得出适宜的条状切块者获胜.

$R_L^-R_R^+$（反常游戏规则）



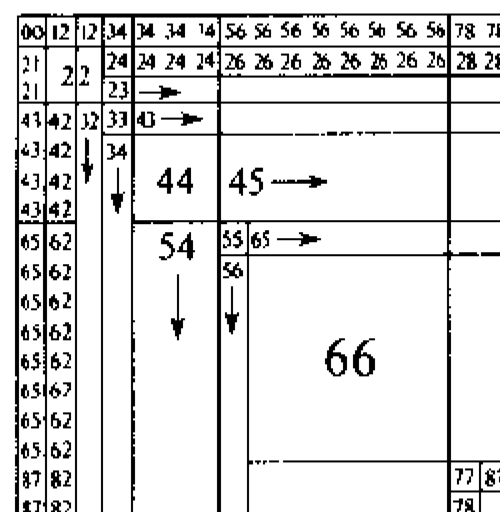

(b) 率先得出适宜的条状切块者是输家.

$R_L^+R_R^+$（准许“派司”的正常游戏规则）



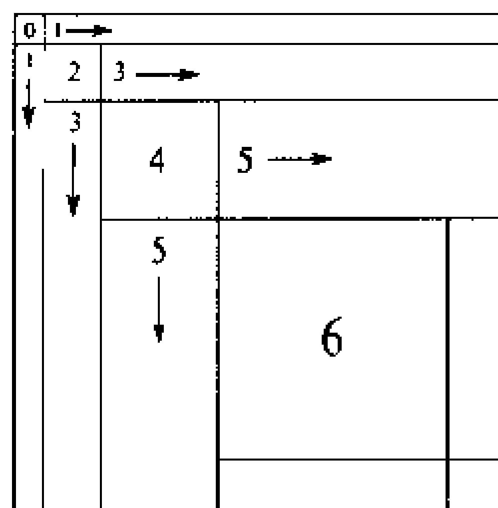

(c) 率先得出 1×1 饼者获胜.

$R_L^-R_R^-$（准许“派司”的反常游戏规则）



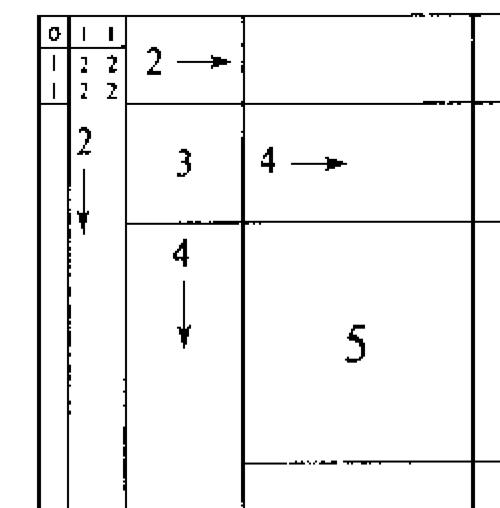

(d) 率先得出 1×1 饼者是输家.

$R^+$（正常游戏规则的无偏情形）




(x) 率先得出 1×1 饼者获胜.

$R^-$（反常游戏规则的无偏情形）




(y) 率先得出 1×1 饼者是输家.

**表 2.** 切诸饼游戏要花多少时间.



## 吃诸饼游戏

**吃诸饼**游戏是一种极其自然的**缓慢联合**博弈(详见后文),它的遥远度计算表格请参阅本章增补材料中的表 7.

## 何时把你的钱押在最后一匹马上

在**国王的一切马匹**游戏的下一个变种中,游戏规则的一个看来似乎极为肤浅平凡的修改在战略上产生了一种戏剧性变化.上文最后一段我们曾经讲到过,如果你有一匹马无法移动,然而对手却可以动它,仅当此时你可以说一声"派司".现在我们将允许你说声"派司",假定有任意马匹可由你们中的任何一人来走动,而当**所有**马匹都到家时,游戏才告结束.在正常游戏规则下,谁把最后一匹马送回家,他就是赢家,而在反常游戏规则下,他当然是个输家.

在这种游戏中,胜负不决定于"快"——正是看来在比赛中倒数第一的马匹(**殿军**)在走动时必须特别审慎.如果你认为利用它可以获胜的话,你必须竭力做到:赢得越慢越好,以防你的对手利用于他有利的另一匹马来结束比赛.反之,如果这个"殿军"看来将使你在比赛中输掉的话,那就要尽量使它迅速地"到家",以便在路上留下更加慢吞吞的落后分子.

## 驽马与陪客马*的联合

我们的博弈揭示了一种新的办法以用来联合若干个博弈

$$G, H, K, \cdots$$

以产生一种复合博弈,

$$G \triangle H \triangle K \triangle \cdots (\text{“}G \text{ 又 } H \text{ 又 } K \text{ 又}\cdots\text{”}),$$

在 ONAG 书中称它为连续合取复合物,但在本书中名为**慢联合**.为了避免混淆起见,以前的那种联合可以称为**快联合**.在若干博弈的快联合中,局中人必须在每一个他能走的分支博弈中采取行动,仅当他彻头彻尾,完全无路可走时,博弈才告终止.

最优策略竟是快联合的一种拙劣模仿(东施效颦!)——你要赢时应走得慢;你要输时应走

---

* 译者注:陪客马是赛马中名落孙山的马匹,得不到任何名次,只是陪客而已.

得快！赢家迫切希望尝一尝他的压倒优势的滋味，维持得越长越好，而输家希望度过这段困难时期，越快越好。在规定了谁先走之后，如果按照这种"猫捉老鼠"战术进行这种游戏，此时博弈势将持续一个完全确定的动作步数，后者称为**悬而不决数**(简称**悬数**)。

我们将通过求遥远度规则的拙劣模仿来求出这些悬数：

> 在正常游戏规则情况下，求 $G$ 的左悬数时，可在有偶数右悬数的任一 $G^L$ 中取**最大的偶数**右悬数，再加上 1。不然的话，如果一切 $G^L$ 都只有奇数的右悬数，则可取**最小奇数**右悬数。若 $G$ 没有左方选择，则取 0。

简而言之，也就是说：

> 正常游戏规则的情形如有可能，尽量利用 1＋**最大偶数**，否则，就用 1＋**最小奇数**，若你根本没有选择，则取**零**。

类似地，

> 反常游戏规则的情形如有可能，尽量利用 1－**最大奇数**，否则，就用 1－**最小偶数**，若你没有选择，则可取**零**。

有句格言可以统管上述两种情形，那就是：

**利 必 求 大，**
**害 取 其 小。**

由于最后分支结束时，慢联合才算结束，因此它的悬数（不论何种性质）是所有各分支的最大悬数（自然要取相同种类者）：

$$S_L^+(G\triangle H\triangle\cdots)=\max(S_L^+(G),S_L^+(H),\cdots),$$
$$S_R^+(G\triangle H\triangle\cdots)=\max(S_R^+(G),S_R^+(H),\cdots),$$
$$S_L^-(G\triangle H\triangle\cdots)=\max(S_L^-(G),S_L^-(H),\cdots),$$
$$S_R^-(G\triangle H\triangle\cdots)=\max(S_R^-(G),S_R^-(H),\cdots).$$

$S_L^+S_R^+$（正常游戏规则，允许"派司"）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 12 | 12 | 34 | 34 | 56 | 56 |
| 00 | 00 | 12 | 12 | 34 | 34 | 56 | 56 |
| 21 | 21 | 11 | 12 | 32 | 34 | 54 | 56 |
| 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 34 | 34 | 56 |
| 43 | 43 | 23 | 22 | 22 | 34 | 34 | 56 |
| 43 | 43 | 43 | 43 | 43 | 33 | 34 | 54 |
| 65 | 65 | 45 | 43 | 43 | 43 | 44 | 44 |
| 65 | 65 | 65 | 65 | 65 | 45 | 44 | 44 |

(a) 最后一匹马到家算赢.

$S_L^-S_R^-$（反常游戏规则，允许"派司"）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 12 | 12 | 45 | 34 | 56 | 56 |
| 00 | 00 | 23 | 12 | 34 | 34 | 67 | 56 |
| 21 | 32 | 22 | 22 | 44 | 36 | 56 | 56 |
| 21 | 21 | 22 | 44 | 34 | 44 | 56 | 77 |
| 54 | 43 | 44 | 43 | 44 | 56 | 66 | 56 |
| 43 | 43 | 63 | 44 | 65 | 66 | 58 | 66 |
| 65 | 76 | 65 | 65 | 66 | 85 | 66 | 77 |
| 65 | 65 | 65 | 77 | 65 | 66 | 77 | 66 |

(b) 最后一匹马到家算输.

$S^+$（正常游戏规则，无偏博弈）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |

(x) 最后一匹马到家算赢.

$S^-$（反常游戏规则，无偏博弈）

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 | 6 | 5 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 5 | 4 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 6 | 5 |
| 3 | 4 | 4 | 6 | 3 | 6 | 5 | 6 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 | 7 |

(y) 最后一匹马到家算输.

**表 3.** 慢马比赛的悬数.

试比较两种学说：




表3(a)至表3(y)给出了国王的所有马匹游戏的四种变化形式的悬数,最后一匹马决定了比赛的胜负.

表3(a)与表3(b)分别讨论了正常游戏规则以及反常游戏规则下,不能走动任何马匹时可以允许"派司"的情况.

表3(x)与表3(y)则是对该博弈的无偏情况而言,此时左悬数与右悬数是完全吻合的.

## 让他们吃饼!

有时候我们玩游戏的方式将使快联合比慢联合要更切合实际情况,或者反之.譬如说,对切诸饼游戏而言,快联合就显得更为自然一些,当我们吃饼时就不是如此了.分别给出切诸饼游戏的悬数以及吃诸饼游戏的遥远度的表6与表7于是就要被我们驱赶到本章的"增补"里去.

在吃诸饼游戏里左兄必须吃掉仍旧放在桌上的任何一块饼的宽度为1的直条,而右妹则必须吃掉相应的横条.这一行动将使饼分为两块,除非被吃掉的饼位于边上.在正常游戏规则下谁吃最后一块是赢家,而在反常游戏规则下却是输家.这一游戏的析取形式(创始者为杰姆·皮纳姆)便是第8章里曾经讲过的切饼游戏.

每块饼再次定义了一个分支博弈,但当一块饼完全被吃光时,整个游戏并不因此而告终,因为任何人再也看不见它了.如果那里没有饼,你当然就没有了吃饼的任务!由此可见,联合肯定是一种慢联合——此时,正常与反常悬数将分别出现在表4(a)与表4(b)中,而无偏情况下(此时任何一位局中人不论纵、横都可吃饼)的悬数则分别在表4(x)及表4(y)中给出.可以看到,无偏博弈的各行最终是周期性的.表4(x)的第0至9行的各周期可以整除16,而表4(y)的第0至4行的各周期可整除18.在每种情况下,表中前20个数包含着一个完整的周期.

| 行 \ 列 0–32 | 印出的格内数字（从左到右） |
|---|---|
| 0 | 00 → |
| 1 | ↓ 11 21 → |
| 2 | 12 33 43 → |
| 3 | ↓ 45 45 45 45 65 → |
| 4 | 34 54 87 → |
| 5 | ↓ 54 55 67 |
| 6 | 54 |
| 7 | 54 |
| 8 | 56 |
| 9 | 89 |
| 10 | ↓ |
| 11 | |
| 12 | 76 77 |
| 13 | |
| 14 | |
| 15 | |
| 16 | 78 |
| 17 | |
| 18 | ↓ 98 99 |
| 19 | |
| 20 | |

表 4(a). 吃诸饼游戏(正常游戏规则) $S_L^+ S_R^+$ .

| 行 \ 列 0–28 | 印出的格内数字（从左到右） |
|---|---|
| 0 | 00 → |
| 1 | ↓ 11 21 → |
| 2 | 12 33 |
| 3 | ↓ 33 43 → |
| 4 | 55 |
| 5 | 34 55 |
| 6 | 55 65 → |
| 7 | ↓ 55 |
| 8 | 77 |
| 9 | 56 77 |
| 10 | 77 |
| 11 | ↓ 77 87 → |
| 12 | 77 |
| 13 | 77 |
| 14 | 77 |
| 15 | 77 |
| 16 | 99 |
| 17 | 78 99 |
| 18 | 99 X9 → |
| 19 | ↓ 99 |
| 20 | 99 |

表 4(b). 吃诸饼游戏(反常游戏规则) $S_L^- S_R^-$ (其中 $X$ 表示 10).

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 0 | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 |
| 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 7 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 |
| 8 | 0 | 1 | 3 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 9 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 7 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 7 | 7 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 4 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 11 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | 5 | 4 | 5 | 7 | 7 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 |
| 12 | 0 | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 |
| 13 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 7 | 7 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 14 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 5 | 4 | 7 | 7 | 5 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 15 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| 16 | 0 | 1 | 3 | 2 | 5 | 5 | 4 | 5 | 7 | 7 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 7 | 7 | 7 | 8 | 9 |
| 17 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 7 |
| 18 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 4 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 7 |
| 19 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | 5 | 5 | 3 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 7 |
| 20 | 0 | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 21 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 9 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 7 |

(x) 正常游戏规则($S^{+}$).

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 3 | 0 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 4 | 4 | 3 |
| 5 | 0 | 2 | 4 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 6 | 0 | 2 | 3 | 4 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 4 |
| 7 | 0 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 4 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 8 | 0 | 2 | 4 | 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 5 | 6 |
| 9 | 0 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 8 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 10 | 0 | 1 | 2 | 4 | 3 | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 11 | 0 | 2 | 3 | 4 | 4 | 6 | 5 | 6 | 8 | 8 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 8 | 6 | 8 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 12 | 0 | 2 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 8 | 8 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 7 |
| 13 | 0 | 1 | 4 | 2 | 3 | 6 | 6 | 3 | 8 | 8 | 6 | 6 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 14 | 0 | 2 | 4 | 3 | 4 | 6 | 6 | 4 | 8 | 8 | 6 | 5 | 8 | 8 | 6 | 6 | 6 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 |
| 15 | 0 | 2 | 3 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 8 | 8 | 6 | 6 | 8 | 8 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 16 | 0 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 5 | 6 | 8 | 8 | 6 | 6 | 8 | 8 | 5 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 17 | 0 | 2 | 4 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 |
| 18 | 0 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 8 | 6 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | X | X | X | X | X | X |
| 19 | 0 | 1 | 2 | 2 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 20 | 0 | 2 | 3 | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 | 8 | 5 | 8 | 6 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | X | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | X | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 |
| 21 | 0 | 2 | 4 | 3 | 4 | 6 | 5 | 6 | 8 | 6 | 8 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | X | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | X | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |

(y) 反常游戏规则($S^{-}$)($X$ 代表 10).

**表 4(x)与表 4(y).** 吃诸饼游戏的无偏情况.



# 增　　补

## 在四分之一无限长棋盘上的国王的全部马匹游戏

表1是在普通国际象棋盘上给出的马的遥远度.靠近棋盘的下部与右部边缘的一些值将受影响,因为马不能跳出棋盘外面.表5将给出没有下部与右部边缘限制的值;模式将通过向下与向右无限伸展的直线来表示.表5(d)最不易观察;行与列的最终周期为4,跃度也是4,但第一,第二以及每第三个符号与其他的不一样.

你也许愿意去计算一下相应的悬数表格.最切合实际的是同意一位局中人说一声“派司”,如果有一匹马他不能移动,而其对手可以移动的话.

## 切割你的饼并把它们吃掉

表6(a)与表6(b)分别对有偏切诸饼游戏给出了正常与反常悬数的值.其规则是:凡是你能

(a) $R_L^+ R_R^+$(正常游戏规则)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 10 | 10 | → | | | | | |
| 00 | 00 | 10 | 10 | → | | | | | |
| 01 | 01 | 11 | 12 | 12 | → | | | | |
| 01 | 01 | 21 | 22 | 22 | 32 | 32 | → | | |
| ↓ | ↓ | 21 | 22 | 22 | 32 | 32 | → | | |
| | | ↓ | 23 | 23 | 33 | 34 | 34 | → | |
| | | | 23 | 23 | 43 | 44 | 44 | 54 | 54 |
| | | | ↓ | ↓ | 43 | 44 | 44 | 54 | 54 |
| | | | | | ↓ | 45 | 45 | 55 | 56 |
| | | | | | | 45 | 45 | 65 | 66 |

(b) $R_L^- R_R^-$(反常游戏规则)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 10 | 10 | → | | | | | |
| 00 | 00 | 20 | 30 | 30 | → | | | | |
| 01 | 02 | 22 | 42 | 52 | 52 | → | | | |
| 01 | 03 | 24 | 44 | 64 | 74 | 74 | → | | |
| ↓ | 03 | 25 | 46 | 66 | 86 | 96 | 96 | → | |
| | ↓ | 25 | 47 | 68 | 88 | X8 | ›8 | x8 | → |
| | | ↓ | 47 | 69 | 8X | XX | 1X | ıX | ıX |
| | | | ↓ | 69 | 8x | XT | TT | FT | fT |
| | | | | ↓ | 8x | Xt | TF | FF | SF |
| | | | | | ↓ | Xt | Tf | FS | SS |

(c) $R_L^+R_R^+$（正常游戏规则，允许“派司”）

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 12 | 12 | 34 | | 56 | | 78 | | 9X | |
| 00 | 00 | 12 | 12 | | | | | | | | |
| 21 | 21 | 11 | 14 | 34 | 36 | 56 | 58 | 78 | 7X | 9X | 9T |
| 21 | 21 | 41 | 44 | | 56 | | 78 | | 9X | | |
| 43 | | 43 | | | | | | | | | |
| | | 63 | 65 | | 55 | 58 | 78 | 7X | 9X | 9T | |
| 65 | | 65 | | | 85 | 88 | | 9X | | xT | |
| | | 85 | 87 | | 87 | | | | | | |
| 87 | | 87 | | | X7 | X9 | | 99 | 9T | xT | |
| | | X7 | X9 | | X9 | | | T9 | TT | | |
| X9 | | X9 | | | T9 | Tx | | Tx | | | |
| | | T9 | | | | | | | | | |

(d) $R_L^-R_R^-$（反常游戏规则，允许“派司”）

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 12 | 12 | 45 | 56 | 56 | 56 | 89 | 9X | 9X | 9X |
| 00 | 00 | 23 | 34 | 34 | 34 | 67 | 78 | 78 | 78 | Xx | xT |
| 21 | 32 | 22 | 42 | 42 | 56 | 56 | 56 | 86 | 9X | 9X | 9X |
| 21 | 43 | 24 | 44 | 54 | 64 | 74 | 78 | 78 | 78 | 78 | xT |
| 54 | 43 | 24 | 45 | 66 | 76 | 86 | 76 | 96 | 9X | 9X | 9X |
| 65 | 43 | 65 | 46 | 67 | 66 | 98 | X8 | 98 | x8 | 98 | x8 |
| 65 | 76 | 65 | 47 | 68 | 89 | 88 | xX | T8 | xX | tX | xX |
| 65 | 87 | 65 | 87 | 67 | 8X | Xx | XX | tT | FX | tT | fX |
| 98 | 87 | 68 | 87 | 69 | 89 | 8T | Tt | TT | fF | ST | fF |
| X9 | 87 | X9 | 87 | X9 | 8x | Xx | XF | Ff | FF | sS | AF |
| X9 | xX | X9 | 87 | X9 | 89 | Xt | Tt | TS | Ss | SS | aA |
| X9 | Tx | X9 | Tx | X9 | 8x | Xx | Xf | Ff | FA | Aa | AA |

(x) $R^+$（正常游戏规则，无偏博弈）

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 |
| 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 |

(y) $R^-$（反常游戏规则，无偏博弈）

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 3 | 3 | 5 | 6 | 5 | 5 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 4 | 4 | 6 | 7 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 | 7 | 8 | 7 |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | 6 | 7 | 6 | 9 | 8 | 9 |
| 3 | 4 | 4 | 6 | 5 | 6 | 7 | 6 | 7 | 8 | 9 | 8 |
| 3 | 5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 6 | 7 | 8 | 9 | 8 | 9 |
| 5 | 4 | 4 | 6 | 7 | 6 | 7 | 8 | 9 | 8 | 9 | X |
| 6 | 4 | 6 | 7 | 6 | 9 | 8 | 9 | 8 | 9 | X | x |
| 5 | 6 | 6 | 8 | 7 | 8 | 9 | 8 | 9 | X | x | X |

**表 5.** 四分之一无限长棋盘上的国王的一切马匹游戏.

(各字母所代表的数字:X—10,x=11,T=12,t=13,F—14,f=15,S=16,s—17,A—18,a=19.)

切割的饼统统都要去切,仅当所有的饼都已切割完时游戏才算结束. 此规则还蕴含着这样的意义:若你不能切割一饼而你的对手能切割时,你可以说一声“派司”. 表 6(x)与表 6(y)则是对无偏博弈情况而言,这时每位局中人既能横切,又能直切.



**表6.** 正常，反常以及无偏切诸饼游戏的悬数．
(X = 10, x = 11, T = 12)
凡是你能切的饼都要切（但允许“派司”）；当所有的饼全部都切成了 1×1 小块．
(a) 最后切割者算赢，
(b) 最后切割者算输．

(a) $S_L^+ S_R^-$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 00 | 12 | 34 | 56 | 78 | 9X | xT |
| 2 | 21 | 22 | | | | | |
| 3 | 43 | | 44 | | | | |
| 4 | 65 | | | 66 | | | |
| 5 | 87 | | | | 88 | | |
| 6 | X9 | | | | | XX | |
| 7 | Tx | | | | | | TT |

(b) $S_L^- S_R^-$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 00 | 12 | 34 | 56 | 78 | 9X | 11,12 | 13,14 | 15,16 | 17,18 | 19,20 | 21,22 | 23,24 |
| 2 | 21 | 22 | 34 | 36 | 58 | 5X | 7,12 | 7,14 | 9,16 | 9,18 | 11,20 | 11,22 | 13,24 |
| 3 | 43 | 43 | 44 | 46 | | | | | | | | | |
| 4 | 65 | 63 | 64 | 66 | 58 | 5X | | | | | | | |
| 5 | 87 | 85 | | 85 | 88 | 6X | 6,12 | 6,14 | | | | | |
| 6 | X9 | X5 | | X5 | X6 | XX | 6,12 | 6,14 | 7,16 | 7,18 | | | |
| 7 | 12,11 | 12,7 | | | 12,6 | 12,6 | 12,12 | 8,14 | 8,16 | 8,18 | 7,20 | 7,22 | |
| 8 | 14,13 | 14,7 | | | 14,6 | 14,6 | 14,8 | 14,14 | 8,16 | 8,18 | 7,20 | 7,22 | |
| 9 | 16,15 | 16,9 | | | | 16,7 | 16,8 | 16,8 | 16,16 | 10,18 | 10,20 | | |
| 10 | 18,17 | 18,9 | | | | 18,7 | 18,8 | 18,8 | 18,10 | 18,18 | | | |
| 11 | 20,19 | 20,11 | | | | | 20,7 | 20,7 | 20,10 | | | | |
| 12 | 22,21 | 22,11 | | | | | 22,7 | 22,7 | 22,8 | | | | |
| 13 | 24,23 | 24,13 | | | | | | 24,9 | 24,10 | | | | |
| 14 | 26,25 | 26,13 | | | | | | 26,9 | 26,9 | | | | |
| 15 | 28,27 | 28,15 | | | | | | | 28,9 | | | | |
| 16 | 30,29 | 30,15 | | | | | | | 30,9 | | | | |

(x) $S^+$（正常游戏规则，无偏情况）

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 4 | 3 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 7 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 5 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 |
| 6 | 3 | 5 | 5 | 5 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 |
| 7 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 8 | 5 | 5 | 7 | 5 | 7 | 7 | 9 | 6 | 7 | 7 | 9 |
| 9 | 5 | 5 | 7 | 6 | 7 | 7 | 9 | 7 | 8 | 9 | 9 |
| 10 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 7 | 9 | 8 | 9 |
| 11 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | X |

(y) $S^-$（反常游戏规则，无偏情况）

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 |
| 5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 6 | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 7 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | X |
| 8 | 4 | 6 | 6 | 6 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | X | 8 |
| 9 | 4 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | X | X | X |
| 10 | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | X | 9 | X | X |
| 11 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | X | X | X | X | X |

（方框表示由“最西北”的$\mathscr{P}$—局势所形成之弯曲．）

在本章末尾给出了吃诸饼游戏的悬数. 表 7 给出的遥远度适应于第一块条形饼($1\times n$ 或 $n\times 1$ 形状的饼)被吃掉时游戏就算终止的情况,适应于 $R$ (反常游戏规则的无偏情况)的表 7(y)在这里没有列出来,你只要把表 7(x)中的各个数字都加上 1(除去 $1\times 1$ 饼的数字之外). 也就是说:$R^-(1,1)=R^+(1,1)=1$;其余情况下,$R^-=R^++1$.

(a) $R_L^+R_R^+$(先吃掉一块条形饼者算赢)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 1 | ∞ | 11 | 21 | → | | | |
| 2 | ∞ | 12 | | | | | |
| 3 | ∞ | | | 33 | | | |
| 4 | ∞ | ↓ | | | | | |
| 5 | ∞ | | | | | | |
| 6 | ∞ | | | | | | |

(b) $R_L^-R_R^-$(先吃掉一块条形饼者算输)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 1 | ∞ | 11 | 21 | → | | | | | |
| 2 | ∞ | 12 | 33 | 43 | → | | | | |
| 3 | ∞ | | 34 | 55 | 65 | → | | | |
| 4 | ∞ | ↓ | | 56 | 77 | 87 | → | | |
| 5 | ∞ | | ↓ | | 78 | 99 | X9 | → | |
| 6 | ∞ | | | ↓ | ↓ | 9X | xx | Tx | → |

**表 7(a)与 7(b)**. 吃诸饼游戏的有偏博弈遥远度.

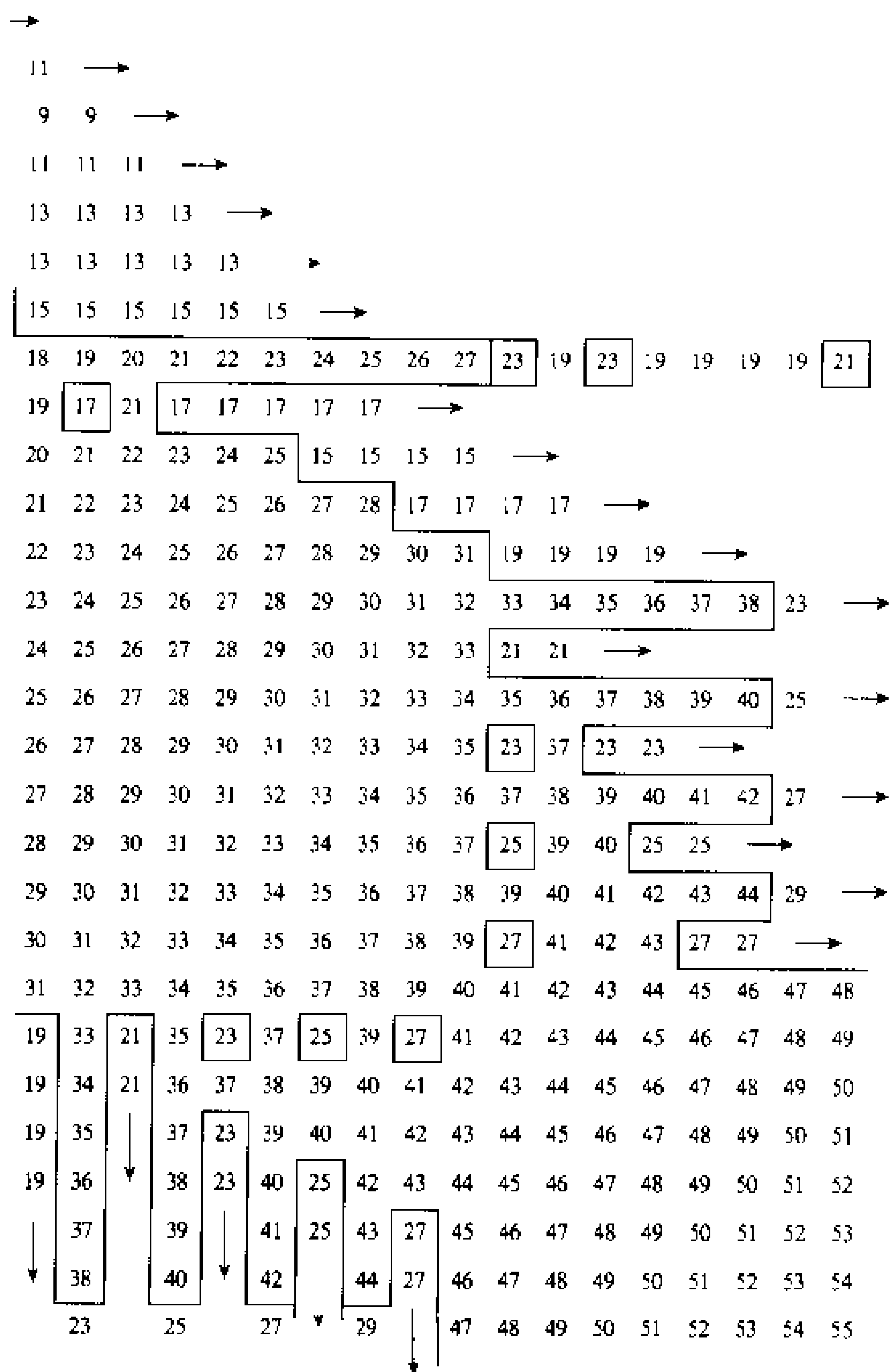


(x) $R^+$（正常游戏规则，无偏博弈）

| O | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | → | | | | | | | | | | |
| 1 | ∞ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | → | | | | | | | | | |
| 2 | ∞ | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | → | | | | | | | | |
| 3 | ∞ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | 5 | 5 | → | | | | | | |
| 4 | ∞ | 1 | 4 | 5 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | → | | | | | |
| 5 | ∞ | 1 | 3 | 6 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | → | | |
| 6 | ↓ | 1 | 3 | 7 | 5 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 9 | 9 | 9 | — |
| 7 | | ↓ | 3 | 5 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 11 | 11 |
| 8 | | | ↓ | 5 | 5 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 13 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 9 | | | | 5 | 5 | 7 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 10 | | | | ↓ | 5 | 7 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 13 | 13 |
| 11 | | | | | ↓ | 7 | 12 | 13 | 9 | 16 | 17 | 18 | 19 | 13 | 13 | 14 | 13 |
| 12 | | | | | | 7 | 13 | 14 | 9 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 15 | 16 |
| 13 | | | | | | 7 | 9 | 15 | 9 | 11 | 19 | 13 | 21 | 22 | 23 | 24 | 17 |
| 14 | | | | | | ↓ | 9 | 16 | 9 | 11 | 20 | 13 | 22 | 23 | 24 | 17 | 18 |
| 15 | | | | | | | 9 | 11 | 9 | 11 | 13 | 14 | 15 | 24 | 17 | 18 | 19 |
| 16 | | | | | | | ↓ | 11 | 9 | 11 | 13 | 13 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 17 | | | | | | | | 11 | 9 | 11 | 13 | 13 | 15 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 18 | | | | | | | | ↓ | 9 | 11 | 13 | 13 | 15 | 19 | 17 | 21 | 22 |
| 19 | | | | | | | | | ↓ | 11 | 13 | 13 | 15 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 20 | | | | | | | | | | ↓ | 13 | 13 | 15 | 21 | 17 | 23 | 24 |
| 21 | | | | | | | | | | | ↓ | 13 | 15 | 22 | 17 | 24 | 25 |
| 22 | | | | | | | | | | | | ↓ | 15 | 23 | 17 | 25 | 26 |
| 23 | | | | | | | | | | | | | ↓ | 24 | 17 | 15 | 27 |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | 25 | 17 | 15 | 28 |
| 25 | | | | | | | | | | | | | | 26 | ↓ | 15 | 17 |
| 26 | | | | | | | | | | | | | | 27 | | 15 | 17 |
| 27 | | | | | | | | | | | | | | 23 | | ↓ | 17 |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | 19 | | | 17 |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | 23 | | | ↓ |
| 30 | | | | | | | | | | | | | | 19 | | | |
| 31 | | | | | | | | | | | | | | 19 | | | |
| 32 | | | | | | | | | | | | | | 19 | | | |
| 33 | | | | | | | | | | | | | | 19 | | | |

表 7(x). 吃诺饼游戏的

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |



无偏博弈遥远度.

## 参考文献及进一步阅读材料

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapter 14.

Martin Gardner, Mathematical games: cram, crosscram and quadraphage: new games having elusive winning strategies, Sci. Amer. **230** #2 (Feb. 1974) 106—108.

C. A. B. Smith, Graphs and composite games, J. Combin. Theory, **1** (1966) 51—81; M. R. **33** #2572.

H. Steinhaus, Definicje potrzebne do teorji gry i pościgu, Myśl Akad. Lwów, **1** #1 (1925) 13—14; reprinted as Definitions for a theory of games and pursuit, Naval Res. Logist. Quart, **7** (1960) 105—108.

# 第10章

# 热仗之后的冷战

在整个热烈的战斗中，始终恪守和平时期形成的法则，冷眼观看他以前预测的事物.
——威廉·沃兹华斯，《快乐战士的品质》

当复合博弈的游戏规则准许你在为数任意的分支博弈中采取行动时，这就是所谓的**可选复合物**；我们将称之为**并集**，如果其中含有**炽热**的分支，两位局中人自然而然地都会在其中采取行动.双方都会投入其中，尽可能维持很久.如果所有的分支博弈都是冷冰冰的，那么他们当然会在为害最小的分支中行动.所以一个众多博弈的并集，如果玩得好的话，将是它的一些炽热分支的慢联合，而紧随其后的则是剩下冷分支的通常的和博弈.

## 烫手的饼

妈妈又在做许多饼了，这次煎得很烫手.在切饼游戏中(见第2章)左兄在一只饼上直切一刀，而右妹则横切一刀.在切诸饼游戏(见第9章)中，他们必须在所有能切割的饼上都这样做.现在规则又作了一些改变，他们可以在喜欢切割的、任意一些饼上作这样的切割，但为了更加有趣起见，在每只饼切割过之后，必须将被切成两块中的一块转动一个直角，并把它放回桌面上.在附图1中右妹刚刚横切了一刀，并将两块中的一块转了

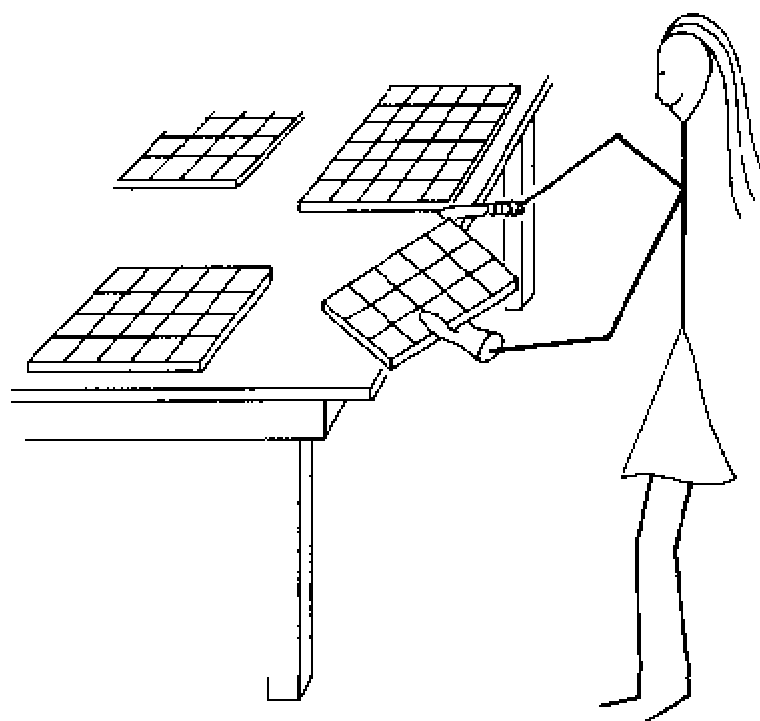


图1. 轮到右妹采取行动了.



-个直角.

## 博弈的并集

烫手饼游戏是若干个以一块饼游戏为组成部分的可选复合物,亦即并集.

一般地说,存在着这样一种复合物

$$G \vee H \vee K \vee \cdots(\text{读作“}G\text{ 或 }H\text{ 或 }K\text{ 或}\cdots\text{”})$$

其中 $G$,$H$,$K$ 等是组成它的一些分支博弈.轮到一位局中人走时,他可以选取其中若干个分支(至少要有一个分支,也可以全部都要),按游戏规则的规定,在他选中的每一个分支中采取行动.有一个局中人无法行动时,游戏即告终止,那个不能行动的局中人,按照正常游戏规则的规定,就算是输家.可选择的理论(或并集)乃是析取理论(和)与合取理论(慢联合)的一种混合物.

## 冷博弈——它们的数是静止的

某些博弈的性态很像普通的析取和,在**冷煎饼**游戏中我们允许左兄与右妹切割他们所喜欢的饼,高兴多少就切多少,但无需把它们在切割之后转上一转.这样做时,同他们在第2章中已经玩过的切饼游戏,究竟有什么区别呢?

根本不是一回事!因为那个游戏的每个值都是一个数,所以他们不必急于采取行动,现在甚至也不想去对几块饼采取切割行动.结果是每位局中人都只愿在一个分支中采取行动——那样做,对他所造成的损害最小——于是并集成了通常意义下的和.在值为数的任何其他博弈中(例如蓝-红伐木游戏)也会发生这样的事情.

## 热博弈——打仗要联合!

在一个博弈的并集里可能有几个炽热分支,局中人都想在其中采取行动,另外还有一些局中人不想插手的冷博弈.只要还有任何热博弈存在,局中人是不愿意接触冷分支的.我们将把大家都想争先恐后的、并集的这一部分称为**热仗**.由于局中人都竭其所能去采取一切炽热行动,所以这是一种较小热仗的联合;又因为最后一个热仗打完后它才结束,所以它是一种**慢**联合.

在热仗之后的是**冷战**,它仅不过是通常意义下的由相加而得出的和,由于所有的分支都是数,局中人每次只能在一个分支中采取行动.

## 代价，计时与比分

表 1 给出了烫饼游戏的左方得分与右方得分. 对 2×3 饼而言，表中给出的**左方得分**是 $1_2$，即**代价**为 1，**计时**为 2，它的意思是：若左方先走，我们将在 2 步的热仗之后达到一个冷战局势 1，若右方先走，则在 1 步的热仗后达到冷战局势 0. 这两个小仗将在图 2 中有所说明. 容易看出何时要开始冷战，因为所有的饼都变为条状时，烫饼游戏将冷却下来. 所以表 1 中所有条形饼的值都是一个数字 $x$，它可以看作是一对比分 $x_0x_0$ 的一种简写形式.

现在要问你：图 3 的命运究竟如何呢？

这里的左方得分为

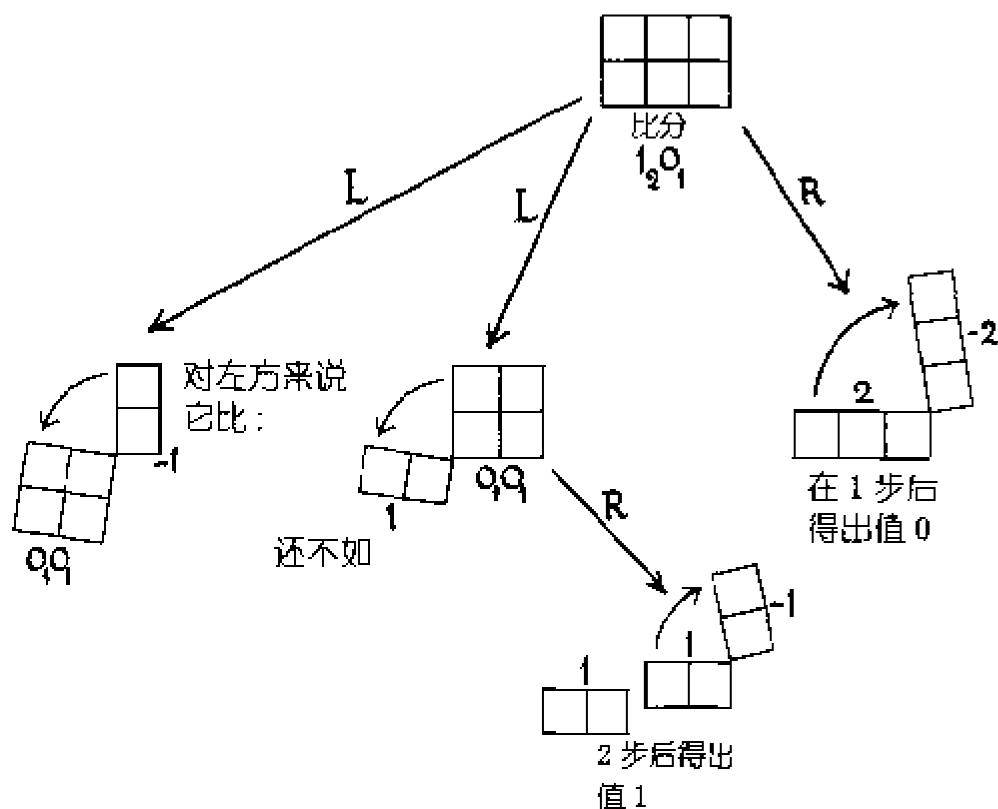



**图 2.** 一局小型烫饼游戏的战斗.

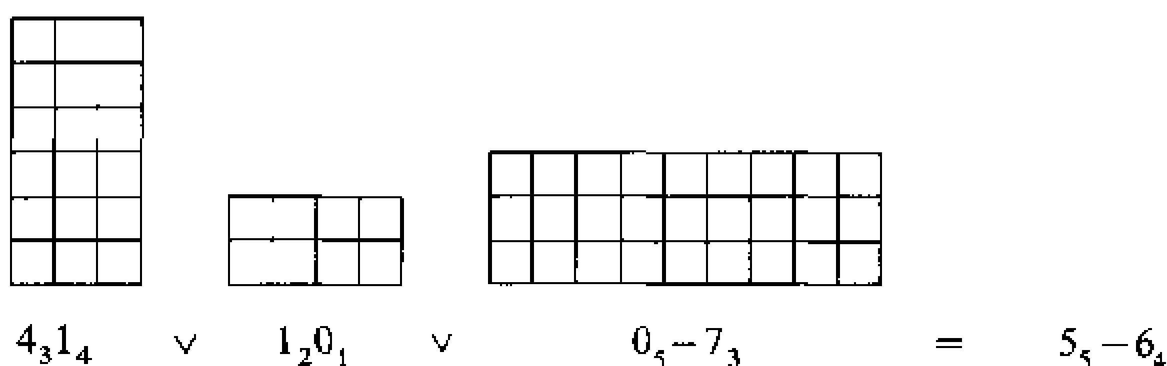



**图 3.** 一个烫饼游戏局势.



$$4_3, 1_2, 0_5$$

所以如果左方先走,则冷战开始时的值将是 $4+1+0=5$. 由于时间最长的分支战斗(从而也是整个战斗)将持续 5 步,所以局势的左方比分是 $5_5$. 右方比分是 $(1+0-7)_4=-6_4$,这是由于分支的右方比分为

$$1_4, 0_1, -7_3$$

而战斗的持续时间为 4 步之故.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | $-1$ | $0_1 0_1$ | $1_2 0_1$ | $1_2 0_1$ | $1_2 0_1$ | $1_2 0_1$ | $1_2 0_1$ | $1_2 0_1$ | $1_2 0$ |
| 3 | $-2$ | $0_1 -1_2$ | $1_3 -1_3$ | $1_4 -2_3$ | $0_4 -3_3$ | $-1_4 -4_3$ | $-1_5 -5_3$ | $0_5 -6_3$ | $0_5 -7_3$ |
| 4 | $-3$ | $0_1 -1_2$ | $2_3 -1_4$ | $2_5 -2_5$ | $1_6 -4_5$ | $-1_6 -6_5$ | $-2_7 -7_6$ | $0_7 -7_6$ | $1_8 -8_6$ |
| 5 | $-4$ | $0_1 -1_2$ | $3_3 0_4$ | $4_5 -1_6$ | $3_7 -3_7$ | $1_8 -6_7$ | $-2_8 -8_8$ | $-2_9 -7_8$ | $1_9 -7_9$ |
| 6 | $-5$ | $0_1 -1_2$ | $4_3 1_4$ | $6_5 1_6$ | $6_7 -1_8$ | $4_9 -4_9$ | $1_{10} -8_9$ | $-3_{10} -9_{10}$ | $-2_{11} -7_{10}$ |
| 7 | $-6$ | $0_1 -1_2$ | $5_3 1_5$ | $7_7 2_7$ | $8_8 2_8$ | $8_9 -1_{10}$ | $5_{11} -5_{11}$ | $1_{12} -10_{11}$ | $-4_{12} -10_{12}$ |
| 8 | 7 | $0_1 -1_2$ | $6_3 0_5$ | $7_6 0_7$ | $7_8 2_9$ | $9_{10} 3_{10}$ | $10_{11} -1_{12}$ | $6_{13} -6_{13}$ | $1_{14} -12_{13}$ |
| 9 | $-8$ | $0 -1_2$ | $7_3 0_5$ | $8_7 -1_8$ | $7_9 -1_9$ | $7_{10} 2_{11}$ | $10_{12} 4_{12}$ | $12_{13} -1_{14}$ | $7_{15} -7_{15}$ |
| 10 | $-9$ | $0 -1_2$ | $8_3 0_6$ | $9_7 -1_8$ | $8_9 -2_9$ | $7_{10} -2_{11}$ | $7_{12} 2_{13}$ | $11_{14} 4_{11}$ | $13_{12} -1_{16}$ |
| 11 | $-10$ | $0_1 -1_2$ | $9_3 1_6$ | $11_7 0_8$ | $10_9 -2_{11}$ | $8_{13} -4_{11}$ | $6_{12} -3_{13}$ | $7_{14} 2_{15}$ | $12_{16} 4_{13}$ |
| 12 | $-11$ | $0 -1_2$ | $10_3 1_7$ | $12_8 2_9$ | $13_{10} -1_{10}$ | $10_{11} -4_{11}$ | $7_{12} -5_{13}$ | $6_{14} -3_{12}$ | $8_{13} 2_{17}$ |
| 13 | $-12$ | $0_1 -1_2$ | $11_3 0_7$ | $12_8 1_9$ | $13_{10} 1_{10}$ | $13_{11} -3_{12}$ | $9_{13} -6_{13}$ | $6_{14} -4_{12}$ | $8_{13} -3_{11}$ |
| 14 | $-13$ | $0_1 -1_2$ | $12_3 0_7$ | $13_8 -1_{10}$ | $12_{11} 2_{11}$ | $15_{12} -1_{12}$ | $12_{13} -6_{13}$ | $7_{14} -4_{12}$ | $9_{13} -4_{14}$ |
| 15 | $-14$ | $0_1 -1_2$ | $13_3 0_8$ | $14_8 -1_{10}$ | $13_{11} 0_{11}$ | $14_{12} 2_{12}$ | $16_{13} -4_{11}$ | $10_{15} -6_{12}$ | $8_{13} -3_{14}$ |
| 16 | $-15$ | $0_1 -1_2$ | $14_3 1_8$ | $16_9 0_{13}$ | $15_{11} -1_{11}$ | $14_{12} 2_{13}$ | $17_{11} -1_{14}$ | $14_{15} -7_{12}$ | $8_{13} -3_{14}$ |
| 17 | $-16$ | $0_1 -1_2$ | $15_3 1_9$ | $17_{10} 1_{10}$ | $17_{11} -2_{12}$ | $14_{13} -1_{13}$ | $15_{14} 3_{15}$ | $19_{15} -5_{16}$ | $11_{17} -6_{11}$ |
| 18 | $-17$ | $0_1 -1_2$ | $16_3 0_9$ | $17_{10} 1_{11}$ | $18_{12} -1_{12}$ | $16_{13} -3_{13}$ | $14_{14} 2_{15}$ | $19_{16} -1_{16}$ | $16_{17} -8_{11}$ |
| 19 | $-18$ | $0_1 -1_2$ | $17_3 0_9$ | $18_{10} 0_{11}$ | $18_{12} 1_{12}$ | $19_{13} -3_{13}$ | $15_{14} -2_{15}$ | $16_{16} 1_{13}$ | $19_{14} -6_{18}$ |
| 20 | $-19$ | $0_1 -1_2$ | $18_3 0_{10}$ | $19_{11} 0_{11}$ | $19_{13} 2_{13}$ | $21_{14} -3_{15}$ | $16_{15} -4_{15}$ | $15_{16} 1_{13}$ | $20_{14} -1_{17}$ |
| 21 | $-20$ | $0_1 -1_2$ | $19_3 1_{10}$ | $21_{11} 0_{12}$ | $20_{13} 0_{13}$ | $20_{15} -1_{15}$ | $19_{15} -5_{15}$ | $15_{16} 0_{14}$ | $20_{15} 0_{15}$ |
| 22 | $-21$ | $0_1 -1_2$ | $20_3 1_{11}$ | $22_{12} 1_{12}$ | $22_{13} -1_{13}$ | $20_{11} 2_{11}$ | $23_{15} -5_{15}$ | $16_{16} -1_{14}$ | $20_{15} -1_{15}$ |
| 23 | $-22$ | $0_1 -1_2$ | $21_3 0_{11}$ | $22_{12} 1_{13}$ | $23_{14} -2_{14}$ | $20_{15} 2_{15}$ | $24_{16} -4_{16}$ | $18_{17} -1_{17}$ | $21_{18} -1_{17}$ |
| 24 | $-23$ | $0_1 -1_2$ | $22_3 0_{11}$ | $23_{12} 0_{13}$ | $23_{14} -1_{14}$ | $22_{15} -1_{17}$ | $22_{16} -1_{16}$ | $22_{17} -3_{14}$ | $20_{15} 0_{16}$ |
| 25 | $-24$ | $0_1 -1_2$ | $23_3 0_{12}$ | $24_{13} 0_{13}$ | $24_{11} 1_{11}$ | $25_{15} -3_{15}$ | $21_{16} 2_{16}$ | $26_{17} -4_{14}$ | $20_{15} 1_{16}$ |

**表** 1. 烫饼游戏的左方与右方得分.

对比分为

$$u_a x_i, v_b y_j, w_c z_k, \cdots$$

的一些局势的并集，在计算左方和右方得分时，我们可以把代价（它表明冷战的一个**最终和数***）相加起来，然后取**最大**的计时（它表明热仗的**慢联合**），以得出

$$(u+v+w+\cdots)_{\max(a,b,c,\cdots)}(x+y+z+\cdots)_{\max(i,j,k,\cdots)}$$

> 代价要取总和！
> 计时要取最大的！

## 最佳选择是哪一个？

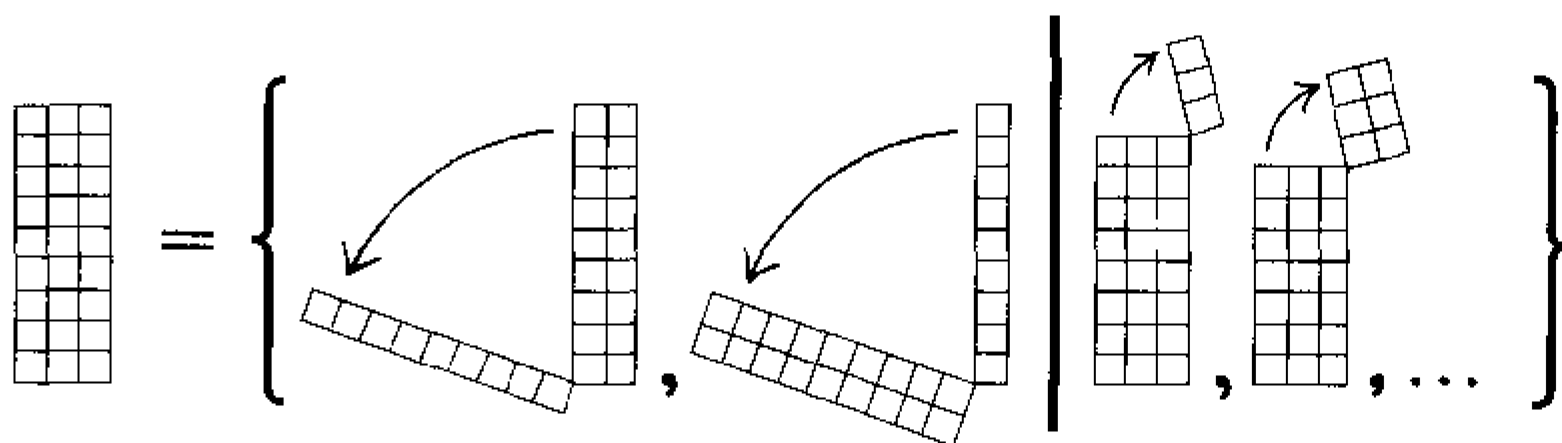
由于左方走过以后就会轮到右方走，所以左方只要考虑他的走法选择中的右方得分，并列出一张具有最大代价的、经过缩短后的候选对象表格以供最后选择之用．而右方的缩短表格则是他的选择中，左方得分具有最小代价者．两位局中人现在都应采用第 9 章中讲到的正常悬数法则，以便从他们的缩短表格中挑出最优选择．第 9 章所教的办法是：如有可能，应该取最大的偶数计时，否则就取最小的奇数计时．

> 将具有最大右方代价的一切 $G^L$ 同具有最小左方代价的一切 $G^R$ 列入简化表格以供最后挑选并在左右两边的相应计时中，挑出最大的偶数，否则就取最小的奇数．

**确定最佳选择的方略**

尚待进行解释的是怎样从其选择中求出任一局势的得分．在此之前我们将首先利用我们已经知晓的，求出 9×3 饼的最佳选择策略，按照烫饼的游戏规则，该博弈的各种不同选择如下图所示：

* 译者注：本章出现的“toll”一词，在英语中有许多解释，最常见的是通行费，通过税（俗称“买路钱”），此外尚有重大代价，牺牲，伤亡人数及鸣钟，钟声，打更声……等．从中选择合适的意义极为困难．幸而作者自己在这里用冷战作比喻进行了阐释．通俗言之，大体就是一场战争的伤亡总数．故而权衡再三，译为“代价”，望高明有以教之．



或者用符号表示时，

$$
9\times 3=\left\{\begin{array}{l|l}
 & 8\times 3\vee 3\times 1 \\
 & 7\times 3\vee 3\times 2 \\
 & 6\times 3\vee 3\times 3 \\
1\times 9\vee 9\times 2 & 5\times 3\vee 3\times 4 \\
2\times 9\vee 9\times 1 & 4\times 3\vee 3\times 5 \\
 & 3\times 3\vee 3\times 6 \\
 & 2\times 3\vee 3\times 7 \\
 & 1\times 3\vee 3\times 8
\end{array}\right.
$$

其得分为

$$
\left\{\begin{array}{llll|llll}
 & & & & 6_3 0_5 & \vee & -2 & -\mathbf{4_3}-2_5 \\
 & & & & 5_3 1_5 & \vee & 0_1-1_2 & =\mathbf{5_3}0_5 \\
 & & & & 4_3 1_1 & \vee & 1_3-1_3 & =\mathbf{5_3}0_4 \\
 & & & & 3_3 0_4 & \vee & 1_4-2_2 & =\mathbf{4_4}-2_4 \\
8 & \vee\, 0_1-1_2 & =8_1\ \overset{\downarrow}{\mathbf{7_2}} & & 2_3-1_1 & \vee & 0_1-3_3 & =\mathbf{2_4}-4_1 \\
1_2 0_1 & \vee -8 & =-7_2-\mathbf{8_1} & & 1_3-1_3 & \vee & 1_1-4_3 & =\mathbf{0_4}-5_3 \leftarrow \\
 & & & & 1_2 0_1 & \vee & -1_5-5_3 & =\mathbf{0_5}-5_3 \\
 & & & & 2 & \vee & 0_5-6_3 & =\mathbf{2_5}-4_3
\end{array}\right.
$$

当然，由于左方只参考右方得分，右方只注意左方得分，粗体字是我们所需要的一切。从它们那里左方只需要把 $7_2$ 挑出来，而右方只需要挑出 $0_4$ 与 $0_5$，从中再选取 $0_4$。何以如此呢？若右方采用走到 $0_5$ 的这一步，则战斗还得再走 5 步，即

左，右，左，右，左，

而右方将被逼在冷战中先走。所以她宁愿走到 $0_4$，此时将要继续走 4 步，即

左，右，左，右，

在此之后左方必须在冷战中走出第一步.于是我们最终下结论，局中人的最佳选择，其比分将由下式来显示

$$\{\cdots 7_2 | 0_1 \cdots\}.$$

## 热的局势

在我们知道了最佳选择以后，我们将怎样求出新的比分呢？对所举例题而言，这是没有困难的.由于 $7>0$，这个局势仍是热的，战斗尚未过去.实际上我们确能看到它还可以持续多久：若左方先走则还有2步战斗行动，而若右方先走，则还将有4步战斗行动紧随其后.总之，在上述两种情况下，热仗还将持续3或5步，而比分将是

$$7_3 0_5.$$

在已找到最佳选择的任一游戏中，关于热局势的同样论证也是起作用的.

| |
|---|
| 对一局势 $\{\cdots x_a | y_b \cdots\}$ 而言，如果 $x>y$，则比分为 $x_{a+1} y_{b+1}$ |

**热局势的比分法则**

## 冷的局势

但若 $x<y$，则局势必是冷的，值肯定是一个数.这是一个什么样的数呢？我们将用简单性原理的一种变相形式把它求出来.我们将要讨论下面的情形，其时左方选择的右得分将是 $\frac{1}{2}_7$ 或 $\frac{1}{2}_8$，而右方选择的左得分将是 $1_3$ 或 $1_4$.

由于7是奇数而8是偶数，

$$\frac{1}{2}_8 \text{对左方来说要比} \frac{1}{2} \text{来得好}\left(\text{即} \frac{1}{2}_8 > \frac{1}{2}\right),$$

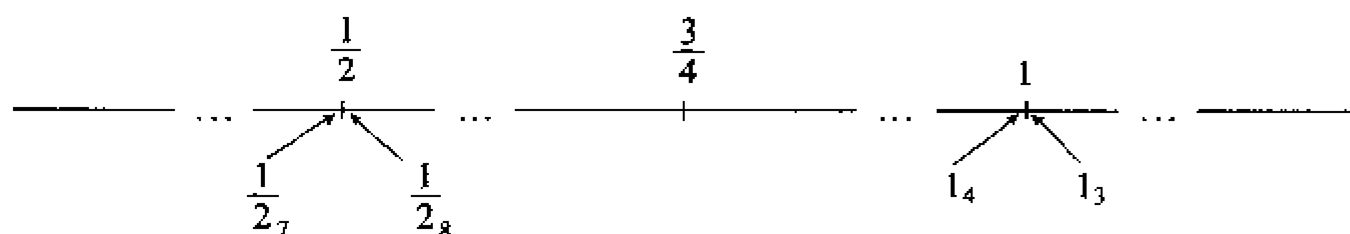
$$\text{而} \frac{1}{2}_7 \text{对左方来说要比} \frac{1}{2} \text{坏}\left(\text{即} \frac{1}{2}_7 < \frac{1}{2}\right).$$

根据同样的理由，

$1_1$ 对右方来说要比 1 好(即 $1_1<1$),

而 $1_3$ 对右方来说要比 1 坏(即 $1_3>1$).

「我们当能回想得起,"大于"意味着"对左方来说要好些","对右方来说要更坏些".」我们现在能从下列图形




中看出,适当范围内的最简数是

$$\frac{3}{4}, \text{对}\left\{\cdots\frac{1}{2}_8 \middle| 1_1\cdots\right\}\text{而言},$$

$$1, \text{对}\left\{\cdots\frac{1}{2}_7 \middle| 1_3\cdots\right\}\text{而言},$$

$$1, \text{对}\left\{\cdots\frac{1}{2}_8 \middle| 1_3\cdots\right\}\text{而言},$$

$$\text{以及 }\frac{1}{2}, \text{对}\left\{\cdots\frac{1}{2}_7 \middle| 1_4\cdots\right\}\text{而言}.$$

一般说来,对冷局势而言:

> 对于局势 $\{\cdots x_a \mid y_b\cdots\}$,其中 $x<y$,比分为 $z_0z_0$,此处 $z$ 为下述区间中的最简数:
>
> $a,b$ 同为偶数时,$x<z<y$;
>
> $a,b$ 同为奇数时,$x\leqslant z\leqslant y$;
>
> $a$ 为偶数,$b$ 为奇数时,$x<z\leqslant y$;
>
> $a$ 为奇数,$b$ 为偶数时,$x\leqslant z<y$.

**冷局势的比分规则**

简要地说:

> 作为最简数的候补者,计时为奇数时,可接受它们的代价;计时为偶数时,要排除它们的代价.

还可以说得更简单些：

> 奇数，接纳！
> 偶数，逐出！

当然，这种局势，由于是冷的，实际上其值是一些数，而数 $z$ 的比分为 $z_0z_0$，因为它已经在冷战之中.

## 不冷不热的局势

当左、右方的选择具有同样的代价时，规则将更为微妙：

> 对一局势 $\{\cdots x_a | x_b \cdots\}$ 若代价相等，则比分为：
> $x_{a+1}x_{b+1}$，若 $a$，$b$ 都是偶数时；
> $x_0x_0$，若 $a$，$b$ 都是奇数时；
> $x_{\max(a+1,b-2)}x_{b+1}$，若 $a$ 为偶数而 $b$ 为奇数时；
> $x_{a+1}x_{\max(b+1,a-2)}$，若 $a$ 为奇数而 $b$ 为偶数时.

**不冷不热局势的比分规则**

实际操作时较为容易的是先来看一看待试的比分

$$x_{a+1}y_{b+1}$$

是否服从温吞水戒律：

> 若代价相等，那么你不应当允许一个偶数的计时，除非存在着一个更大的奇数.

然后，不守戒律的比分有两种类型，它们应按如下办法予以修正：

若计时 $a+1$、$b+1$ 都是偶数，则确切值应是比分为 $x_0x_0$ 的 $x$.

若 $a+1$，$b+1$ 中有一个是偶数 $e$，而另一个是较小的奇数，则此奇数应增大到 $e+1$.

由于我们已经知道冷战将开始的值 $x$，以上这些令人相当迷惑的规则必须只能通过战斗来加以解释. 重要的问题是：谁必须启动它？ 为了决定他何时进入战斗，博学的局中人当然要听从

第 9 章中有关箴言的指导：

> 好处越多越好！（奇数）
> 坏处越少越好！（偶数）

下面让我们研究四个简单例子，以便看一看上述箴言怎样导致所述规则.

对四个例题中所涉及之战斗

$\{\cdots x_8|x_4\cdots\}$　　$\{\cdots x_7|x_3\cdots\}$　　$\{\cdots x_8|x_3\cdots\}$　　$\{\cdots x_7|x_4\cdots\}$

右方看到，如果他先走，将会导致

胜　　败　　短暂失利　　短暂取胜

如果他开始时让左方先走，则将导致

败　　胜　　较长的失利　　较长的取胜

于是他决定

先走第一步　　不先走第一步　　先走第一步　　不走第一步

左方如果先走，将能

保证取胜　　肯定失利　　长时间取胜　　一定时间的失利

而如果他让右方先走（他可以应答，也可以不应答），则

可能失利　　可能取胜　　短暂取胜　　无限长的失利

于是他宁可决定

先走　　不先走　　先走　　先走

由此而得出的比分为

$x_9.x_5$　　$x_0.x_0$　　$x_9.x_4$　　$x_8.x_9$

这是因为博弈是

热的　　冷的　　（相当热）　　既热又冷！

更详尽的解释：

第一个例子$\{\cdots x_8|x_4\cdots\}$具有**潜热**，这是由于$x_8>x>x_4$，所以像通常一样，最后的计时由添加 1 而得出.

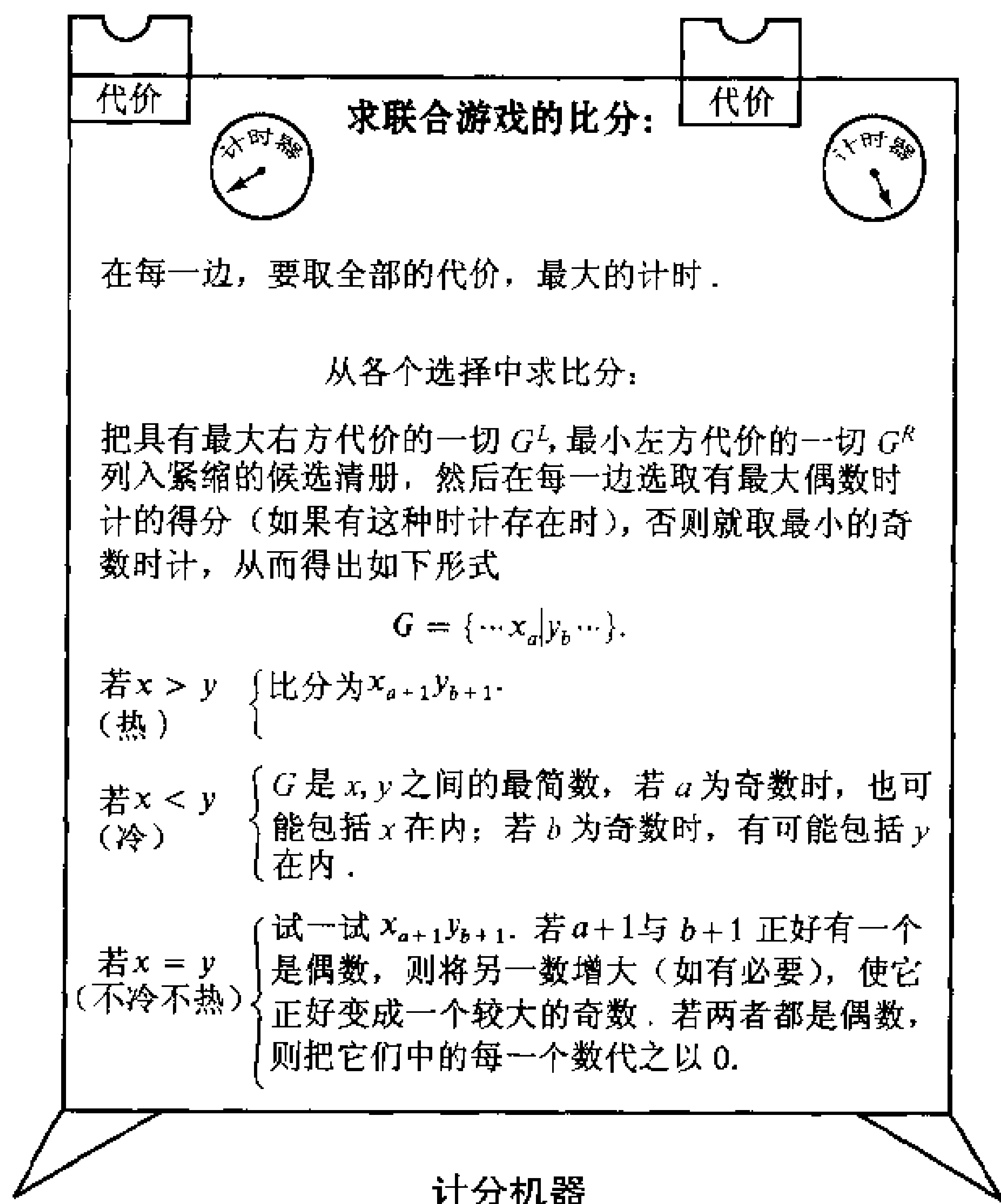
第二个例子$\{\cdots x_7|x_3\cdots\}$正好是**潜冷**，因为$x_7<x<x_3$，而我们可由简单性法则得出数$x$.

在第三个例子$\{\cdots x_8|x_3\cdots\}$中，热量是潜在的. 尽管左方肯定能赢，双方都想要走：右方要取害处最小的，而左方要保证他能取得更大好处. 计时则仍由加 1 得出.

最后的例子$\{\cdots x_7|x_1\cdots\}$最为微妙！肯定能在战斗中取胜的右方，他在世上有的是时间，如果长时间无人染指这个游戏他是会感到十分高兴的，因为这将是结束战争的最后一仗．由此可见，左方只要能走动，他是越早越好．如果他要走，他将走到 $x_7$，而战斗将一共持续 8 步．但如果轮到右方先走，而战斗正在到处蔓延的话，他将不在这个分支中采取行动；而在左方再走时，这个战役将还要有 8 步，于是算起来总共有 9 步，从而比分为 $x_8x_9$.

## 计分法则一览无遗

现在我们可以给出计算比分的全部规则了：




计分机器

# 一种不冷不热的游戏

**凉饼**是另一种吃饼游戏．它是我们在第 9 章中遇到过的吃饼游戏的一种变化形式，具有可选择性．在横切下来的许多饼中，右妹可以随她的意愿，吃掉一块水平横条．与此类似，左兄可以吃掉一块直的纵条．表 2 给出了双方的比分．可以证明，图中所显示的模式将能继续延伸下去．

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | $C_1 0_1$ | $0_2 0_3$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | $C_3 0_2$ | $0_3 0_3$ | | | $0_4 0_5$ | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0 | | | | | | | | | | | $0_5 0_7$ | | | | | | |
| 5 | 0 | | $0_5 0_4$ | | | $0_5 0_5$ | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | $0_9 0_.$ |
| 8 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 0 | | | | $0_7 0_6$ | | | | | | | $0_7 0_7$ | | | | | | |
| 12 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | $0_. 0_.$ |
| 18 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 0 | | | | | | | | $0_9 0_8$ | | | | | | | | | |

**表 2.** 凉饼游戏的比分．

为什么 [□□□] 的比分是 $0_2 0_3$？我们有

$$\square\square\square = \{ ▨\square\square, \square▧\square \mid ▧▧▧ \}$$

$$0_1 0_1 \vee 0_1 0_1$$

$$0_2 0_3 = \{0_2 \mathbf{0_3},\ 0_1 \mathbf{0_1} \mid \mathbf{0_0} 0_0\}.$$

从右方的比分 $0_3$ 与 $0_1$ 中，左方将选出他的最好选择 $0_1$，然而右方只能看到唯一的左方比分 $0_0$，于是我们可以试一下待定的比分

$$\{\cdots 0_1, 0_0 \cdots\} = 0_2 0_1?$$

然而，为了避免触犯温吞水戒律，以上这些必须改为：

$$\{\cdots 0_1 \mid 0_0 \cdots\} = 0_2 0_3!$$

## 挑选男、女孩子

在第5章末尾，左方与右方组织孩子们赴宴，为了算出复杂的数值而花费大量时间，闹得孩子们饥肠辘辘，大吵大闹起来，现在要把原来的办法略加更改，男、女孩子们需经慎重挑选，而在一次行动中就可同时安排好几位就座．左方可以安排任意数目的新到男孩，而右方可安排任意数目的新来女孩，但必须假定，在每一次行动中，任意两个新来者之间必定要有一个以前已经就座的孩子．当然，同以前一样，男孩同女孩不能坐在相邻的位置上．

算出来的值是很有魅力的(见表3)．我们可以从以下的方程中把它们求出来(很像第5章中所讲过的安排男、女孩子就座问题，析取形式)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{L}n\mathrm{L} &= \{\mathrm{L}a\mathrm{L} \vee \mathrm{L}b\mathrm{L} \mid \mathrm{L}a\mathrm{R} \vee \mathrm{R}b\mathrm{L}\} \\ (-\mathrm{L}n\mathrm{L} =)\ \mathrm{R}n\mathrm{R} &= \{\mathrm{R}a\mathrm{L} \vee \mathrm{L}b\mathrm{R} \mid \mathrm{R}a\mathrm{R} \vee \mathrm{R}b\mathrm{R}\} \\ (\mathrm{R}n\mathrm{L} =)\ \mathrm{L}n\mathrm{R} &= \{\mathrm{L}a\mathrm{L} \vee \mathrm{L}b\mathrm{R} \mid \mathrm{L}a\mathrm{R} \vee \mathrm{R}b\mathrm{R}\} \end{aligned}\right\} a+b=n-1$$

L0R 与 R0L 是不允许的．

在前两排显示了一些例外情况外，表3的比分向我们揭示了周期为5，计时以三种不同的速度在增大，我们已在表中用分隔的横条加以表示：有的是每一行一个周期(a)，有的是每二行一个周期(b)，剩下来的则是行数逐次增加1，周期越来越长(c)．所以，尽管已经有了最新预防措施，左、右双方肯定会由于飘忽无定的周期长度而面对一场热烈的恶战！

**LnL**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 to 4: | 0 | | 1 | | 2 | | $2_1$ | $0_1$ | $3_1$ | $0_2$ |
| 5 to 9: | $4_1$ | $0_2$ | $2_2$ | $1_2$ | $2_3$ | $2_3$ | $2_3$ | $1_3$ | $3_3$ | $0_4$ |
| 10 to 14: | $4_4$ | $0_4$ | $3_4$ | $1_4$ | $2_5$ | $2_5$ | $2_5$ | $1_5$ | $3_5$ | $0_6$ |
| 15 to 19: | $4_4$ | $0_4$ | $3_4$ | $1_4$ | $2_7$ | $2_7$ | $2_5$ | $1_5$ | $3_5$ | $0_8$ |
| 20 to 24: | $4_6$ | $0_6$ | $3_6$ | $1_6$ | $2_9$ | $2_9$ | $2_7$ | $1_7$ | $3_7$ | $0_{10}$ |
| 25 to 29: | $4_6$ | $0_6$ | $3_6$ | $1_6$ | $2_{11}$ | $2_{11}$ | $2_7$ | $1_7$ | $3_7$ | $0_{12}$ |
| 30 to 34: | $4_8$ | $0_8$ | $3_6$ | $1_6$ | $2_{13}$ | $2_{13}$ | $2_9$ | $1_7$ | $3_7$ | $0_{14}$ |
| 35 to 39: | $4_8$ | $0_8$ | $3_8$ | $1_8$ | $2_{15}$ | $2_{15}$ | $2_9$ | $1_9$ | $3_9$ | $0_{16}$ |
| 40 to 44: | $4_{10}$ | $0_{10}$ | $3_8$ | $1_8$ | $2_{17}$ | $2_{17}$ | $2_{11}$ | $1_9$ | $3_9$ | $0_{18}$ |
| 45 to 49: | $4_{10}$ | $0_{10}$ | $3_8$ | $1_8$ | $2_{19}$ | $2_{19}$ | $2_{11}$ | $1_9$ | $3_9$ | $0_{20}$ |
| 50 to 54: | $4_{12}$ | $0_{12}$ | $3_8$ | $1_8$ | $2_{21}$ | $2_{21}$ | $2_{13}$ | $1_9$ | $3_9$ | $0_{22}$ |
| ........ | ........ | | ........ | | ........ | | ........ | | ........ | |
| $5k$ to $5k+4$: | $4_b$ | $0_b$ | $3_c$ | $1_c$ | $2_a$ | $2_a$ | $2_{b+1}$ | $1_{c+1}$ | $3_{c+1}$ | $0_{a+1}$ |

**LnR**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 to 4: | 不合法 | | 0 | | $0_1$ | $0_1$ | $1_1$ | $-1_1$ | $2_1$ | $-2_1$ |
| 5 to 9: | $2_2$ | $-2_2$ | $1_2$ | $-1_2$ | $0_3$ | $0_3$ | $1_3$ | $-1_3$ | $2_4$ | $-2_4$ |
| 10 to 14: | $2_4$ | $-2_4$ | $1_4$ | $-1_4$ | $0_5$ | $0_5$ | $1_5$ | $-1_5$ | $2_6$ | $-2_6$ |
| 15 to 19: | $2_4$ | $-2_4$ | $1_4$ | $-1_4$ | $0_7$ | $0_7$ | $1_5$ | $-1_5$ | $2_8$ | $-2_8$ |
| 20 to 24: | $2_6$ | $-2_6$ | $1_6$ | $-1_6$ | $0_9$ | $0_9$ | $1_7$ | $-1_7$ | $2_{10}$ | $-2_{10}$ |
| 25 to 29: | $2_6$ | $-2_6$ | $1_6$ | $-1_6$ | $0_{11}$ | $0_{11}$ | $1_7$ | $-1_7$ | $2_{12}$ | $-2_{12}$ |
| 30 to 34: | $2_8$ | $-2_8$ | $1_6$ | $-1_6$ | $0_{13}$ | $0_{13}$ | $1_7$ | $-1_7$ | $2_{14}$ | $-2_{14}$ |
| 35 to 39: | $2_8$ | $-2_8$ | $1_8$ | $-1_8$ | $0_{15}$ | $0_{15}$ | $1_9$ | $-1_9$ | $2_{16}$ | $-2_{16}$ |
| 40 to 44: | $2_{10}$ | $-2_{10}$ | $1_8$ | $-1_8$ | $0_{17}$ | $0_{17}$ | $1_9$ | $-1_9$ | $2_{18}$ | $-2_{18}$ |
| 45 to 49: | $2_{10}$ | $-2_{10}$ | $1_8$ | $-1_8$ | $0_{19}$ | $0_{19}$ | $1_9$ | $-1_9$ | $2_{20}$ | $-2_{20}$ |
| 50 to 54: | $2_{12}$ | $-2_{12}$ | $1_8$ | $-1_8$ | $0_{21}$ | $0_{21}$ | $1_9$ | $-1_9$ | $2_{22}$ | $-2_{22}$ |
| ........ | ........ | | ........ | | ........ | | ........ | | ........ | |
| $5k$ to $5k+4$: | $2_b$ | $-2_b$ | $1_c$ | $-1_c$ | $0_a$ | $0_a$ | $1_{c+1}$ | $-1_{c+1}$ | $2_{a+1}$ | $-2_{a+1}$ |

$a = 2k+1,\ b = 2\lfloor k/2 \rfloor + 2,\ c = 2\lfloor \sqrt{2k-1} + \frac{1}{2} \rfloor.$

**表 3.** 挑选男、女孩游戏的比分.

## 格隆第夫人的游戏

当你玩弄第4章中所讲的格隆第游戏时(走法是要将一堆东西分割成较小的两堆,但大小必须不一样),你将被最后留下来的,全是不能再分的大小为1与2的各堆感到头痛与懊恼.出于好心的格隆第夫人游戏则对游戏规则作了一些修改:同意左方可以拿走只有一样东西的孤立堆,而右方则可以拿走有着两样东西的孤立堆,这些动作是作为附加行动而加进去的.另外,为了加速游戏的进行,局中人可以随他们的高兴,有多少堆就走多少步.除此之外,游戏还有一种变化形式,局中人可以把含有4件东西或更多东西的偶数堆分成相等的部分.在$n$递增时,相继的比分如下:

$n$=1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12

格隆第夫人的游戏　$1$　$-1$　$0_1 0_1$　$1\ 2_1\ -1_2$　$0_3 0_1$　$1\ 2_1\ -1_4$　$0_5 0_1$　$1\ 2\ -1_6$　$0_7 0_1$

变化形式　$1$　$-1$　$0_1 0_1$　$1_2\ -2_1 -1$　$0_1 0_3$　$1_1\ -2_1 -1$　$0_1 0_5$　$1_6\ -2_1 -1$　$0_1 0_7$

在每种情况下,比分都有着周期3,而除1之外的计时则在稳定地递增.图中的箭头则显示了一种奇妙的吻合:变化形式中的双方比分是将原来的比分乘以−1而得.

## 怎样来玩有偏博弈的反常结合游戏

对此,我们心中无底,讲不出什么道道来.

## 紧急的结合(木已成舟式婚姻?*)

由若干博弈结合起来的游戏可以再添加一条游戏规则:它的第一个分支博弈结束时整个游戏就算结束.此时不论游戏规则是正常还是反常,该分支的赢家即是整个游戏的赢家.所谓一个分支的结束,其意思是指轮到他走的局中人已经无法再走,或者是没有一方能走(但如果我们采用后一种规定的话,一个未结束的游戏中,在任何分支中都无法行动的局中人仍将认为是输家).

由一系列博弈$G,H,K,\cdots$结合而成的此种复合物称为它们的紧急结合

$$G\triangledown H\triangledown K\triangledown\cdots(读作“G紧结H紧结K\cdots”).$$

---

* 译者注:为怀孕所逼迫的结婚,俗称“六只眼睛拜堂”.

德怀特·杜富斯(Dwight Duffus)把它称为割断选择复合物(史密斯与 ONAG 书中则称为缩短选择物),在我们把它与普通的并集作对比时,我们往往将后者称为行动缓慢的结合,紧急结合的理论(不论游戏规则是正常还是反常)以及它们的结束规则(不论哪一种)都来自下述的一般理论.

## 先决者——粗暴践踏者与自取灭亡者

在这一理论中,分支博弈中有着一些特殊行动,其特殊性在于:一旦一位局中人采取了这类行动之一,就将立即结束整个博弈.这些命中注定,生死攸关的行动有两类,粗暴践踏型的以及自取灭亡型的.走出粗暴践踏动作的局中人立即一举获胜,而走出自取灭亡动作的局中人马上完蛋.但是,当轮到一个局中人走时,若他不能动作,而没有什么先决行动作出过,他还是认定为输家.

这类游戏包括了已经如上定义的紧急结合,在正常情况下作出一切践踏性的行动而在反常情况下作出一切自杀性行动.但是它当然也应覆盖那些一部分行动是践踏性、一部分是自杀性,以及两者都不是的行动.

## 法拉达

"在国王的马匹中,第一匹马出局时算赢",这种博弈很有玩头,十分有趣.由于它是一种割断选择的马匹游戏,我们将在下文中简称为**法拉达**.在作家格林的童话故事里*,法拉达就是那匹怪异的马,它的被人斩下来的头竟会同那天正在思考究竟应采取什么行动的大鹅姑娘打招呼.我们可以在四分之一无限长棋盘上玩这种游戏,马的走法同第 9 章中讲过的一样,但应补充说明,局中人在轮到他走时,可以随心所欲地移动任何匹数的马(至少一匹马,也可以全部都走),准许将马跳出棋盘外面,谁第一个做到者就是赢家.这种游戏显然就是各个单马分支博弈的并集,而在正常游戏规则下,是一种紧急结合,因为最快结束一个分支战斗的赢家就是整个游戏的获胜者.

这种游戏也可通过比分法来解决,但此时的比分却不限于通常的数,有时可以是无穷大.

表 4 给出了此游戏的**无限比分**.若有一个位置,其中左方的某一选择已是一个粗暴践踏型

---

* 译者注:格林(Grimm)(1786—1859),德国著名童话作家.但是在我国各家出版社所刊行的格林童话选集里,有的书中并未收入法拉达的故事.可是"文革"前倒是出过连环图画.

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m | n | o | p | q | r | s | t | u | v | w | x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ${}_1\infty_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\infty_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\infty_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ |
| 2 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\overline{\infty}_2\overline{\infty}_1$ | $\infty_3\overline{\infty}_1$ | $0_1\overline{\infty}_1$ | $0_1\overline{\infty}_1$ | $1_1\overline{\infty}_1$ | $0_1\overline{\infty}_1$ | $1_1\overline{\infty}_1$ | $1_1\overline{\infty}_1$ | $1_1\overline{\infty}_1$ | $2_1\overline{\infty}_1$ | $1_1\infty_1$ | $2_1\overline{\infty}_1$ | $2_1\overline{\infty}_1$ | $2_1\overline{\infty}_1$ | $3_1\overline{\infty}_1$ | $2_1\overline{\infty}_1$ | $3_1\overline{\infty}_1$ | $3_1\overline{\infty}_1$ | $3_1\overline{\infty}_1$ | $4_1\overline{\infty}_1$ | $3_1\overline{\infty}_1$ | $4_1\overline{\infty}_1$ |
| 3 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | 0 | $\infty_3\overline{\infty}_3$ | $0_30_2$ | $0_30_2$ | $1_10_2$ | 1 | $1_10_2$ | $1_31_2$ | $1_11_2$ | $2_11_2$ | 2 | $2_11_2$ | $2_32_2$ | $2_32_2$ | $3_12_2$ | 3 | $3_12_2$ | $3_33_2$ | $3_33_2$ | $4_13_2$ | 4 | $4_13_2$ |
| 5 | $\infty_1\infty_1$ | $\infty_10_1$ | −1 | $0_20_1$ | $0_10_1$ | 0 | $0_30_1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1_11_1$ | 1 | $1_31_1$ | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{2}$ | $2_12_1$ | 2 | $2_32_1$ | $2\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ | $3_13_1$ | 3 | $3_33_1$ | $3\frac{1}{2}$ | $3\frac{1}{2}$ |
| 6 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_10_1$ | 0 | $0_20_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 |
| 7 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-1_1$ | −1 | $0_2-1_1$ | $0_10_3$ | 0 | $0_10_1$ | $0_30_4$ | $\frac{1}{4}$ | $1_1\frac{1}{2}_1$ | 1 | $1_11_1$ | $1_51_4$ | $1\frac{1}{4}$ | $2_11\frac{1}{2}_1$ | 2 | $2_12_1$ | $2_22_4$ | $2\frac{1}{4}$ | $3_12\frac{1}{2}_1$ | 3 | $3_13_1$ | $3_43_4$ | $3\frac{1}{4}$ |
| 8 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_10_1$ | −1 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $0_40_5$ | $0_10_1$ | 0 | $0_50_1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1_11_1$ | 1 | $1_51_1$ | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{2}$ | $2_12_1$ | 2 | $2_52_1$ | $2\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ | $3_13_1$ | 3 |
| 9 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-1_1$ | −1 | $0_2-1_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 10 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-1_1$ | −2 | $1_2$ $-1_3$ | $-1_1$ $-1_1$ | −1 | $-\frac{1}{2}_1$ $-1_1$ | $0_10_5$ | 0 | $0_10_1$ | $0_10_6$ | $\frac{1}{4}$ | $1_1\frac{1}{2}_1$ | 1 | $1_11_1$ | $1_71_6$ | $1\frac{1}{4}$ | $2_11\frac{1}{2}_1$ | 2 | $2_12_1$ | $2_72_6$ | $2\frac{1}{4}$ | $3_12\frac{1}{2}$ | 3 |
| 11 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-1_1$ | −1 | $-1_2$ $-1_3$ | −1 | −1 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $0_60_7$ | $0_10_5$ | 0 | $0_10_1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1_11_1$ | 1 | $1_11_1$ | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{2}$ | $2_12_1$ | 2 | $2_12_1$ | $2\frac{1}{2}$ |
| 12 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-2_1$ | −2 | $-1_2$ $-2_1$ | $-1_1$ $-1_3$ | −1 | $-1_1$ $-1_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 13 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-1_1$ | −2 | −2 | $-1\frac{1}{2}$ | −2 | $-1_4$ $-1_5$ | $-1_1$ $-1_1$ | −1 | $-\frac{1}{2}_1$ $-1_1$ | $0_10_7$ | 0 | $0_10_1$ | $0_90_8$ | $\frac{1}{4}$ | $1_1\frac{1}{2}_1$ | 1 | $1_11_1$ | $1_91_8$ | $1\frac{1}{4}$ | $2_11\frac{1}{2}_1$ | 2 | $2_12_1$ | $2_92_8$ |
| 14 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-2_1$ | −2 | $-1_2$ $-2_1$ | $-1\frac{1}{2}$ | −1 | $-1\frac{1}{4}$ | −1 | −1 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $0_80_9$ | $0_10_1$ | 0 | $0_90_1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1_11_1$ | 1 | $1_01_1$ | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{2}$ | $2_12_1$ |
| 15 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-2_1$ | −3 | $-2_2$ $-2_3$ | $2_1$ $-2_1$ | −2 | $-1\frac{1}{2}_1$ $-2_1$ | $-1_1$ $-1_5$ | −1 | $-1_1$ $-1_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | ) | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 16 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-2_1$ | −2 | $-2_2$ $-2_3$ | −2 | −2 | −2 | $-1\frac{1}{2}$ | −2 | $-1_6$ $-1_1$ | $-1_1$ $-1_1$ | −1 | $-\frac{1}{2}_1$ $-1_1$ | $0_10_9$ | 0 | $0_10_1$ | $0_{11}0_{10}$ | $\frac{1}{4}$ | $1_1\frac{1}{2}_1$ | 1 | $1_11_1$ | $1_{11}1_{10}$ | $1\frac{1}{4}$ | $2_11\frac{1}{2}_1$ |
| 17 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-3_1$ | −3 | $-2_2$ $-3_1$ | $2_1$ $-2_3$ | −2 | $-2_1-2_1$ | $-1\frac{1}{2}$ | −1 | $-1\frac{1}{4}$ | −1 | −1 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $0_{10}0_{11}$ | $0_10_1$ | 0 | $0_{11}0_1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1_11_1$ | 1 | $1_{11}1_1$ |
| 18 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-2_1$ | −3 | −3 | $-2\frac{1}{2}$ | −3 | $-2_4$ $-2_5$ | $-2_1$ $-2_1$ | −2 | $-1\frac{1}{2}$ $-2_1$ | $1_1$ $-1_1$ | −1 | $-1_1$ $-1_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1-3_1$ | −3 | $-2_2$ $-3_1$ | $-2\frac{1}{2}$ | −2 | $-2\frac{1}{4}$ | −2 | −2 | −2 | $-1\frac{1}{2}$ | −2 | $-1_8$ $-1_9$ | $-1_1$ $-1_1$ | −1 | $-\frac{1}{2}_1$ $-1_1$ | $0_10_{11}$ | 0 | $0_10_1$ | $0_{11}0_{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $1_1\frac{1}{2}_1$ | 1 | $1_11_1$ |

**表 4.** 一个已经填满了的法拉达游戏棋盘 .

胜利，则此位置的左方得分为$\infty_1$. 另一位置，其中每一右方选择都具有左方得分$\infty_1$，则该位置的右方得分为$\infty_2$，等等，依此类推. 一般地说，得分$\infty_n$的意思是指一个位置，其中左方有着一种策略，可在第$n$步取得践踏性行动. 若$n$为奇数，这将是一个左方得分；若$n$为偶数，则是一个右方得分. 得分为$-\infty_n$（通常记为$\overline{\infty}_n$）是指派给一个局势的，其时右方将具有一个$n$步的践踏型胜利策略. 当$n$为偶数时，它将是一个左方得分，而当$n$为奇数时，它是一个右方得分. 得分$\infty_0$是表明左方已经取得（践踏型）胜利的局势，而$\overline{\infty}_0$则是右方已经取得践踏性胜利的局势.

在棋盘左上方边缘处几个位置的比分显然是$\infty_1\overline{\infty}_1$，因为无论哪个局中人都有一个立即取得践踏型胜利的可能；对b2这个位置来说，情况也是如此. b3处的比分为$\infty_1\infty_2$，因为在左方先走时一步即可取胜，而在右方先走时二步即可取胜，即使右方不走这只格子里的马也是这样. 但是，在b4处的马可以被右方走到c2而给他造成一个三步获胜的良机，所以此时的右方得分为$\overline{\infty}_3$. 然而，b5的右方比分为$0_1$，因为右方可将这匹马走到c3，其时没有哪一个局中人愿意动它，以免被对方立即一举取胜. 如果用符号表示，则c3将由下式

$$\{\cdots\overline{\infty}_1 | \infty_1\cdots\} = 0$$

来表示. 这是由于在$-\infty$与$+\infty$之间，0是一个最简单的数.

一个特别有趣的位置是d4，从它出发，无论哪位局中人都能在三步之内取胜. 此时该游戏可沿着图4标出的线段来进行，但也有其他走法，输掉的局中人或许把某些其他马匹走到b3或c2.

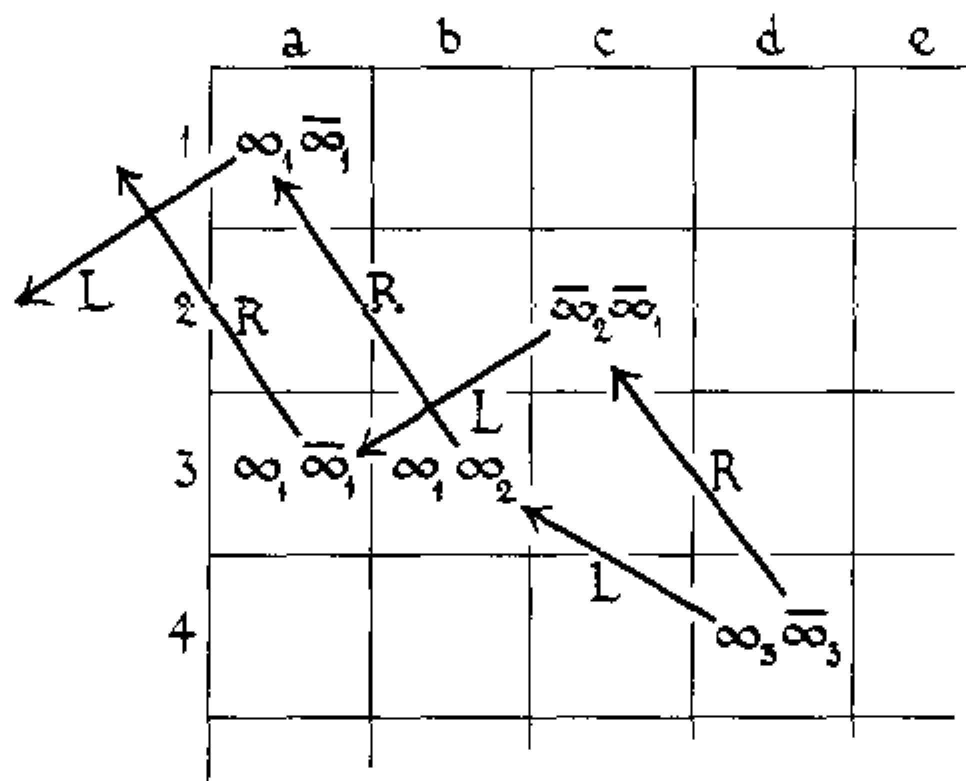
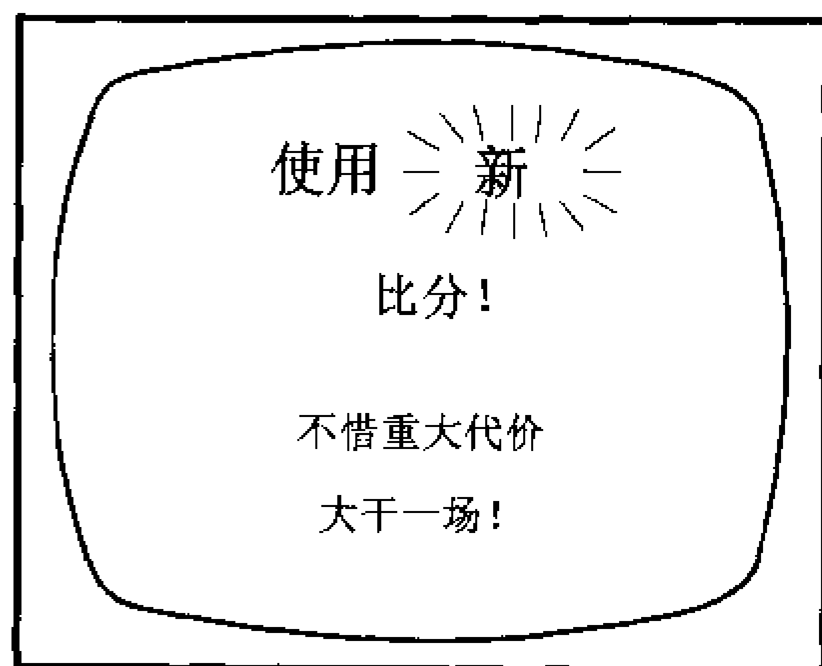


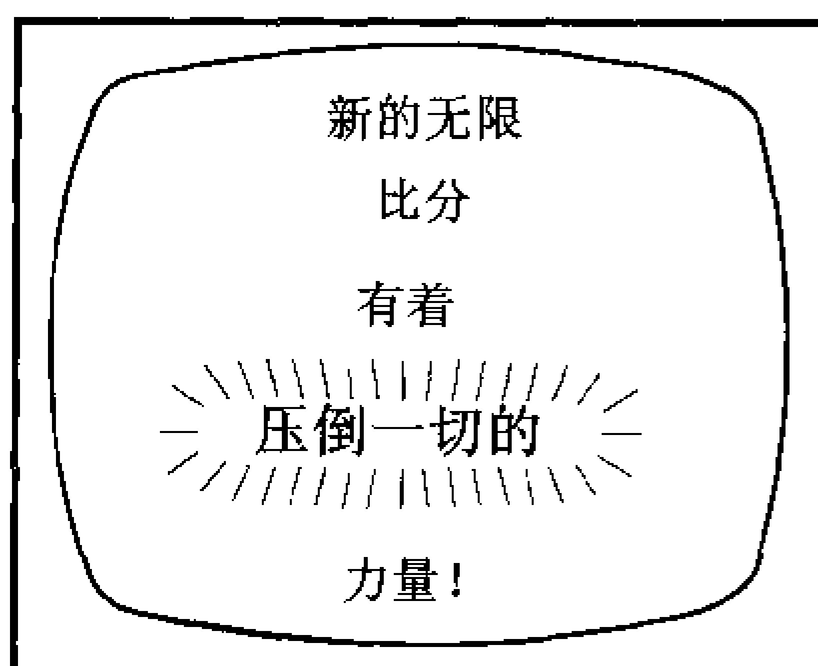

**图 4.** 两个在三步就取得的践踏性胜利.

如果你要对方耐心等待，而你自己十分吃力地不断查看表 4，那样做的话，对方势必对法拉达游戏感到索然乏味。所以，你为什么不照本章增补材料中图 7 的办法，让那个美丽的模式为你效劳呢？

让我们先对无限比分的制造者说上几句话之后，再回过来看看更多的游戏吧：

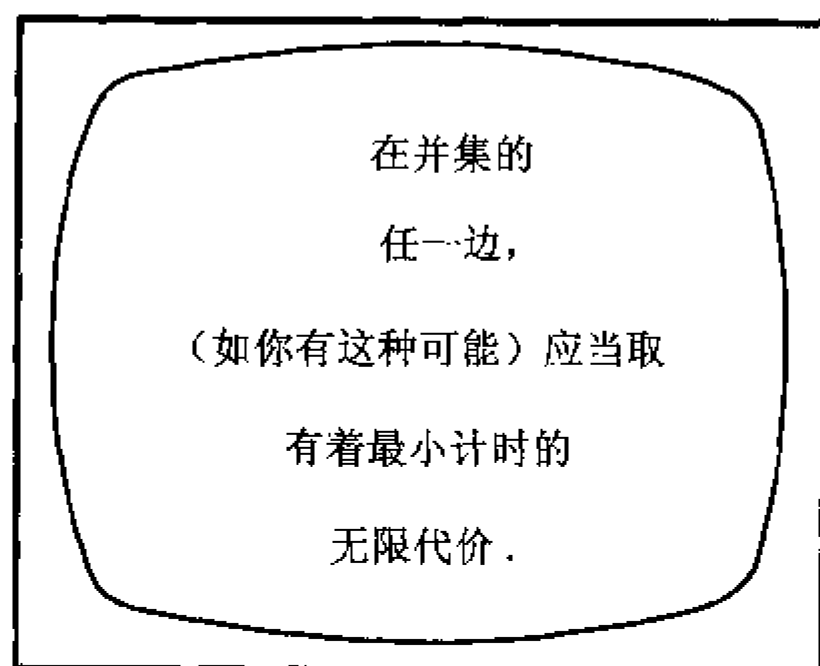



框架 0

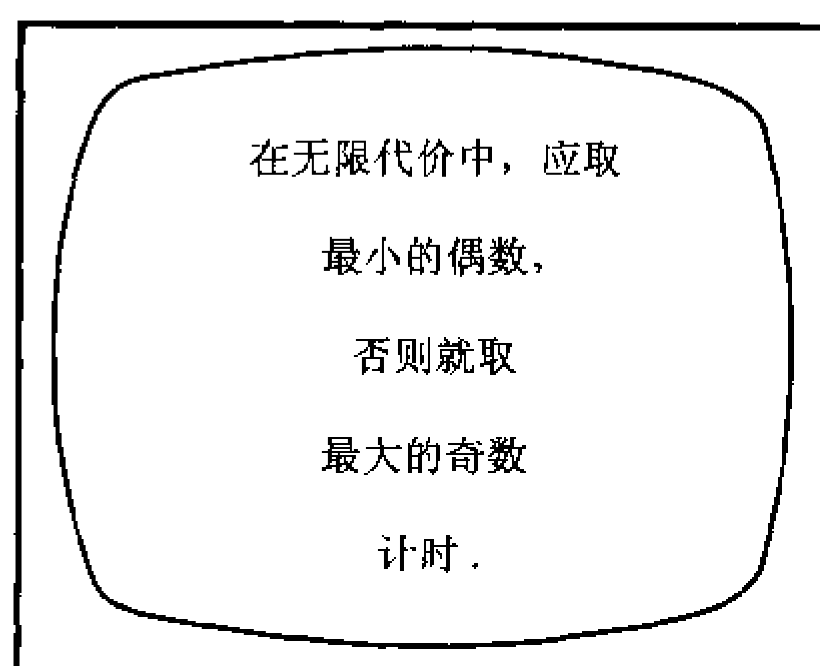



框架 1

无限代价的计时装置是遥远度函数，而不是悬数，于是：

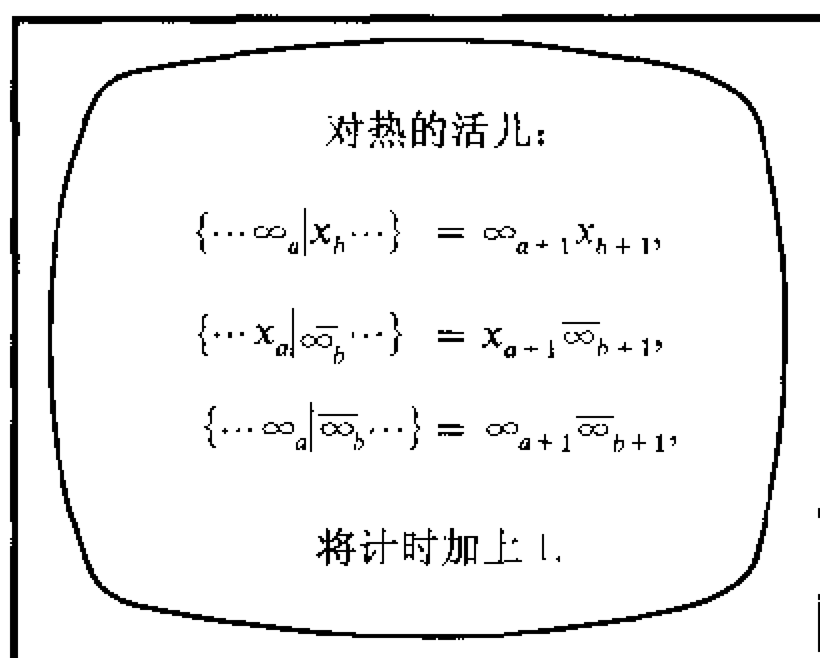



框架 2

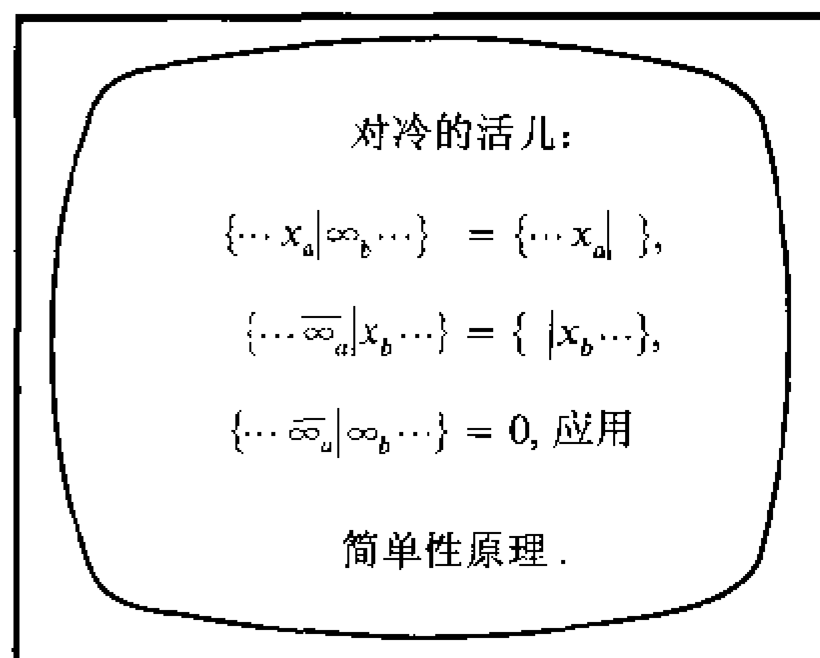



框架 3

新的比分，工作起来一如既往，同老机器基本上差不多：

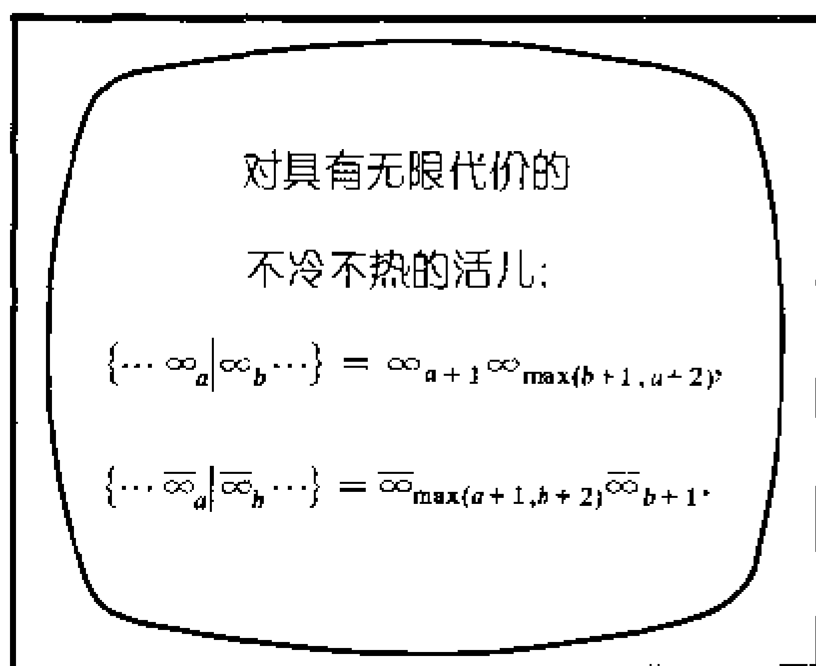



框架 4

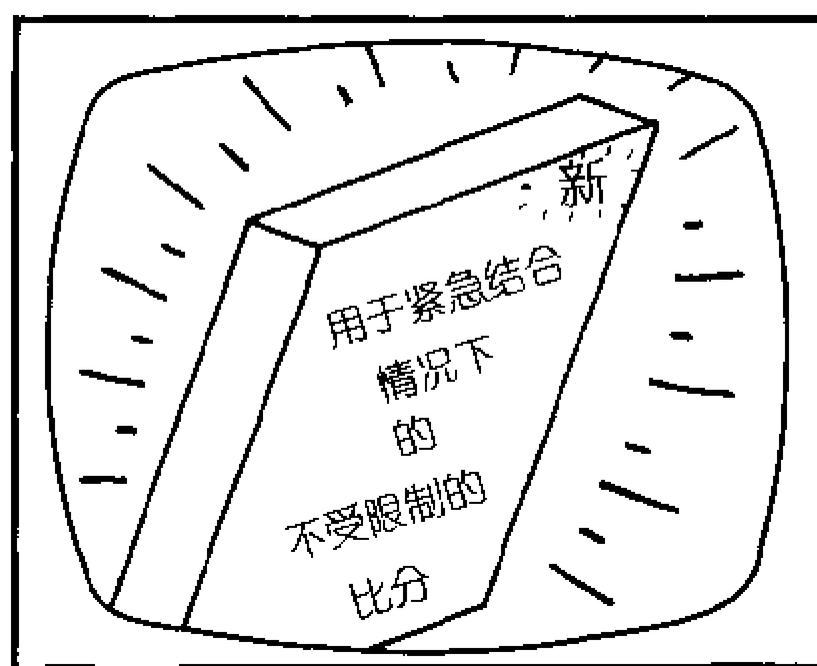



框架 5

但对于两个比分为同样无穷代价的精细博弈，则必须使用新程序循环：




框架 6




框架 7

在使用框架结构 6 时，处理$\{\cdots\infty_a|\ \ \}$就像处理$\{\cdots\infty_a|\infty_{\ \ 1}\cdots\}$一样；处理$\{\ \ |\overline{\infty}_b\cdots\}$就像是处理$\{\cdots\overline{\infty}_{-1}|\overline{\infty}_b\cdots\}$一样.

按照框架 1 和 2，下面的比分

$$3_6\,\overline{\infty}_3 \vee \infty_9 5_{12} \vee 2\frac{1}{2}{}_1 0_2 \vee \overline{\infty}_8\,\overline{\infty}_5$$

应为

$$\overline{\infty}_8\,\overline{\infty}_3.$$

这是由于左边得分中有无穷大代价者为$\infty_9$及$\overline{\infty}_8$，而$\overline{\infty}_8$具有最小的计时. 在右边的得分中，$\overline{\infty}_3$

打败了$\overline{\infty}_5$ 之故. 无论左边还是右边,具有无穷大代价的比分(不论是$\infty$还是$\overline{\infty}$)与最小计时者压倒了其他一切.

无限代价的计时器是遥远度函数,不是悬数,因为取得粗暴践踏型胜利的局中人希望赢得越快越好,而其对手却企图输得越慢越好.

让我们利用框架 3 来求下列比分

$$\{\cdots\overline{\overline{\infty}}_5,\cdots\infty_6,\cdots 2_2,\cdots\overline{\infty}_1\cdots\infty_3 \mid 1_9\cdots,3_8,\cdots,1_6,\cdots\infty_1,\cdots,1_2\cdots\}.$$

对此,左方把具有最大右方代价($\infty$)的选择编入缩短了的候选清单,而右方则把具有最小左方代价(1)的选择编入,于是得出

$$\{\cdots\infty_6,\cdots\infty_4 \mid 1_9,\cdots,1_6\cdots,1_2,\cdots\}=\{\cdots\infty_4 \mid 1_6\cdots\}=\infty_5 1_7.$$

由于他的计时是遥远度函数,左方宁愿要$\infty_4$ 而不要$\infty_6$(原则上要挑最小偶数,否则就挑最大奇数),但右方看到的却是悬数,因此宁愿挑 $1_6$ 而不要 $1_9$ 或 $1_2$(原则上要挑最大偶数,否则就挑最小奇数). 由于这是一个热博弈,故可用明显的方法(见框架 4)来求出其比分$\infty_5 1_7$;如果它是冷博弈,则我们还是要应用简单性原理(框架 5).

为了覆盖新情况——不冷不热的博弈(框架 6),这时左、右两方的最佳选择都具有同样的无穷大代价,我们将送你一个新的戒律:

值得注意的戒律:

> 如果无穷代价相等的话,则你不能允许一个奇数的计时,除非存在着一个更大的偶数计时.

于是,

$$\{\cdots\infty_4 \mid \infty_7\cdots\}=\infty_5\infty_8,$$

因为它满足上述的戒律. 然而

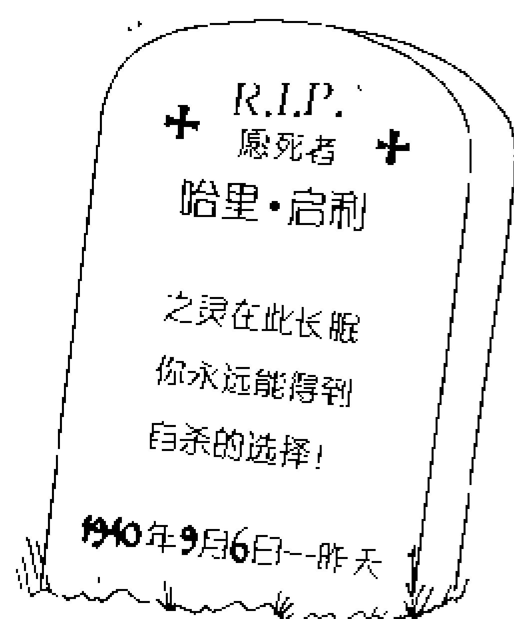
$$\{\cdots\infty_8 \mid \infty_3\cdots\}=\infty_9\infty_{10},$$

因为待试的比分$\infty_9\infty_4$ 不满足这个戒律. 当一位局中人没有任何选择时(譬如说,由于勃然大怒而打翻了棋盘),此时应当给左方添上自杀性选择$\overline{\overline{\infty}}_{-1}$或给右方添加$\infty_{-1}$.

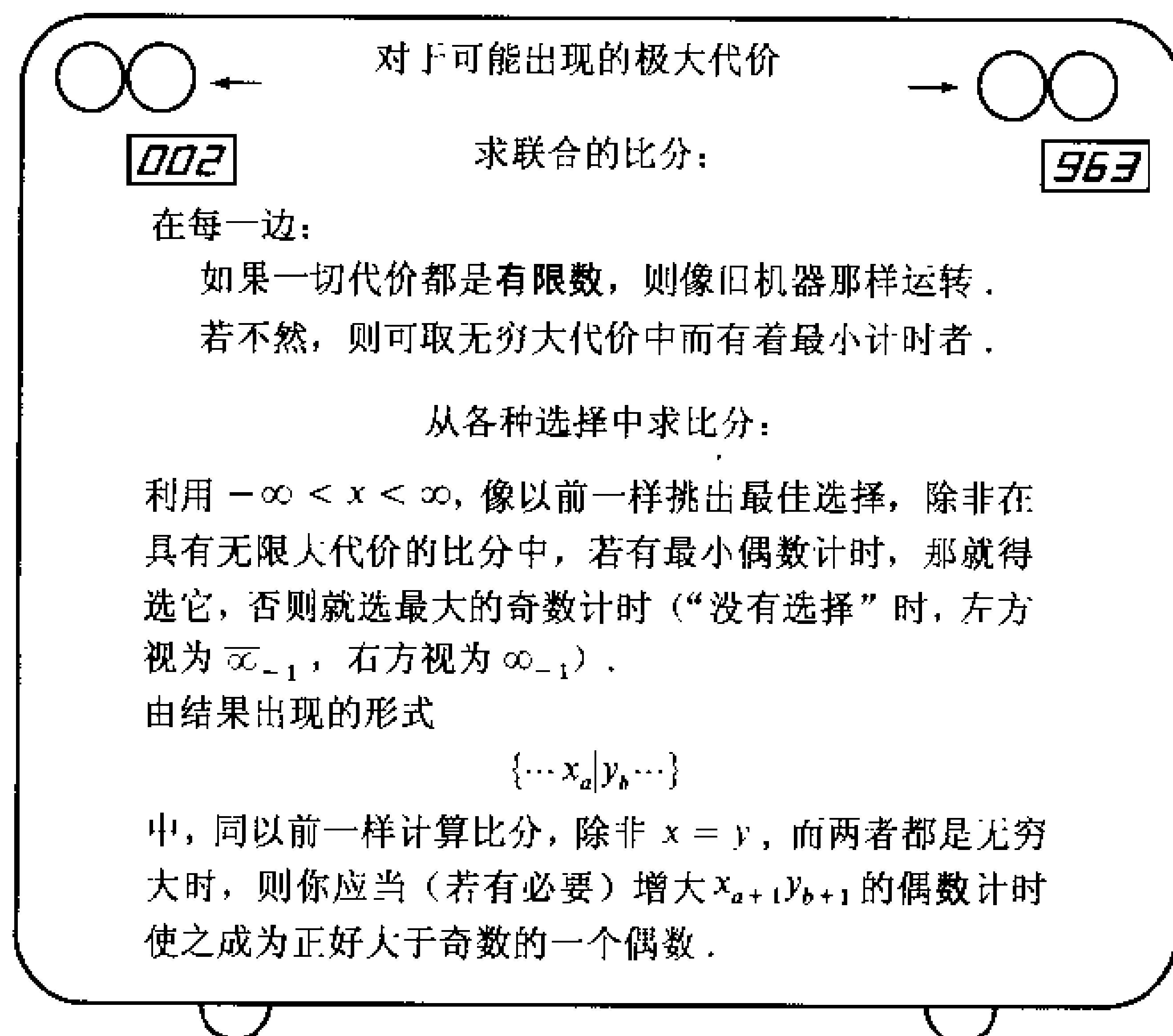
譬如说,

$$\{\cdots\infty_6 \mid \ \}=\{\cdots\infty_5 \mid \infty_{-1}\cdots\}=\infty_7\infty_8.$$

在本章增补材料中可以找到这些规则的详细解释,在那里我们也将阐明为何有的仗不等计时届满就匆匆结束.




下面这个摘要，就是你们的新计分机器的运转方式：




新的无限比分机器

---

* 译者注：R. I. P. 的意思是 requiescat in pace（拉丁文），相当于英语的 May he (or she) rest in peace. 这是天主教徒墓碑上的铭文用语. 其意为：愿死者之灵在此安息！至于哈里·启利，那是作者们信口杜撰之人名. 1940 年 9 月 6 日，正是本书第一作者的出生日期，真是幽默之至！

## 留下一个算你赢，两个算我赢，一个不留就收场

这种游戏称为**拿走平方数**，是在几堆豆子上玩的. 走法是在任意几堆豆子上拿走个数为平方数(必须大于 1)的豆子. 由于一次动作至少要拿掉四颗豆子，所以只剩下 0，1，2，3 颗豆子的堆已经不能再减少了. 我们认为全部拿光，一个都不留的行动是一种压倒性的胜利，谁采取这个动作的谁就是赢家(当然不可能两家都采用)，而留下一粒豆子的行动作为右方可赢(这就是本节标题上所提到的"一个算你赢")，留下二粒豆子的行动视为左方可赢("二个算我赢). 至于行动过后，剩下三颗豆子的话，则双方都不算赢，除非全部其他各堆都只剩下三颗豆子，游戏也不能算到此结束. 表 5 给出了此游戏的一些值.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1—10 | $\infty$ | $\infty$ | 0 | $\infty_1\overline{\infty_1}$ | $\overline{\infty_2}\,\overline{\infty_1}$ | $\infty_1\infty_2$ | $0_10_2$ | 0 | $\infty_1\overline{\infty_1}$ | $\infty_3\overline{\infty_1}$ |
| 11—20 | $\infty_10_2$ | $0_10_1$ | 0 | $\overline{\infty_1}\,\overline{\infty_3}$ | $\infty_3\overline{\infty_1}$ | $\infty_1\overline{\infty_1}$ | $0_1\overline{\infty_1}$ | $\infty_1\infty_5$ | $\infty_50_1$ | 1 |
| 21—30 | $0_2\overline{\infty_5}$ | $\infty_30_1$ | $0_2\overline{\infty_4}$ | $\infty_20_1$ | $\infty_1\overline{\infty_1}$ | $0_2\overline{\infty_1}$ | $\infty_10_3$ | $0_10_1$ | $1_20_1$ | $\overline{\infty_1}\,\overline{\infty_3}$ |
| 31—40 | $\infty_3\infty_1$ | $0_20_3$ | $0_10_1$ | $\overline{\infty_6}\,\overline{\infty_1}$ | $\infty_50_3$ | $\infty_1\overline{\infty_1}$ | $0_2\overline{\infty_1}$ | $\infty_1\overline{\infty_7}$ | $0_1\overline{\infty_5}$ | $\infty_5\infty_6$ |
| 41—50 | $0_1\overline{\infty_5}$ | $\infty_30_3$ | $0_2\overline{\infty_7}$ | $\infty_50_1$ | $1_10_5$ | $0_1\overline{\infty_5}$ | $\infty_50_3$ | $0_20_3$ | $\infty_1\infty_2$ | $\infty_6\infty_1$ |
| 51—60 | $\infty_10_7$ | $0_10_3$ | $0_20_3$ | $0_2\overline{\infty_5}$ | $\infty_3\overline{\infty_5}$ | $\infty_70_2$ | $0_10_1$ | $0_20_4$ | $\overline{\infty_8}\,\overline{\infty_7}$ | 1 |
| 61—70 | 0 | $0_10_5$ | $0_1\overline{\infty_5}$ | $\infty_1\infty_1$ | $\infty_7\overline{\infty_1}$ | $\infty_1\overline{\infty_5}$ | $\infty_30_1$ | $0_2\overline{\infty_9}$ | $1_1\overline{\infty_3}$ | $\infty_5\overline{\infty_7}$ |
| 71—80 | $0_20_4$ | $0_30_5$ | $0_20_3$ | $0_10_5$ | $0_3\overline{\infty_7}$ | $\infty_70_2$ | $0_10_1$ | $0_2\overline{\infty_5}$ | $\infty_5\overline{\infty_7}$ | $\infty_10_5$ |
| 81—90 | $\infty_1\overline{\infty_1}$ | $0_2\overline{\infty_7}$ | $\infty_1\overline{\infty_7}$ | $1_1\overline{\infty_9}$ | $1_10_3$ | $0_1\overline{\infty_3}$ | $\infty_30_3$ | $0_20_7$ | $\infty_20_3$ | $0_60_7$ |
| 91—100 | $0_10_7$ | $0_30_5$ | $0_20_3$ | $0_1\infty_5$ | $\infty_5\overline{\infty_5}$ | $\infty_50_3$ | $0_10_3$ | $0_1\overline{\infty_7}$ | $0_1\overline{\infty_7}$ | $\infty_7\overline{\infty_1}$ |

**表 5.** 拿走平方数豆子游戏把有限与无限代价混杂起来了.

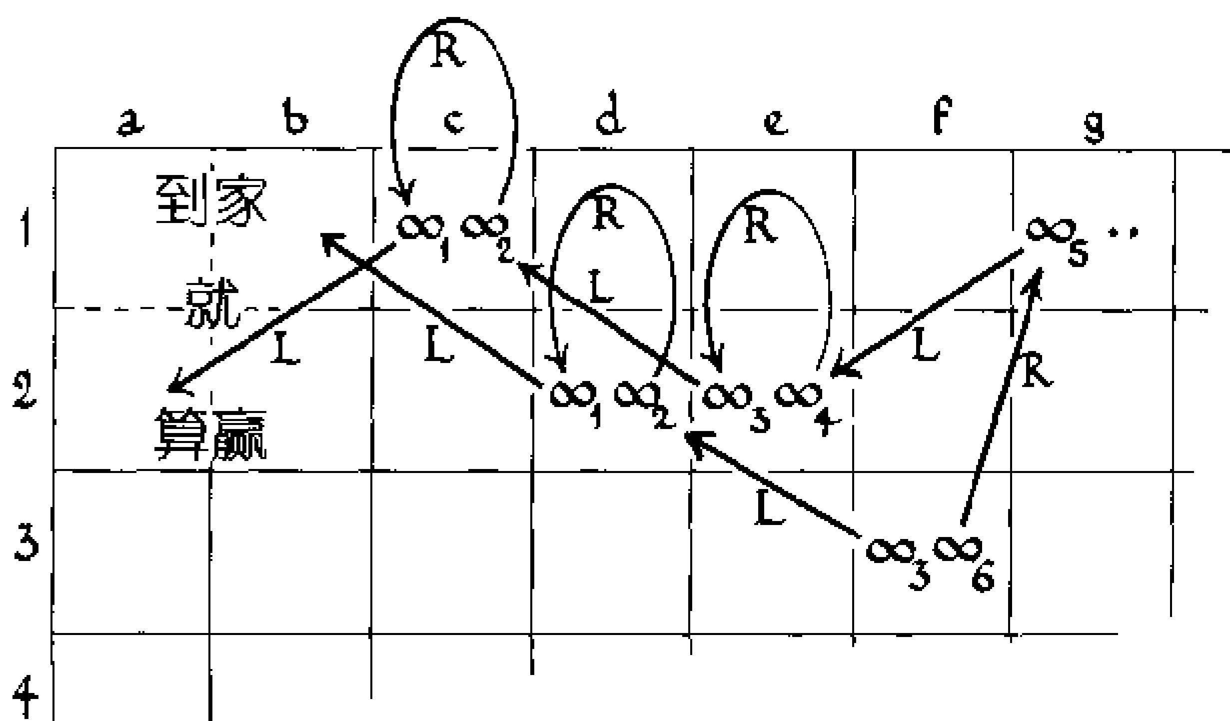



**图 5.** *f*3 这匹马的命运预告.

# 另外两种法拉达游戏

这两种游戏都不准许局中人把马跳出棋盘之外，但是，第一匹到家的马决定了游戏的结局．游戏的一种形式是第一匹马归家就算赢．这种游戏的双方比分已在表 6 中给出，注意表中有两个定义得很好的区域能取胜，中间有一个区域是完全由有限比分界定的．图 5 则预示了位于 f3 格子里的一匹马的命运，其比分为$\infty_3\infty_5$．

如果第一匹马到家算输，这时我们将得出表 7，此时将不会出现代价为无穷大的情况．事实上，只要一旦出现自杀性行动，这总是要发生的．在这种情况下，我们总是能得到同样的比分，如同我们通过一个法律（或许不能强迫实施吧？），使自杀行动成为非法一样．

以上两种游戏都是由前定的、决定性行动而使游戏结束的．这时，不能行动或不愿行动的局中人就是输家．

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 到家了！ | | $\infty_1\infty_2$ | $\infty_1\infty_2$ | $\infty_3\infty_4$ | $\infty_3\infty_4$ | $\infty_5\infty_6$ | $\infty_5\infty_6$ | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_9\infty_{10}$ | $\infty_9\infty_{10}$ |
| 2 | | | $\infty_1\infty_2$ | $\infty_1\infty_2$ | $\infty_3\infty_4$ | $\infty_3\infty_4$ | $\infty_5\infty_6$ | $\infty_5\infty_6$ | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_9\infty_{10}$ | $\infty_9\infty_{10}$ |
| 3 | $\overline{\infty}_2\overline{\infty}_1$ | $\overline{\infty}_2\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\overline{\infty}_1$ | $\infty_1\infty_4$ | $\infty_3\infty_4$ | $\infty_3\infty_6$ | $\infty_5\infty_6$ | $\infty_5\infty_8$ | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_7\infty_{10}$ | $\infty_9\infty_{10}$ | $\infty_9\infty_{12}$ |
| 4 | $\overline{\infty}_2\infty_1$ | $\overline{\infty}_2\infty_1$ | $\overline{\infty}_4\infty_1$ | 0 | 0 | $\infty_5\infty_6$ | $\infty_5\infty_6$ | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_9\infty_{10}$ | $\infty_9\infty_{10}$ | $\infty_{11}\infty_{12}$ |
| 5 | $\overline{\infty}_4\overline{\infty}_3$ | $\overline{\infty}_4\overline{\infty}_3$ | $\overline{\infty}_4\overline{\infty}_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_7\infty_8$ | $\infty_9\infty_{10}$ | $\infty_9\infty_{10}$ | $\infty_{11}\infty_{12}$ |
| 6 | $\overline{\infty}_4\infty_3$ | $\overline{\infty}_4\infty_3$ | $\overline{\infty}_6\infty_3$ | $\overline{\infty}_6\infty_5$ | −1 | $0_10_1$ | 1 | 2 | 2 | $\infty_9\infty_{10}$ | $\infty_9\infty_{12}$ | $\infty_{11}\infty_{12}$ |
| 7 | $\overline{\infty}_6\overline{\infty}_5$ | $\overline{\infty}_6\overline{\infty}_5$ | $\overline{\infty}_6\overline{\infty}_5$ | $\overline{\infty}_6\overline{\infty}_5$ | −1 | −1 | 0 | 0 | 2 | 3 | 3 | $\infty_{11}\infty_{12}$ |
| 8 | $\overline{\infty}_6\infty_5$ | $\overline{\infty}_6\infty_5$ | $\overline{\infty}_8\infty_5$ | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | −2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 |
| 9 | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | −2 | −2 | −1 | $0_10_1$ | 1 | 2 | 2 |
| 10 | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | $\overline{\infty}_8\overline{\infty}_7$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_7$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | −3 | −1 | −1 | 0 | 0 | 2 |
| 11 | $\overline{\infty}_{10}\infty_9$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{12}\overline{\infty}_9$ | −3 | −3 | −2 | 0 | 0 | 1 |
| 12 | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{10}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{12}\overline{\infty}_9$ | $\overline{\infty}_{12}\overline{\infty}_{11}$ | $\overline{\infty}_{12}\overline{\infty}_{11}$ | $\overline{\infty}_{12}\infty_{11}$ | $\overline{\infty}_{12}\overline{\infty}_{11}$ | −4 | −2 | −2 | −1 | $0_10_1$ |

**表 6.** 法拉达游戏的比分，第一匹马同家时算赢．

| 回家就是自杀! | | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 7 | 6 |
| 0 | −1 | $0_1 0_1$ | $0_1 0_1$ | $1_1 0_1$ | 1 | $1_1 1_1$ | $1\frac{1}{2}$ | $3_1 2_1$ | 3 | $3_1 3_1$ | $3\frac{1}{2}$ | $5_1 4_1$ | 5 | $5_1 5_1$ | $5\frac{1}{2}$ |
| 0 | 0 | $0_1 0_1$ | 0 | $0_2 0_3$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 6 |
| −2 | −1 | $0_1 -1_1$ | $0_3 0_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 5 | 4 | 5 |
| −1 | −1 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $0_3 0_3$ | $\frac{1}{4}$ | $1_1 \frac{1}{2}_1$ | 1 | $1_1 1_1$ | $1\frac{1}{2}$ | $3_1 2_1$ | 3 | $3_1 3_1$ | $3\frac{1}{2}$ | $5_1 4_1$ |
| −2 | −3 | $-1_1 -1_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0_4 0_5$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 |
| −2 | −2 | $-1\frac{1}{2}$ | −2 | −1 | $-\frac{1}{2}_1 -1_1$ | $0_5 0_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| −4 | −3 | $-2_1 -3_1$ | −1 | −1 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $0_5 0_5$ | $\frac{1}{4}$ | $1_1 \frac{1}{2}_1$ | 1 | $1_1 1_1$ | $1\frac{1}{2}$ | $3_1 2_1$ | 3 |
| −3 | −3 | −3 | −2 | −3 | $-1_1 -1_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0_6 0_7$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | 2 |
| −4 | −5 | $-3_1 -3_1$ | −2 | −2 | $-1\frac{1}{2}$ | −2 | −1 | $-\frac{1}{2}_1 -1_1$ | $0_7 0_6$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| −4 | −4 | $-3\frac{1}{2}$ | −4 | −3 | $-2_1 -3_1$ | −1 | −1 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $0_7 0_7$ | $\frac{1}{4}$ | $1_1 \frac{1}{2}_1$ | 1 | $1_1 1_1$ |
| −6 | −5 | $-4_1 -5_1$ | −3 | −3 | −3 | −2 | −3 | $-1_1 -1_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0_8 0_9$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 5 | −5 | −5 | −4 | 5 | $-3_1 -3_1$ | −2 | −2 | $1\frac{1}{2}$ | 2 | −1 | $-\frac{1}{2}_1 -1_1$ | $0_9 0_8$ | 0 | 1 | 0 |
| −6 | −7 | $-5_1 -5_1$ | −4 | −4 | $-3\frac{1}{2}$ | −4 | −3 | $-2_1 -3_1$ | −1 | −1 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $0_9 0_9$ | $\frac{1}{4}$ |
| −6 | −6 | $-5\frac{1}{2}$ | −6 | −5 | $-4_1 -5_1$ | −3 | −3 | −3 | −2 | −3 | $-1_1 -1_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 |

**表 7.** 法拉达游戏的比分，第一匹马回家算输.

# 阿拉斯加烤饼

这是凉饼游戏的一种特别有趣的变异. 它的玩法同凉饼游戏完全一样，除了有一点不同之外：看到一只方饼的人可以立即吃掉它，并马上赢得了游戏. 所以方饼的比分肯定是$\infty_1\ \overline{\infty}_1$，但除此之外，该游戏的性态同普通并集很类似，行动后产生一只方饼是不允许的，由此得知，其他一切代价都是有限数(具有前定行动的其他游戏的性态与此相似).

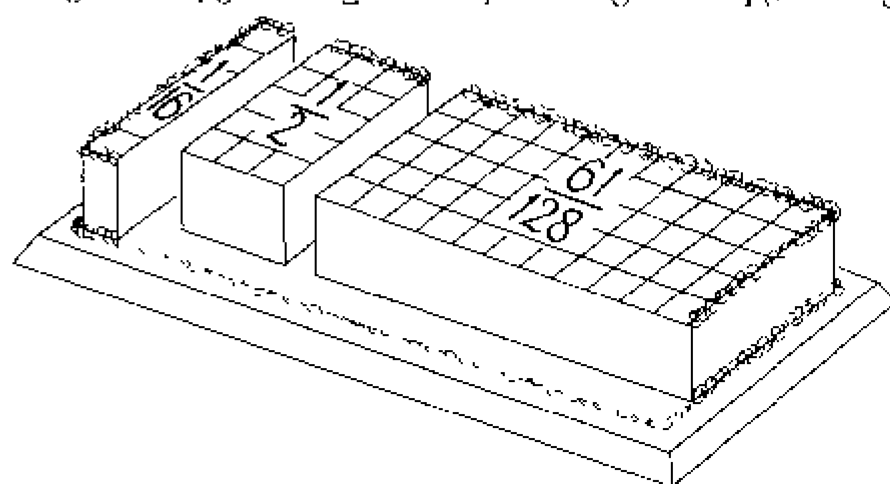
为了使表 8 看起来更加醒目，我们将把

$$1,2,3,4,5 \text{ 改写为 } a,b,c,d,e,$$

以作为计时，并简单地用记号⑤代表不合法的方饼. 对于由两个正方形组成的直条来说，左方可走到 0，但右方没有(非自杀性的)动作，所以值是 1. 对更长的直条来说，值要一再减半，这是由于右方的最佳动作是吃掉最后一块方饼之故. 其他小饼的趋势一般是热的，但也存在着某些令人惊讶的例外情况(譬如说，对 5×11 饼来说，值为$\frac{61}{128}$)！在表格中间的值绝大多数是冷的，但有着一个烤热的外壳，正

像游戏的名称所提示的那样*. 看来对足够大的 $m$, $m\times(m+1)$饼的值将交替地成为 $\frac{1}{256}$与$(2^{-8}+2^{2-m})_a0_a$. ($m$ 为奇数时), 而当 $k$ 为以下各值时, $m\times(m+k)$饼的值恒为下列数值:
$m\times(m+k)$饼的值分别为

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{31}{32}$ | 1 |




(a) 左方先吃一 11.

**图 6.** 阿拉斯加烤饼

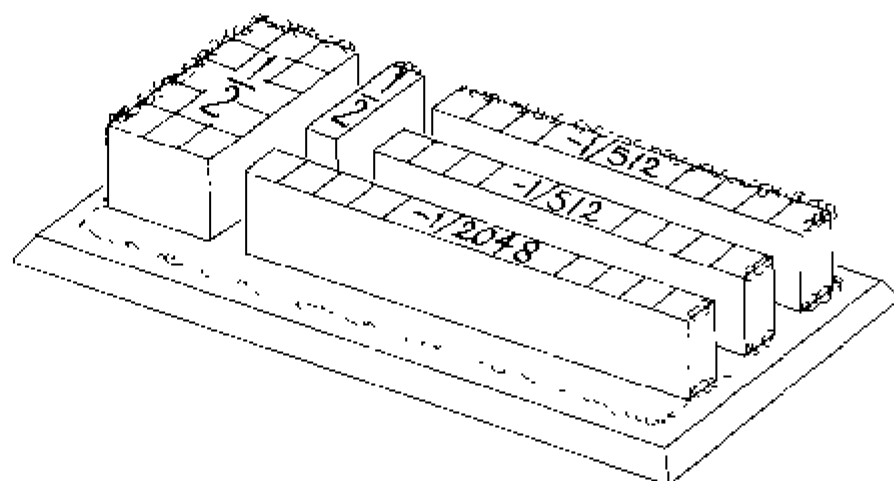
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ☽ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{16}$ | $-\frac{1}{32}$ | |
| 2 | 1 | ☽ | $2_a-\frac{1}{2}_a$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}_b-\frac{1}{8}_a$ | $\frac{1}{2}_a-\frac{1}{16}_a$ | $\frac{7}{8}_b-\frac{1}{32}_a$ | |
| 3 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}_a-2_a$ | ☽ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $0_a-\frac{1}{16}_a$ | $\frac{1}{4}_a-\frac{1}{32}_a$ |
| 4 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | ☽ | $\frac{5}{4}_a-\frac{1}{2}_a$ | $\frac{3}{2}_a-\frac{1}{4}$ | $2_a0_b$ | $\frac{1}{4}$ |
| 5 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}_a-\frac{1}{2}_b$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}_a-\frac{5}{4}_a$ | ☽ | $0_c-\frac{5}{16}_a$ | $1_a-\frac{1}{32}_b$ | 0 |
| 6 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}_a-\frac{1}{2}_a$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}_a-\frac{3}{2}_a$ | $\frac{5}{16}_a0_c$ | ☽ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}_a0_a$ |
| 7 | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}_a-\frac{7}{8}_b$ | $\frac{1}{16}_a0_a$ | $0_b-2_a$ | $\frac{1}{32}_b-1_a$ | $-\frac{3}{4}$ | ☽ | $-\frac{1}{2}$ |
| 8 | $\frac{1}{64}$ | ⋮ | $\frac{1}{32}_a-\frac{1}{4}_a$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0_a-\frac{3}{4}_a$ | $\frac{1}{2}$ | ☽ |
| 9 | $\frac{1}{128}$ | | $\frac{1}{64}_a-\frac{7}{16}_b$ | $-\frac{7}{16}_c-\frac{3}{2}_b$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}_a-\frac{13}{16}_a$ | 0 | $0_a-\frac{33}{64}_a$ |
| 10 | $\frac{1}{256}$ | | ⋮ | $-\frac{15}{32}_c-\frac{3}{4}_{bc}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ | 0 |
| 11 | $\frac{1}{512}$ | | | $-\frac{31}{64}_c-1_c$ | $-\frac{61}{128}$ | $-\frac{61}{128}_a-1_a$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}_c-\frac{1}{4}_b$ |
| 12 | | | | $-\frac{63}{128}_c-1\frac{1}{4}_a$ | | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{5}{16}$ |
| 13 | | | | ⋮ | | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}_a$ |
| 14 | | | | | | $-\frac{7}{8}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| 15 | | | | | | $-\frac{125}{128}_b-\frac{3}{2}_a$ | $-\frac{7}{8}$ | $-\frac{7}{8}_a-1_a$ |
| 16 | | | | | | $-\frac{63}{64}$ | $-\frac{15}{16}$ | $-\frac{7}{8}$ |
| 17 | | | | | | | $-\frac{31}{32}$ | $-\frac{15}{16}$ |
| 18 | | | | | | | $-\frac{63}{64}$ | $-\frac{31}{32}$ |
| 19 | | | | | | | | $-1$ |

**表 8.** 阿拉斯加烤饼的

* 译者注:阿拉斯加位于北美洲的西北部,大部分在北极圈内,气候严寒.

6×17 饼是热的，其比分为　$\frac{133}{128_a}\ \frac{2039}{2018_c}$.

图 6(a)与 6(b)表明，由左方与右方分别开始打热仗之后，




(b) 右方先吃一口.

的冰冻残部.

| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 此后为 | | $-2^{2-n}$ | | | | | | |
| | 此后为 $(1-2^{4-n})_b(-2^{2-n})_a$ | | | | | | | |
| | | 此后为 $(\frac{1}{2}-2^{5-n})_b(-2^{3-n})_a$ | | | | | | |
| | | | 以及 $n\geqslant 13$ 时，$(\frac{3}{2}-2^{9-n})_d(\frac{1}{2}-2^{5-n})_c$ | | | | | |
| $\frac{7}{16_b}-\frac{1}{64_a}$ | | | | | | | | |
| $\frac{1}{2_b}\frac{7}{16_c}$ | | | | | | | | |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{61}{128}$ | $\frac{1}{2_a}\frac{503}{1024_b}$ | | | | | |
| $\frac{13}{16_a}\frac{1}{4_a}$ | $\frac{1}{4}$ | $1_a\frac{61}{128_a}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{3}{2_a}\frac{125}{128_b}$ | $\frac{63}{64}$ | $\frac{133}{128_c}\frac{2039}{2048_e}$ |
| 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{31}{32}$ |
| $\frac{33}{64_a}0_a$ | 0 | $\frac{1}{2_b}\frac{1}{4_c}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{2_a}\frac{1}{2_a}$ | $\frac{1}{2}$ | $1_a\frac{7}{8_a}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{15}{16}$ |
| ☽ | $\frac{1}{128_a}0_a$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ |
| $0_a-\frac{1}{128_a}$ | ☽ | $-\frac{1}{256}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 0 | $\frac{1}{256}$ | ☽ | $\frac{3}{512_a}0_a$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0_a-\frac{3}{512_a}$ | ☽ | $-\frac{1}{256}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ |
| $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{256}$ | ☽ | $\frac{9}{2048_a}0_a$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ |
| $-\frac{7}{16}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0_a-\frac{9}{2048_a}$ | ☽ | $-\frac{1}{256}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{7}{16}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{256}$ | ☽ | $\frac{33}{8192_a}0_a$ | 0 |
| $-\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{7}{16}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0_a-\frac{33}{8192_a}$ | ☽ | $-\frac{1}{256}$ |
| $-\frac{7}{8}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{7}{16}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{256}$ | ☽ |
| $-\frac{15}{16}$ | $-\frac{7}{8}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{7}{16}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0_a-\frac{129}{32768_a}$ |
| $-\frac{31}{32}$ | $-\frac{15}{16}$ | $-\frac{7}{8}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{7}{16}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 |

极难对付的数了.

# 增　补

## 一个巧妙的法拉达战场

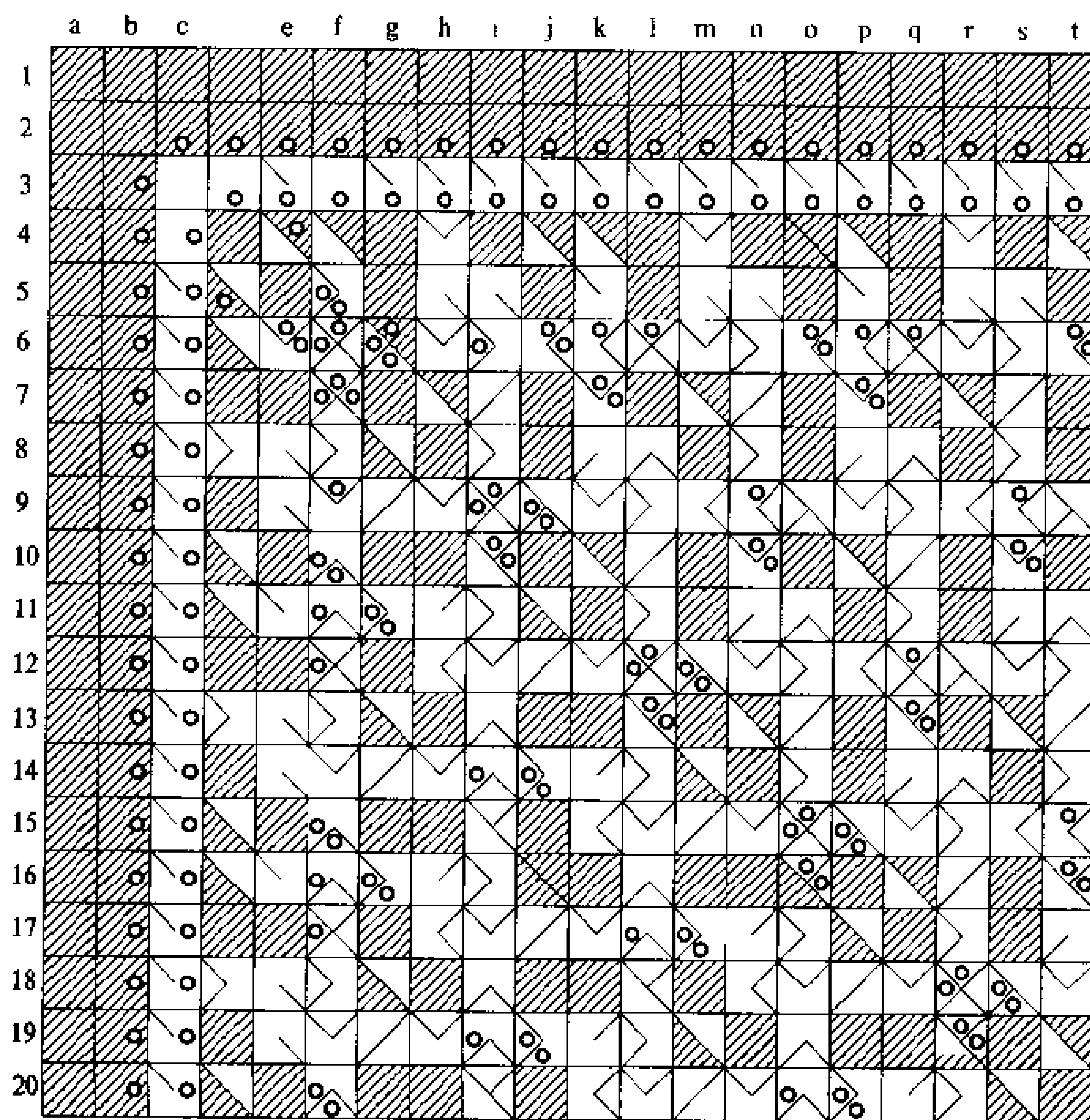



图 7. 在这个万无一失的法拉达战场里决不会有任何错误,失败或犹豫动摇.

每一个正方形格子都应视为被西北—东南*走向的对角线分为左方与右方各一半．取正常行动时，左方为向西走 2 正方格子，向北走 1 正方格子，(右方为 2N&1W)，但如果在正方形格子的南(东)侧有一小圆圈，则要取异常行动，即左方为 2W，1S 而右方为 2N&1E)．如果在任一正方形格子里，属于你的那一半电头打着荫线，则应走动在这类方格里的每一匹马．如果在那里没有马，则应在含有最大个数半对角线的未打荫线的方格子里走动一匹马，尤其是在属于你的一半中有一条半对角线的话．图 7(a)的要点是说得非常详细，指出了任何一方的代价之损失．如果代价的数值没有什么变化，则应将计时改动 1，除非在西(北)侧有一个小圆，在此种情况下应将计时改动 3，对每个处于类似位置的小圆(可将主对角线的步长改为 3 以找到这种小圆再加上 2．例如，在方格子 p20 中，右方的那一半是空白，所以右方希望找到一个更好的行动．图 7(a)告诉我们，右方的代价在变坏(数值增大)，如果他采取行动的话，但是左方的代价不变．如果他就此格采取行动，则应取异常行动(在南侧有小圈的)，而其计时装置要变动 3(西侧有小圈者)+2×3(方格子 m17，j14 与 g11 含有处于类似位置的小圈，但 d8 没有)=9．所以根据表 4 的外推可知，左方应该从 $-1$ 走到 $\cdots -1_9$，而右方应该走到 0．

图 7(a)．在法拉达战场上作游戏时代价的损失．

## 求无穷大代价的比分法则

我们打算通过实例

$\{\cdots\infty_4|\infty_7\cdots\}$与$\{\cdots\infty_8|\infty_3\cdots\}$(其中无论是哪一个左方都是稳赢的局势)来仔细解释一

* 译者注：即左上角至右下角走向的对角线，也就是行列式理论中所谓的“主对角线”．

下．在第一个例子中双方都愿意积极采取行动——左方在第 5 步取胜，而右方尽量拖延到第 8 步才认输．所以其性态极像是一个热点游戏，而比分为$\infty_5\ \infty_8$．在第二个例子中，左方肯定要采取行动，在第 9 步获得决定性的胜利．但若右方选择在这一分支中行动，则博弈将只能维持 4 步，而如果他在这一分支中说声"派司"，听任左方在第 9 步取胜的话，则博弈可以维持到 10 步．如果他在其他地方有一个为害较小的行动，那么他可以走出这个"派司"动作，若他在别的分支中可用 9 步或更少的步数取胜的话，则他甚至可以取得整个游戏的胜利．

在$\{\cdots\infty_8\ \ \}$的情况，右方不得不派司，因为他没有任何其他选择，所以比分还是$\infty_9\ \infty_{10}$，就同他有一个$\infty\ \ _1\cdots$的选择一样．

## 时间有可能比你想像的要短！

对热仗的持续时间，我们的计时装置有时会给出错误答案．但这无关紧要，因为它总是能正确地指出取胜的一方．

例如

$$\{\cdots x_4 \mid x_7\cdots\}\vee y,$$

我们求出比分

$$x_9 x_8 \vee y=(x+y)_9(x+y)_8.$$

它表明如果左方先走，战斗将持续 9 步．可是事实上它只持续了 5 步，因为他为了避免在分支 $y$ 中采取行动，他走到了

$$\cdots x_4 \vee y,$$

而不是去通过不冷不热的分支．由于只有一个仗要打，而且他肯定能打赢，所以左方不需要去考虑打赢究竟要化多少时间．左方比分 $x_9$ 只是表明，左方如果需要那样做的话，这个仗左方可以拖长到 9 步而已．

# 第11章

# 无限博弈与不定博弈

e说："我发现，事情极像猫头鹰的发现，
极大部分人忽上忽下，或者在原地兜圈子."

——帕特里克·里杰纳特·查尔默斯(Patrick Reginald Chalmers)，
《意气风发与萧瑟惨淡的日子》，"兜圈子与摇来晃去"

我永远是在不停地运动，
停下来找个归宿，多无聊气闷！

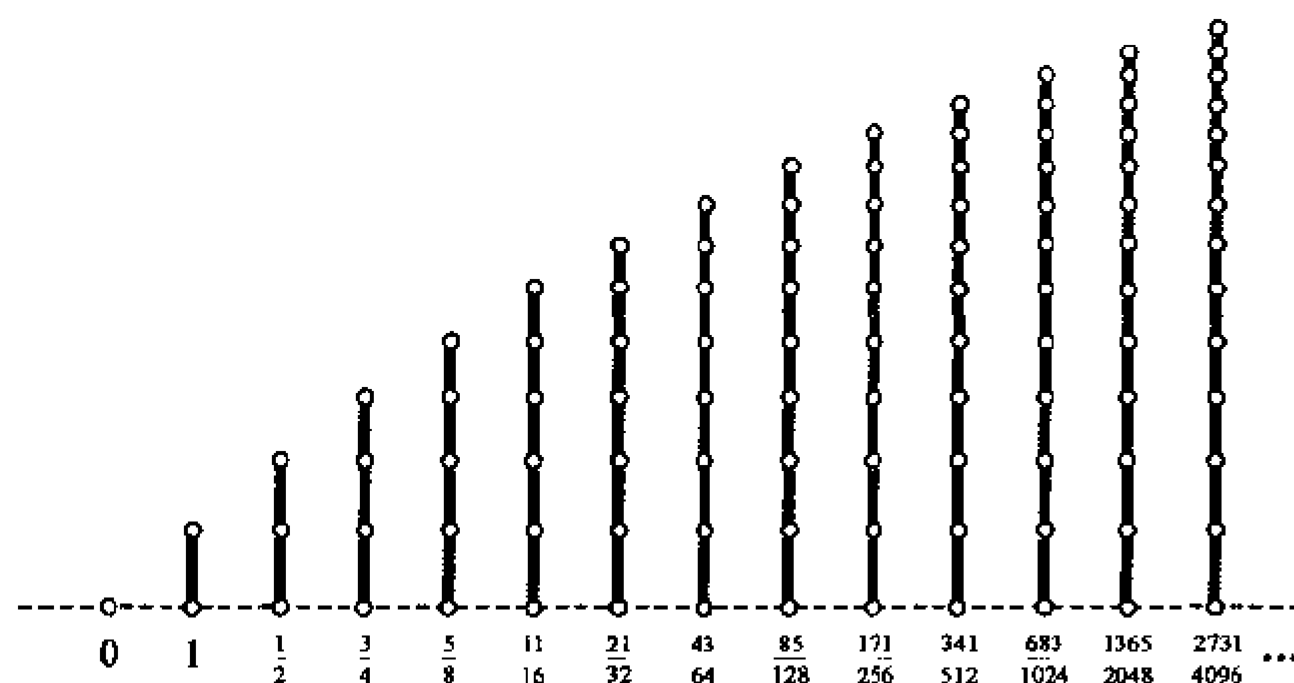
——阿尔弗莱德·丁尼森爵士，《尤利西斯》，I.21

在这部《稳操胜券》书中，我们的绝大多数例子都只有着有限多种局势. 但确实存在着既有无限多种局势而又能满足结束条件的博弈. 一些实例将在本章第一部分中予以描述. 但是，更加有趣的博弈是删除结束条件的那类博弈，我们将称之为**有圈博弈**，因为人们发现他有可能一次又一次地回到同一种局势. 在第12章中，我们将同其他事物结合起来，讨论C·A·B·史密斯的无偏有圈博弈的完整理论. 但在本章中，我们将会看到，有偏有圈博弈同它是完全两码事.

本章所讲到的一些概念同本书其他章节联系很少，难得一用.

## 无限伐木游戏

你们可能早已怀疑，为什么$\frac{2}{3}$这类数不作为值而出现. 对此，我们的答复是：它们能出现的！为此，让我们来看一看某些越来越接近$\frac{2}{3}$的局势：




一棵无限长的、蓝、红交替的豆茎的值有没有可能正好等于$\frac{2}{3}$呢？如果能做到，那么图1应当是后手获胜的局势，因为它的值是

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-2=0.$$

在左方走出开局的一步之后，博弈值将是

$$\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-2.$$

于是，右方可以在另一根豆茎的高处走出一步，从而达到

$$\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)+\frac{2}{3}-2.$$

如果左方在豆茎的剩余部分中作出反应，则剩余部分的博弈将是有限的，且其值为

$$\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)+\left(\frac{2}{3}-\varepsilon'\right)-2<0,$$

所以右方可以获胜. 在左方走了另一步后，右方可以从 $\frac{2}{3}$ 走到 $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\varepsilon$，留下一个有限博弈，其值严格地小于

$$\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)-2=0.$$

同样也易于证明：若右方先走，则左方可赢.

此项论证有着相当一般性，从而可用来制造一个具有任何实数值的伐木游戏植株. 例如 $\pi$ 的二进位展开式* 为

3.00100100001111110110101010001000100001011010001…，

应用伯莱坎普法则(见第 3 章增补材料)，可知图 2 的值是 $\pi$.

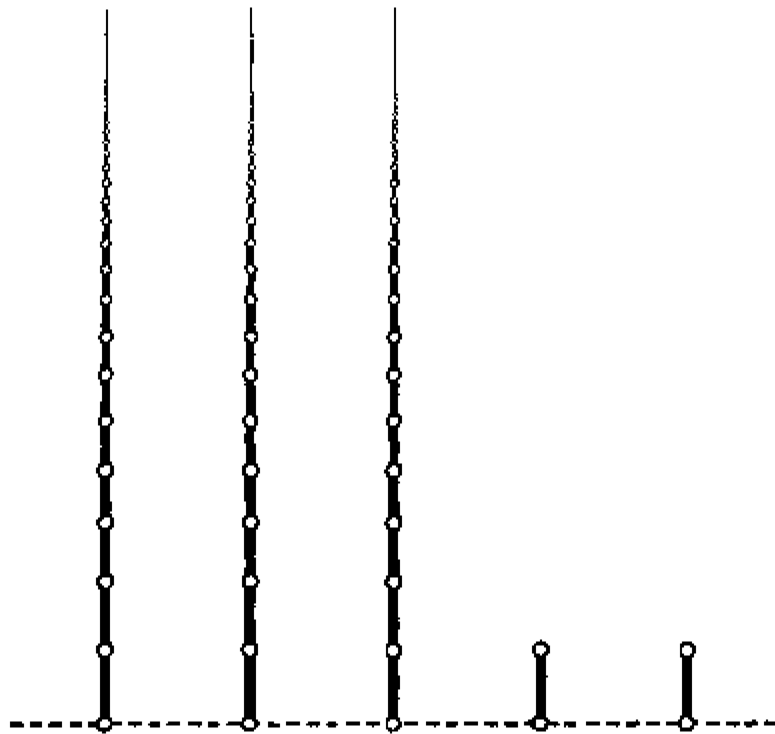


图 1. 一步的 2/3 可以历时甚久.



图 2. 值为 $\pi$ 的伐木游戏植株.

## 无限结尾

但我们能否真正把伐木游戏理论应用于无限图? 这样做是否安全? 我们要不要担心极限过程的合法性?

是的，这是很安全的，它们完全能够正常运行，其中根本不包含极限过程，而且我们已经证明了它! 尽管这些伐木游戏植株是无限长的，可是你肯定能在有限时间内把这些游戏做完，因为它们是能满足第 1 章所说的**终止条件**的——不可能存在一个无限多步的序列(即便局中人不

---

* 译者注：这句话略有语病. $\pi$ 的整数部分还是用的十进位数，不是二进位.

是在作交替行动).

在本章中,我们将把满足这种很强有力的终止条件的博弈称作具有**结尾**(终端)的博弈.你们可以看到有着无限多局势的博弈仍然是完完全全有结尾的.虽然我们的大多数例题都只具有有限多的局势,但我们始终是在小心翼翼地把理论推广应用到任意大的终端上去.

## 无穷大序数

然而,并不是一切无限长的豆茎都有着通常的实数值.图3中标记着$\omega$的纯为蓝色的豆茎的值为无穷大,这是因为我们可以看到

$$0<\omega,1<\omega,2<\omega,3<\omega,\cdots$$

为什么我们不把它称为$\infty$,或者$\aleph_0$呢,因为它有着可数无限多条边?

回答是 $$\omega+1>\omega.$$

然而通常可以方便地记为 $$\infty+1=\infty,\aleph_0+1=\aleph_0.$$

从图3中可以看到,即使你一直爬到无限长豆茎的顶上,你仍然可以再添加其他的边而使

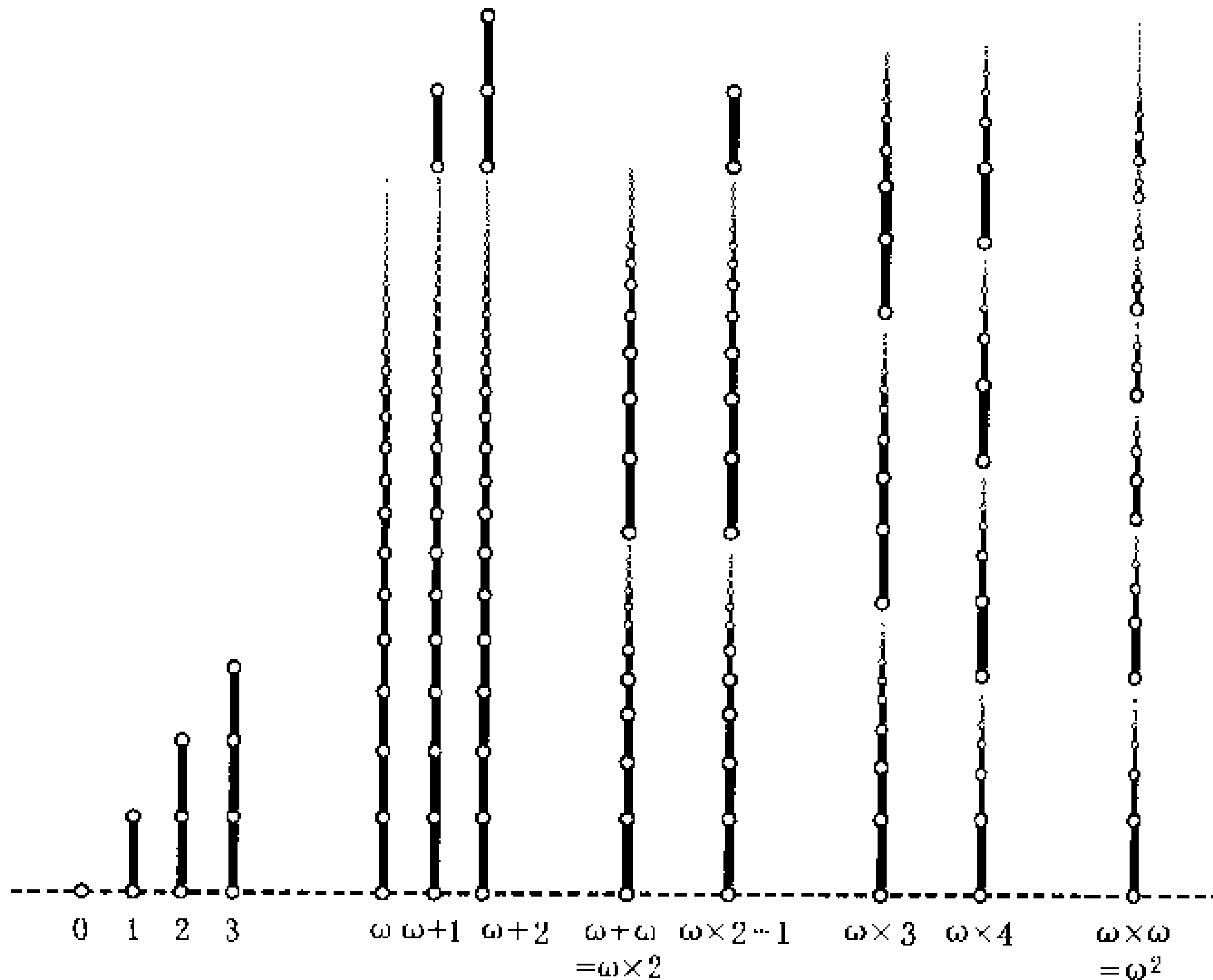



**图3.** 豆茎可以一直生长上去,……漫无止境.

之更高. 在此处出现的这类数字被乔治·康托(Georg Cantor)称为无穷大序数,它们可以一直地伸长,伸长,……无有止境……

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,\omega\times 2,\cdots,\omega\times 3,\cdots,\cdots,\omega\times\omega$$
$$=\omega^{2},\cdots,\omega^{3},\cdots,\omega^{4},\cdots,\omega^{\omega},\cdots,\omega^{\omega^{2}},\cdots,\omega^{\omega^{3}},\cdots$$

无穷大序数的一个相当典型的例子是

$$(\omega^{\omega^{\omega}}\times 5)+(\omega^{\omega^{2}}\times 7)-\omega^{\omega}+(\omega^{3}\times 2)+\omega^{2}-47.$$

## 其他序数

但是,在我们的理论中还有更多的数,例如康托序数之负,这相当于完全是红色的豆茎.倘若我们允许蓝、红边混杂在一起,那就会有更大的一类数(见图4). 在ONAG一书中,你将学会怎样把这些数进行乘、除以及开平方;但是你只要通过做游戏,就可以对这些数进行加、减.

豆茎并不是伐木游戏中唯一有着无限终端的游戏. 图5给出了一些无限树的值. 具有终端的任一蓝—红伐木游戏局势总是有一个数作为其值的(但此数未必为实数或有限数).

## 无限尼姆游戏

你们也可以拥有纯绿的无限豆茎(或者蛇),它们有着无偏结尾. 如果我们把图3中的豆茎统统改为绿色,则它们的值就将包含无限大拧数:

$0,*1,*2,*3,\cdots,*\omega,*(\omega-1),*(\omega+2),\cdots,*(\omega\times 2),*(\omega\times 2+1),\cdots,*(\omega\times 3),\cdots,*(\omega\times 4),\cdots,*\omega^{2},\cdots$

尼姆游戏的一套理论同样可以适用于它们,只须对$\omega$的不同乘幂的系数做尼姆加法:

$$*(\omega^{\omega}\times 5+\omega^{2}+\omega\times 7+5)-*(\omega^{2}\times 3+\omega+3)=*(\omega^{\omega}\times 5-\omega^{2}\times 2+\omega\times 6+6).$$

这相当于展为2的乘幂并成对地勾销重复数字,并应用康托等式:

$$2^{\omega}=\omega,2^{\omega\times 2}=\omega^{2},2^{\omega\times 3}=\omega^{3},\cdots,2^{\omega^{2}}=\omega^{\omega},\cdots$$

(关系式$2^{\omega}=\omega$说明了我们不采用基数$\aleph_0$的另一理由,因为(通常情况下)它远远小于$2^{\aleph_0}$).

**二维尼姆游戏**要采用一种四分之一无限长棋盘(见图6(a))以及个数有限的筹码,在同一方格上可以放下任意个数的筹码. 一只筹码可以在它自己的一行里**向左移动**任意距离,也可移到**较低行的任何**位置上去. 图6(b)中所示的拧数全部都属于以下形式

$$*(\omega\times a+b).$$



$\omega$ $-\omega$ $\omega-1$ $\omega-2$ $\frac{1}{2}\omega$ $\frac{1}{4}\omega$ $\sqrt{\omega}$ $\frac{2}{3}\omega$

$\frac{1}{\omega}$ $\frac{1}{2\omega}$ $\frac{2}{\omega}$ $\frac{2}{3\omega}$ $1\frac{1}{\omega}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{\omega}$ $\frac{1}{\omega^2}$ $\frac{1}{\omega^\omega}$ $\frac{1}{\sqrt[\omega]{\omega}}$

**图 4.** 伤脑筋的双色豆茎.

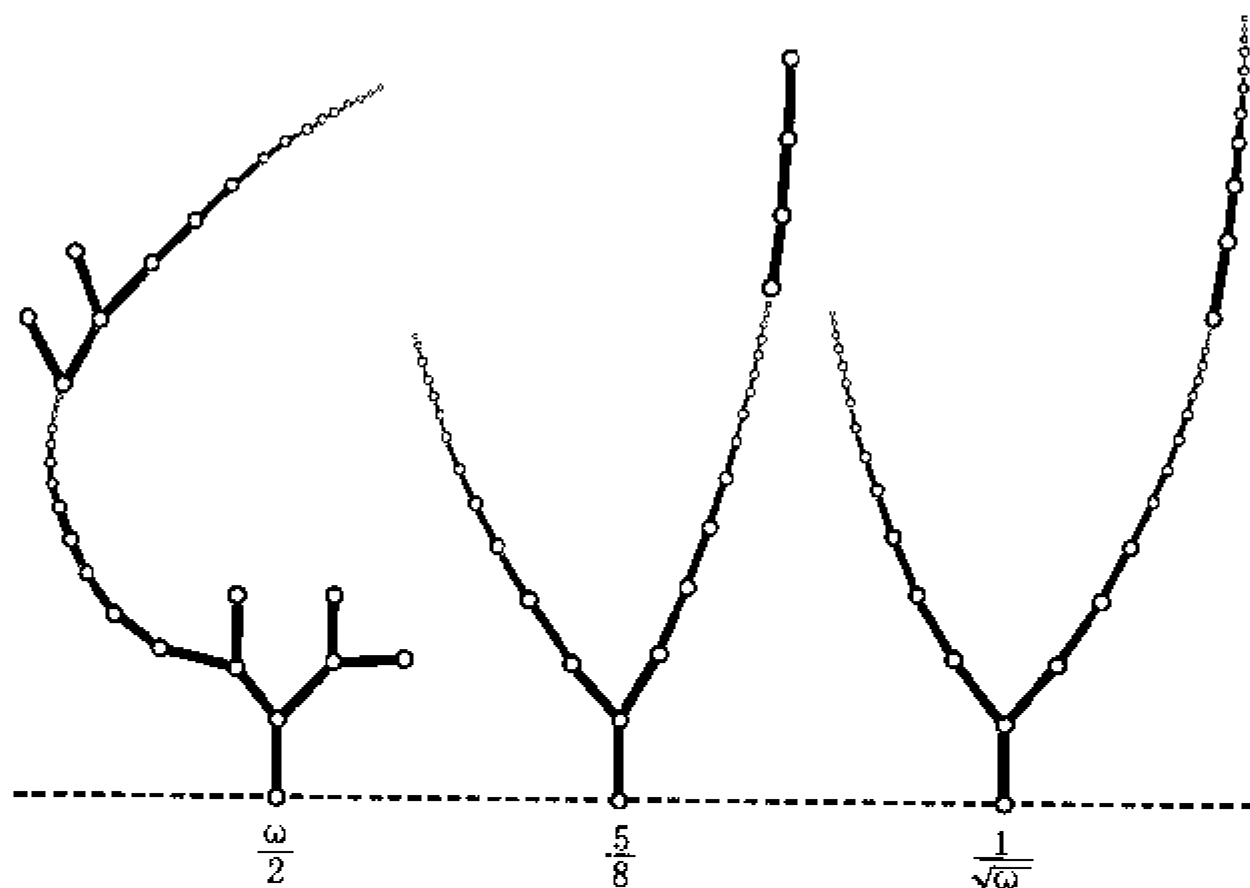
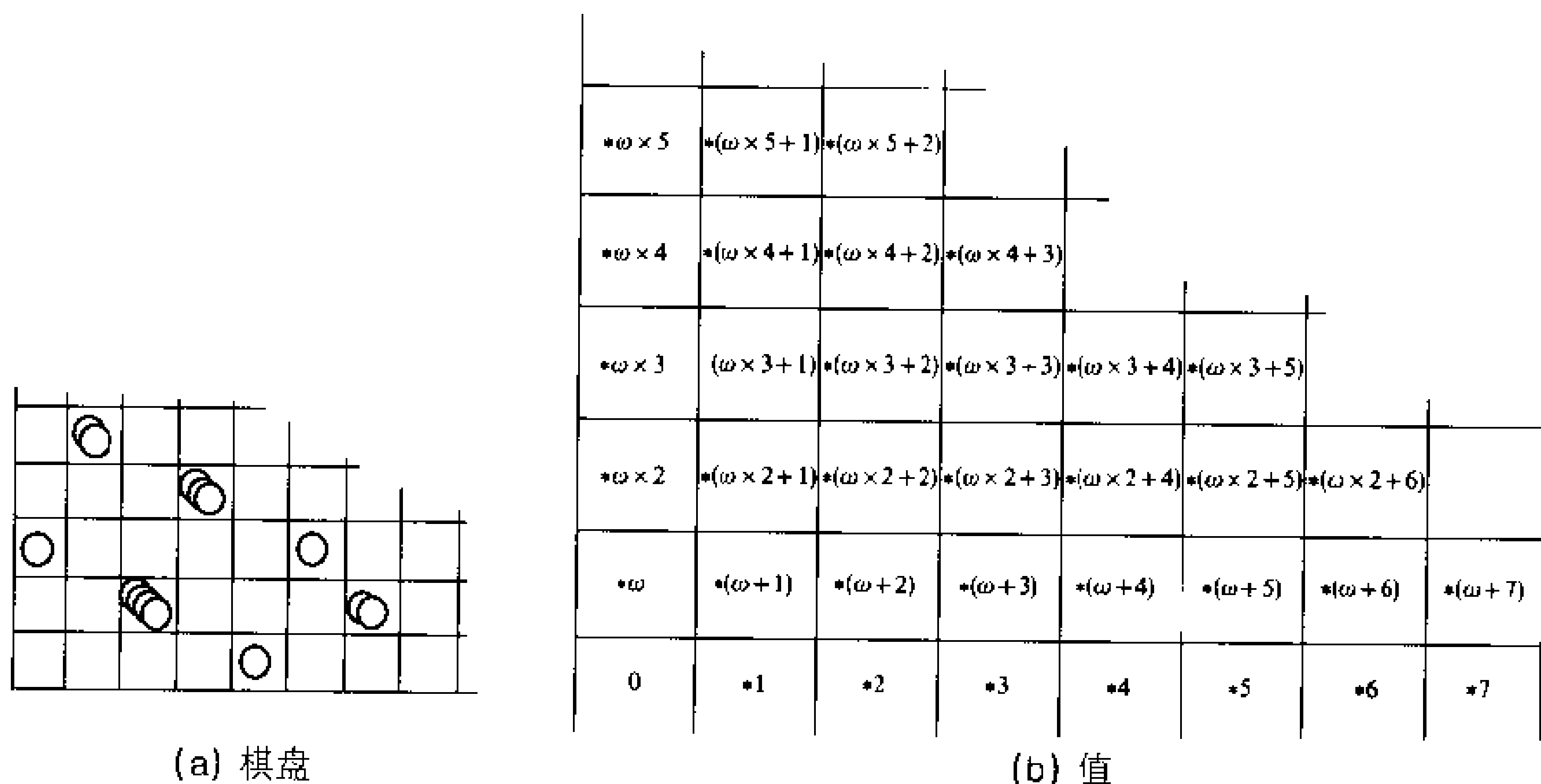



**图 5.** 某些无限树(但分叉数只能有限).



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $*\omega\times 5$ | $*(\omega\times 5+1)$ | $*(\omega\times 5+2)$ | | | | | |
| $*\omega\times 4$ | $*(\omega\times 4+1)$ | $*(\omega\times 4+2)$ | $*(\omega\times 4+3)$ | | | | |
| $*\omega\times 3$ | $(\omega\times 3+1)$ | $*(\omega\times 3+2)$ | $*(\omega\times 3+3)$ | $*(\omega\times 3+4)$ | $*(\omega\times 3+5)$ | | |
| $*\omega\times 2$ | $*(\omega\times 2+1)$ | $*(\omega\times 2+2)$ | $*(\omega\times 2+3)$ | $*(\omega\times 2+4)$ | $*(\omega\times 2+5)$ | $*(\omega\times 2+6)$ | |
| $*\omega$ | $*(\omega+1)$ | $*(\omega+2)$ | $*(\omega+3)$ | $*(\omega+4)$ | $*(\omega+5)$ | $*(\omega+6)$ | $*(\omega+7)$ |
| 0 | $*1$ | $*2$ | $*3$ | $*4$ | $*5$ | $*6$ | $*7$ |

(a) 棋盘　　(b) 值

**图 6.** 双 D 字形尼姆游戏有着美丽而可喜* 的值.

---

* 译者注:原义 Georgous 这个单词的拼法有误,可能作者有意为之(见本书的序言). 应为 Gorgeous,词义为"华丽的,可喜的,极好的".



当然,这类游戏也可以有三维版本,其典型值为

$$*(\omega^2\times a+\omega\times b+c).$$

在希尔伯特空间中,你能给出一个尼姆游戏吗?*

# 无限斯普拉格—格隆第理论与史密斯理论

任何有结尾的无偏博弈 $G$ 都有着一个形式为

$$*\alpha$$

的值,这个 $\alpha$ 是个序数,可能是无穷大. $\alpha$ 的值可以通过局外最小数法则来求得:它是异于

$$\beta,\gamma,\delta,\cdots$$

的最小序数,而

$$*\beta,*\gamma,*\delta,\cdots$$

为 $G$ 中各选择之值.

所以你可应用无限尼姆理论去玩纯绿色伐木游戏,只要它们是有结尾的博弈.

不一定有结尾的无偏博弈也可以通过史密斯理论的类似推广来加以处理,这将在第 12 章中讲到. 它们的值具有形式

$$*\alpha \quad 或 \quad \infty_{\beta\gamma\delta\cdots}.$$

这里的

$$\alpha; \qquad \beta,\gamma,\delta,\cdots.$$

有可能是无限序数.

# 某些超重原子

有些很值得玩一玩的游戏中会出现这样一些值,例如

$$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots|\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}=\mathbb{Z}|\mathbb{Z},$$

以及 $\{\mathbb{Z}|\{\mathbb{Z}|\mathbb{Z}\}\}=\mathbb{Z}\|\mathbb{Z}|\mathbb{Z}$.

(符号 $\mathbb{Z}$ 是全体整数所成之集合的标准记号,即

$$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots)$$

---

* 译者注:尼姆游戏可以推广到高维甚至无穷维空间.

在ONAG书中对它们中的一些指派了专门名称，也揭露了一些关系，例如

$$\infty=\mathbb{Z}\,\|\,\mathbb{Z}\,|\,\mathbb{Z},$$
$$\pm\infty=\infty\,|\,-\infty=\mathbb{Z}\,|\,\mathbb{Z},$$
$$\infty\pm\infty=\infty\,|\,0=\mathbb{Z}\,|\,0,$$
$$\infty+\infty=2\cdot\infty=\mathbb{Z}\,\|\,\mathbb{Z}\,|\,0（\text{“无穷大翻倍”}）.$$

$\infty$与$\pm\infty$在许多方面的性态很像是经过极度放大的$\uparrow$与$*$；事实上有一个无限放大的操作可由下式来定义

$$\int^{\mathbb{Z}} G=\{\int^{\mathbb{Z}} G^L+n\,|\,\int^{\mathbb{Z}} G^R-n\}_{n=0,1,2,\cdots}.$$

实际上我们有

$$\int^{\mathbb{Z}} *=\mathbb{Z}\,|\,\mathbb{Z}=\pm\infty.$$

但是$\uparrow$的积分形式要小于$\mathbb{Z}\,\|\,\mathbb{Z}\,|\,\mathbb{Z}$.

本章的剩余部分将完全致力于有圈博弈.

## 有圈博弈

凡是不满足终止条件的博弈，我们将称之为**有圈的**，因为它们通常都具有由合法行动所组成的闭合回路. 在第12章中，我们将会遇到一些无偏有圈博弈. 但是，在本章中，我们先来讲有偏的情况.

有圈博弈$G$中的一个**玩法**是一个序列，例如，

$$G\to G^L\to G^{LL}\to G^{LLR}\to G^{LLRL}\to G^{LLRLR}\to G^{LLRLRR}\to G^{LLRLRRR}\to\cdots.$$

它们可以有限，也可以无限，甚至也不一定左、右轮流进行. 由几个博弈所组成的和博弈中的玩法可以明显地定义出在个别分支中的玩法；譬如说

$$G+H\to G^L+H\to G^L+H^R\to G^{LL}+H^R\to G^{LLR}+H^R\to G^{LLR}+H^{RL}\to G^{LLRR}+H^{RL}\to G^{LLRR}+H^{RLL}\to\cdots.$$

在$G$中有着分支博弈玩法

$$G\to G^L\to G^{LL}\to G^{LLR}\to G^{LLRR}\to\cdots$$

而在$H$中有着分支博弈玩法

$$H\to H^R\to H^{RL}\to H^{RLL}\to\cdots.$$

注意：从总体玩法上看来，博弈是轮流交替地行走的，但分支玩法却不一定如此.

总体玩法为有限时，正常游戏规则将告诉我们何方可以取胜——轮到他走时却不能走，就

算他输. 但当总体玩法为无限时,我们必须添加其他规则来判定结果. 我们将认为

> 若为无限玩法,则当局中人能在所有分支博弈中取胜时,才认为他赢得了和博弈.
>
> 若在任一无限分支博弈中双方不分胜负,或在两个分支博弈中一胜一负,则视为和博弈是不分胜负的.

## 固定的,混合的,无约束的

所以,当字母

$\gamma$(譬如说)

(我们将使用有圈希腊字母来代表有圈博弈)被用来描述任何分支博弈的构造(即走法或行动)时,我们需要有什么东西来告诉我们 $\gamma$ 中每一个无限玩法的结果. 某些无限玩法是左方得胜的(+),有一些则是右方得胜的(−),其余则是双方不分胜负的(±,或空白). 记号

$\gamma^{\bullet}$

指出一种特别方法来作出这些判断,而特例

$\gamma^{+}$　及　$\gamma^{-}$

则指出 $\gamma$ 的一些变异,其中一切无限玩法也将作类似处理,即 $\gamma^{+}$ 表示左方取胜,$\gamma^{-}$ 表示右方取胜.

如果**没有**一种无限玩法是不分胜负的,则我们将视为 $\gamma^{\bullet}$ 已被**固定**下来　　特别地说来,$\gamma^{+}$ 与 $\gamma^{-}$ 就是 $\gamma$ 的两种固定形式,分别对左方与右方最为有利. 如果我们略去上标,则理解为一切无限玩法都是不分胜负的,这时将把 $\gamma$ 说成是**无约束的**(自由的或游离的). 若博弈 $\gamma^{\bullet}$ 中有某些无限走法是不分胜负的,有些又不是,则认为它是**混合的**.

在图 7 中,每个局势 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ 都有着一个筹码. 左方的走法是沿着一条蓝边按所指的方向滑动该筹码,而右方则沿着红边滑行. 如果一切无限玩法都是不分胜负的,试问结局将如何?

(a) 若左方先走　　　　(b) 若右方先走.

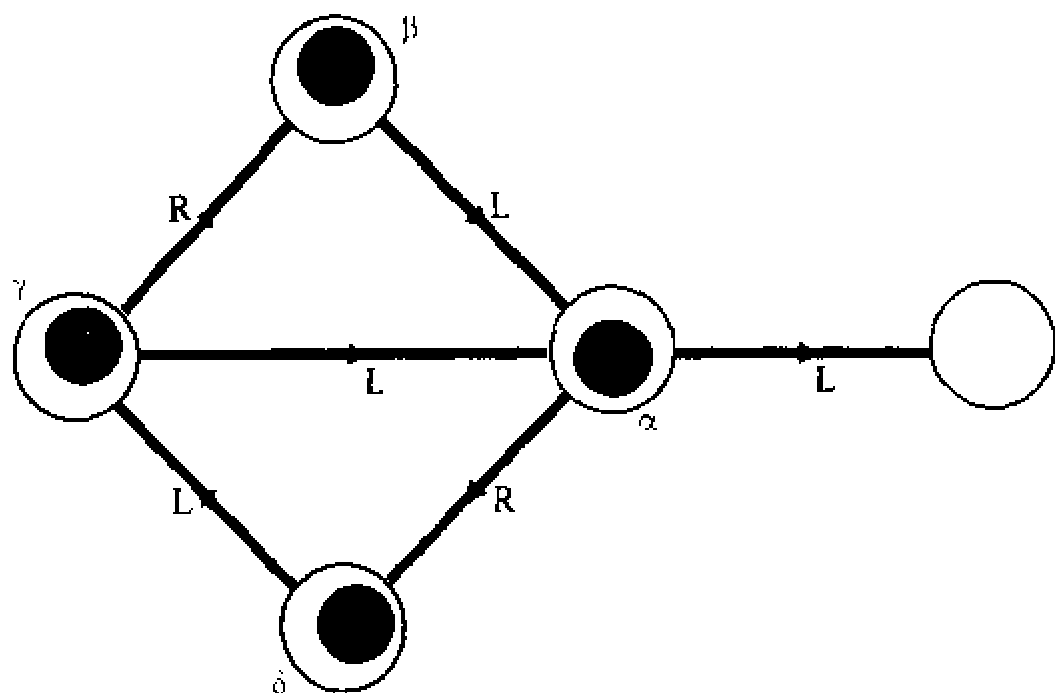



**图 7.** 如果一切无限玩法全都不分胜负,试问结果如何?

## 即边与离边*,上和与下和

我们确实对自由(无约束)博弈的相加极感兴趣,此时所有的无限玩法都视为不分胜负. 现在要将我们的博弈计划告诉你.

一般地说,存在着一种办法,用两种少圈博弈 $s$ 与 $t$ 来分析一个有圈博弈 $\gamma$. 我们用下列记法

$$\gamma = s \,\&\, t, s=\gamma(\mathbf{on}), t=\gamma(\mathbf{off})$$

来表示这种关系,博弈 $s,t$ 称为 $\gamma$ 的**边**,$s$ 叫**即边**而 $t$ 叫**离边**. 这些边通常是有终端的博弈,也叫**有尾游戏**,例如 $1,4\frac{1}{2},\uparrow,*$ 等,而在几乎一切其他情况,它们是**停止游戏**,可是也同样好处理(恒有 $s \geqslant t$).

在把这种博弈相加时你需要知道**上和**($a \mathbin{\bar{+}} c$)与**下和**($b \mathbin{\underline{+}} d$),因为

当你想把不分胜负视为左方获胜时,与之有关的为即边(上和),而当你视为右方获胜时,与之有关的为离边(下和). 实际上有圈博弈论是一种有点像双光眼镜式的,两边都能看的有终端

---

* 译者注:onside 与 offside 有多种词义:但任何一种意义用在此处都不太适合;onside 的大致意思是不越位,左边,正面,有利的一边;offside 的大致意思则是越位,右边,反面,较劣的一边.

英国人走路靠左行驶,但世界上大多数国家则靠右行驶;我国古代以右为上,1950 年代至 1970 年代则宁左勿右;我国成语中又有不即不离,若即若离等说法. on 的本义为闭合,就是"即",off 的本义则为断开,就是"离". 故取其最近似的词义译作"即边"与"离边". 请读者鉴之.

博弈理论(图 8)!

$$
\begin{array}{llllll}
\text{当} & \gamma & = & a & \& & b \\
\text{与} & \delta & = & c & \& & d \\
\hline
\text{则} & \multicolumn{5}{l}{\gamma+\delta=(a \curlywedge c)\ \&\ (b \curlyvee d).}
\end{array}
$$

| |
|---|
| 用 |
| 上和　表示　即边! |
| 下和　表示　离边! |

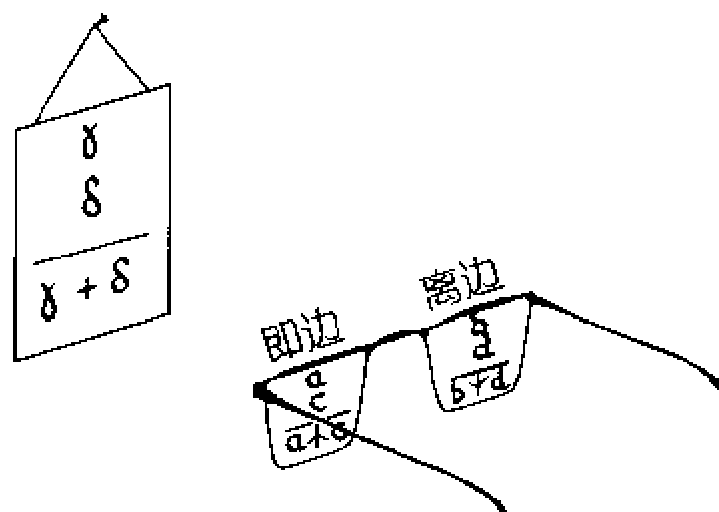



**图 8.** 观看图形的两边.

不过,当你理解了这一切的全部意义之后,它将同普通的博弈理论同样容易,我们想把你顺顺当当地领进门……

# 停止游戏

所谓**停止游戏** $g$ 是指一种博弈,它本身在玩的时候,没有最终**交替**(左右轮流)的无限合法行动序列

$$g \to g^X \to g^{XY} \to \cdots \to g^{XY\cdots L} \to g^{XY\cdots LR} \to g^{XY\cdots LRL} \to \cdots$$

所以,不论你从何种局势开始玩,游戏最终都将停**止**,玩不下去了.(但此时博弈未必就结束了,因为没有轮到的一方或许还是能走).

我们将使用小写拉丁字母($a,b,\cdots,g,s,t,\cdots$)代表停止游戏,当我们写出

$$\gamma(\mathbf{on})=s,\ \ \gamma(\mathbf{off})=t \text{ 时},$$

我们要想说的全部意思就是 $s,t$ 是停止游戏，且有

$$\gamma^{+}=s^{+},\ \gamma^{-}=t^{-},$$

所以如果认为一切平局(不分胜负)都算左方赢的话，那么 $\gamma$ 就用 $s$ 来取代，把平局看成右方赢时，则 $\gamma$ 就可用 $t$ 来取代. 由于 $s,t$ 的值完全决定了 $\gamma$ 的值，于是我们可以记为

$$\gamma=s\ \&\ t.$$

注意，若 $\gamma$ 已经是一个停止游戏，譬如说……

$$\gamma=c,$$

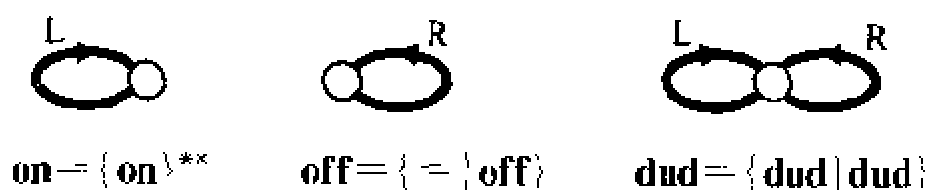
则
$$\gamma(\mathbf{on})=\gamma(\mathbf{off})=c,$$

从而
$$\gamma=c\ \&\ c.$$

但要小心！并非一切游戏都有停止游戏作为即边与离边的. 请看本章增补材料中的巴赫氏旋转木马.

## 即，离，哑*

现在让我们来看一看最简单的有圈博弈. 你不会得到比这更简单的，只有一个局势的博弈了：




在"哑"局势中双方都能行动，但在"即"局势中只有左方能行动，在"离"局势中只有右方能行动. 不过在所有这些情况下唯一合法的行动只能是"派司"，即回到原来的状态.

容易看出

$$\mathbf{dud}=\mathbf{on}\ \&\ \mathbf{off}.$$

## "即"(on)究竟有多大?

好，不难看出左方在 on－5 游戏中能够取胜，因为他一直可以从 on 走到 on，直到右方耗尽

---

* 译者注：原文为 dud，即哑弹(不爆炸的炮弹)、不中用的东西等意思，正式定义见下页.

** 译者注：尽管 on，off，dud 等都已有了中文词意，但一般仍使用符号，犹如我们虽然知道正弦、余弦的意思，但使用时实际还是书写 sin，cos 的道理一样.

他能走的 5 步为止. 事实上,

$$\mathbf{on}>0,\ \mathbf{on}>1,\ \mathbf{on}>2,\cdots$$

所以 **on** 是无限的;但现在我们已经遇到了一批无穷大,而不是只有一个,那么 **on** 同 $\omega,\omega^2,\omega^\omega,\omega^{\omega^\omega},\cdots$相比起来又怎样呢? 回答是:

## 它比这一切都要大!

理由如下. 若 $G$ 为任一有结尾的博弈,则左方可用完全类似的办法赢得

$$\mathbf{on}-G$$

他只要一直采取从 **on** 走到 **on** 的伎俩,由于 $G$ 是有终端的博弈,于是终究有一天右方不能行动了. 所以说 **on** 是一类超级无穷大数.

在数学逻辑中,**on** 这个名词是个缩写,它用来表示一切序数(**O**rdinal **n**umbers)的集合.(第一单词取 $o$,第二单词取 $n$,造出新单词),它是一种大于一切正常序数的非常序数. 我们已经使用了这一名称,并决定采用 **off** 来表示它的负数. 也许你将认为

$$\mathbf{on}+\mathbf{off}$$

会等于 0,但如果你看一看左方与右方的选择,

$$\mathbf{on}+\mathbf{off}=\{\mathbf{on}+\mathbf{off}\mid\mathbf{on}+\mathbf{off}\},$$

你将看到对每个局中人来说,它不过是其仅有的唯一局势的派司动作. 换句话说,它是一个我们要称之为

**dud**=**d**eathless **u**niversal **d**raw

(永恒的平局)

的博弈. 不管你再添加别的什么游戏同它在一起玩,任何人都没有本事将博弈走到尽头,所以

$$\mathbf{dud}+\gamma=\mathbf{dud}.$$

> 如果有一个分支博弈是 **dud**,那么整个和博弈也将是 **dud**!

## 侧身挨近博弈

这里有一个好办法来估量(或削减、删节到一定程度)某些有圈博弈的值. 先从上面或下面

来取博弈值的近似，你就可以用条件等式的形式来定义你的博弈，然后再一步步地挨近它，得到更好的近似值. 例如，将不等式

$$\mathbf{on} \geqslant 0$$

改用等式来定义

$$\mathbf{on} = \{\mathbf{on}\mid\ \},$$

我们就能推导出

$$\mathbf{on} \geqslant \{0\mid\ \} = 1,\text{于是 } \mathbf{on} \geqslant \{1\mid\ \} = 2,\cdots$$

对一切整数来说，侧身挨近过程永远不会停顿下来！它蕴含着

$$\mathbf{on} \geqslant \{0,1,2,\cdots\mid\ \} = \omega,\text{从而有 } \mathbf{on} \geqslant \{\omega\mid\ \} = \omega + 1,\cdots$$

$\mathbf{on} \geqslant \omega^{\omega}$,……这样可以一直进行下去，而无需考虑任何策略细节.

现在让我们来看一个更复杂的挨近实例. 图 7 的那个博弈有五个状态 $0,\alpha,\beta,\gamma,\delta$，定义它们的条件等式为

$$0 = \{\ \mid\ \},\qquad \alpha = \{0\mid\delta\},\qquad \beta = \{\alpha\mid\ \},\qquad \gamma = \{\alpha\mid\beta\},\qquad \delta = \{\gamma\mid\ \}.$$

它们的值究竟有多大？由于我们对情况茫无所知，只好在定义它们的条件等式中先放上一个显然的上界

$$\alpha \leqslant \mathbf{on},\qquad \beta \leqslant \mathbf{on},\qquad \gamma \leqslant \mathbf{on},\qquad \delta \leqslant \mathbf{on}$$

于是得以相继推出

$$\alpha \leqslant \{0\mid\mathbf{on}\} = 1,$$

$$\beta \leqslant \{1\mid\ \} = 2,$$

$$\gamma \leqslant \{1\mid 2\} = 1\frac{1}{2},$$

$$\delta \leqslant \left\{1\frac{1}{2}\,\middle|\ \right\} = 2,\cdots$$

于是 $\alpha \leqslant \{0\mid 2\} = 1$.

这同以前我们曾经得到过的一模一样. 所以照这样继续下去的话，我们将不会得出比

$$\alpha \leqslant 1,\qquad \beta \leqslant 2,\qquad \gamma \leqslant 1\frac{1}{2},\qquad \delta \leqslant 2$$

更好的上界.

但是，我们也可以从明显的**下界**开始

$$\alpha \geqslant \mathbf{off},\qquad \beta \geqslant \mathbf{off},\qquad \gamma \geqslant \mathbf{off},\qquad \delta \geqslant \mathbf{off},$$

并由此推导出经过改善的下界：

$$\beta \geqslant \{\mathbf{off}|\ \} = 0,$$
$$\gamma \geqslant \{\mathbf{off}|0\} = -1,$$
$$\delta \geqslant \{-1|\ \} = 0,$$
$$\alpha \geqslant \{0|0\} = *,$$
$$\beta \geqslant \{*|\ \} = 0,$$
$$\gamma \geqslant \{*|0\} = \downarrow,$$
$$\delta \geqslant \{\downarrow|\ \} = 0.$$

重复出现的 $\delta$ 值表明该过程再次是收敛的，因此再也得不出比下面更好的下界了：

$$\alpha \geqslant *, \qquad \beta \geqslant 0, \qquad \gamma \geqslant \downarrow, \qquad \delta \geqslant 0.$$

## 挨近法挑出即、离两边

挨近过程给出的上界与下界究竟是什么东西呢？挨近定理断言，它们恰恰就是你的博弈的两边

| 从 **on** 出发的挨近给出了即边.<br>从 **off** 出发的挨近给出了离边. |
|---|

**挨近定理**

在本章增补材料中有着它们的证明. 但是，为了应用定理，不必理会这种证明. 譬如说，在我们的例子中，已知

$$\alpha \leqslant 1, \qquad \beta \leqslant 2, \qquad \gamma \leqslant 1\frac{1}{2}, \qquad \delta \leqslant 2,$$
$$\alpha \geqslant *, \qquad \beta \geqslant 0, \qquad \gamma \geqslant \downarrow, \qquad \delta \geqslant 0,$$

从而根据挨近定理我们可以写出

$$\alpha(\mathbf{on}) = 1, \qquad \beta(\mathbf{on}) = 2, \qquad \gamma(\mathbf{on}) = 1\frac{1}{2}, \qquad \delta(\mathbf{on}) = 2,$$
$$\alpha(\mathbf{off}) = *, \qquad \beta(\mathbf{off}) = 0, \qquad \gamma(\mathbf{off}) = \downarrow, \qquad \delta(\mathbf{off}) = 0,$$

也就是

$$\alpha = 1\ \&\ *, \qquad \beta = 2\ \&\ 0, \qquad \gamma = 1\frac{1}{2}\ \&\ \downarrow, \qquad \delta = 2\ \&\ 0.$$

从图 7 中每个结点处的一个筹码出发，将给出值

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\varepsilon.$$

于是挨近定理告诉我们，$\varepsilon^{+}$ 就是即边，即

$$1+2+1\frac{1}{2}+2=6\frac{1}{2}.$$

由于它是正数，所以如果无限地走下去作为左方获胜的话，那么，不论哪一方先走，他总是能赢的. 但若无限地走下去视为右方获胜时，则 $\varepsilon^{-}$ 为离边

$$*+0+\downarrow+0=\downarrow *,$$

这是一种模糊局势，所以是先走者获胜的局面.

如果左方先走，那么不管我们对无限进行下去的博弈作出什么规定，左方总是必胜的；但如果右方先走，而博弈无限持续时，则若结果为：

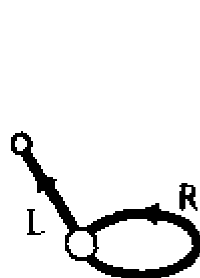
$\varepsilon^{+}$ 时，　左方得胜；
$\varepsilon^{-}$ 时，　右方得胜；
$\varepsilon$ 本身，　双方打成平局.

## 停止物只有一边

我们已经看到，对停止物 $s$ 而言，两边是相等的，

$$s=s\ \&\ s.$$

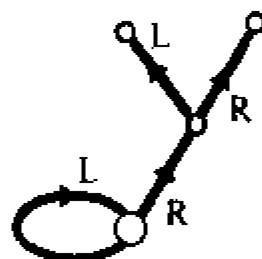
博弈　**over**，　**under**，　**upon**　与　**upon***
就是简单的例子：



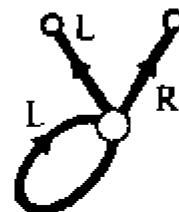
**over**=0|**over**



**under**=**under**|0



**upon**=**upon**|*



**upon** * ={0, **upon** * |0}

对这些博弈来说用什么方式挨近是无关紧要的，例如对

---

* 译者注：这些博弈的汉语意思很近似，容易混淆，还是使用它们的符号与定义，不译为好.

$$\mathbf{over} = 0 \mid \mathbf{over}$$

我们得出上界

$$\mathbf{on},\ 0\mid\mathbf{on}=1,\ 0\mid 1=\frac{1}{2},\ 0\left|\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\ \cdots,\left\{0\left|1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\right.\right\}=\frac{1}{\omega},\ 0\right|\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2\omega},\ \cdots$$

这就暗示

$$\mathbf{over}=\frac{1}{\mathbf{on}}.$$

如从下面挨近，情况又如何呢？由于 **over** 显然是正的，我们可以从 0 开始而不必从 **off** 开始，这样就得到一些下界

$$0,\ 0\mid 0=*,\ 0\mid *=\uparrow,\ 0\mid\uparrow=\Uparrow *,\ 0\mid\Uparrow *=⤊,\ \cdots$$

它确实是从下面趋向于$\frac{1}{\mathbf{on}}$的.

> 对一个停止物来说，两种挨近法都趋向于同一处.

所以，在挨近停止物时，你可以节约大量时间，因为随你高兴，可从任何地方开始. 例如，对

$$\mathbf{upon} = \mathbf{upon} \mid *$$

来说，从 0 开始时，我们得出

$$0,\ 0\mid *=\uparrow,\ \uparrow\mid *=\uparrow+\uparrow^{2},\ (\uparrow+\uparrow^{2})\mid *=\uparrow+\uparrow^{2}+\uparrow^{3},\ \cdots,$$

它在暗示，其值是超无穷级数之和，即

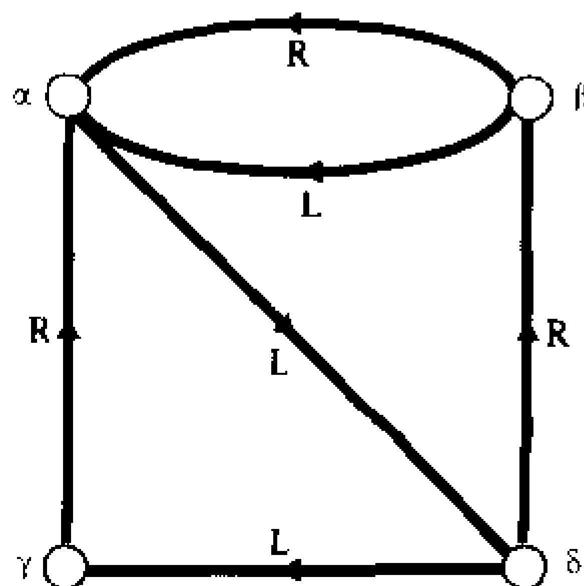
$$\uparrow+\uparrow^{2}+\uparrow^{3}+\cdots+\uparrow^{\omega}+\uparrow^{\omega+1}+\cdots+\uparrow^{\omega\times 2}+\cdots+\uparrow^{\omega^{2}}+\cdots.$$

（我们已在第 8 章中遇到过 $\uparrow^{2}$ 与 $\uparrow^{3}$；$\uparrow^{\alpha}$ 是一个明显的推广.）当然，由于 ↑ 的后面一些乘幂同 ↑ 相比时都是无穷小量，因而 **upon** 还是要比 ⇑ 来得小一些. 由于

$$\mathbf{under} = -\mathbf{over},$$

$$\mathbf{upon}* = \mathbf{upon} + *,$$

所以另外两个例子不必再去讨论了.

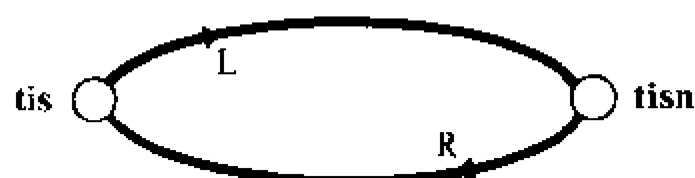



练习一　求右图的值：

并将你的结果同本章增补里的答案进行对照.

## 它是！——它不是！——它是！——它不是！……

这是一种人们熟悉的儿童游戏，左方喊："它是"，右方喊"它不是"，左方又喊："它是"，这样一直喊下去，任何一方都不能连走两步，如附图所示.




用符号表示时，

$$\mathbf{tis}=\{\mathbf{tisn}\mid\ \},\ \mathbf{tisn}=\{\ \mid\mathbf{tis}\}.$$

用挨近办法可证明

$$\mathbf{tis}=1\ \&\ 0,\ \mathbf{tisn}=0\ \&\ -1.$$

若指定一方先走，又把一切无休无止的走法视为平局，试问：

$$\mathbf{tis}+*$$

的结局是什么呢？

## 有圈伐木游戏

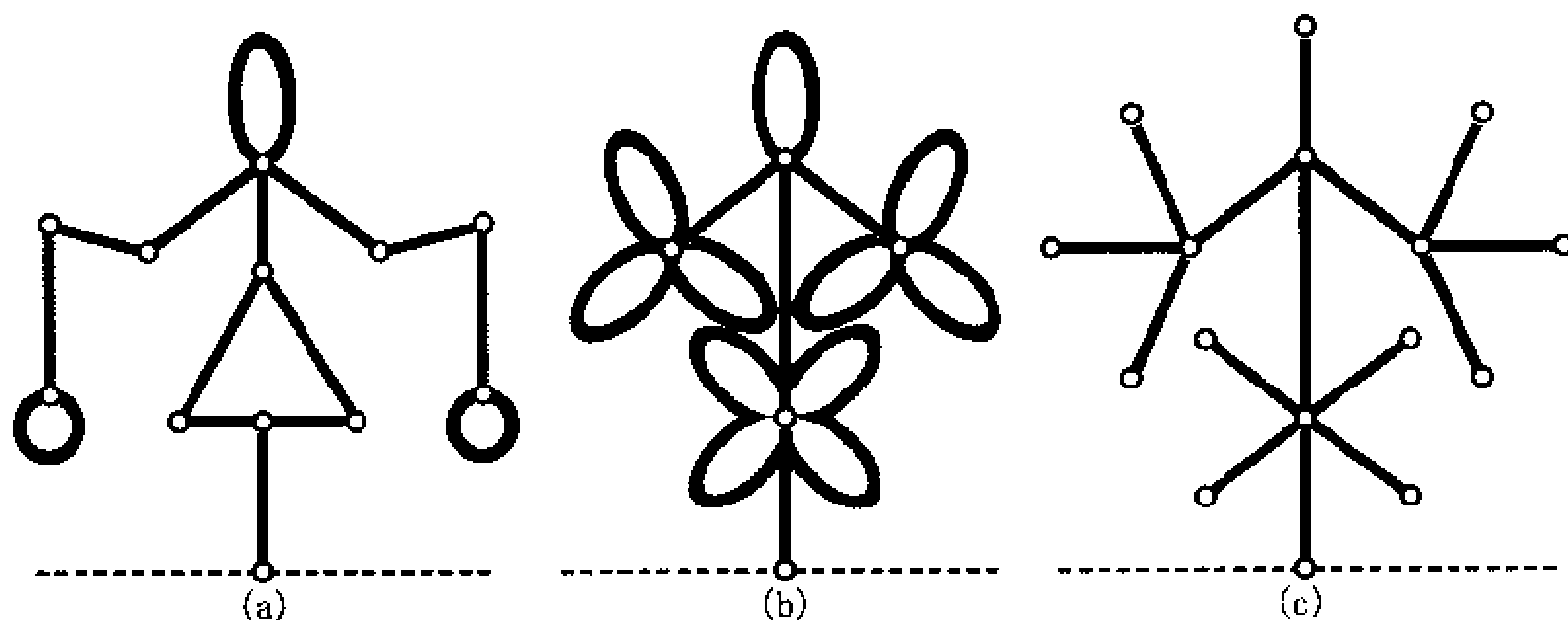



图 9. 小女孩形状的游游玩具. *

---

* 译者注：游游（yo-yos）是一种线轴形玩具，中间绕有拉线，拉动此线后，它会因自身的重量和冲力上升或下降；但这里的游游也有双关意思，按美国俚语解释，乃是指容易受人左右摆布的傻瓜或笨蛋.



此游戏由鲍勃·李引进，他称之为**双重伐木游戏**. 除了通常伐木游戏的红、蓝边外，还要添上**粉红边**与**灰白边**(即淡蓝边)，见图 9(a). 除了旧有的走法以外，还有两种新走法：

左方可将任何一条灰白边改为粉红色；

右方可将任何一条粉红边改成灰白色.

粉红边与灰白边不准砍掉.

如果把各种颜色的边

红　粉红　空缺　灰白　蓝

想像为具有标号

$$-1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad +1,$$

则我们可以把适用于四种色边的规则表述为：

左方可以把正标号减少 1，而

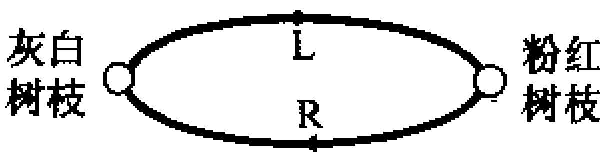
右方可以把负标号增大 1.

## 怎样解开有圈伐木游戏

由于新的粉红与淡蓝边永远不准砍伐，所以把这类色边的两端联结起来将不会影响游戏的演进，于是我们可以把这种边弯成环圈(见图 9(b))，进而又用**树枝**取代环圈(见图 9(c)). 就像是我们在绿色伐木游戏中应用熔接原理那样(见第 7 章).

所以只要把有圈伐木游戏中一切粉红与淡蓝边都看成树枝就行. 现在要问，它们的值究竟如何?

由于规则提供了行动：




所以其答案是

| |
|---|
| 淡蓝树枝是 **tis**，<br>粉红树枝是 **tisn.** |

由于

$$\text{tis}=1\ \&\ 0,\ \text{tisn}=0\ \&\ -1,$$

这就给了我们一条极简单的规则来处理各种颜色边：

| |
|---|
| 对即边* 来说，将淡蓝边代之以蓝边，删去粉红边； |
| 对离边* 来说，将粉红边代之以红边，删去淡蓝边. |

**有圈伐木游戏的李氏法则**

但在应用上述法则时要当心！你首先应当把熔接过程用到一切淡蓝与粉红边上去.

由于李氏法则把红、粉红、淡蓝、蓝色的有圈伐木游戏简化为普通的蓝—红伐木游戏，这就表明博弈值肯定具有以下的形式

$$\text{数}\ \&\ \text{数}.$$

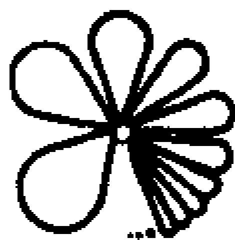
譬如说，图 9 的值就是

$$-\frac{1}{64}\ \&\ -\frac{5}{8}.$$

## 有圈无限伐木游戏

即使没有粉红色或淡蓝色边，无限伐木游戏仍然可能存在着反复循环之值. 例如，我们曾在第 2 章中遇到过的飞燕草（见图 22），设其值为 $d$，则

$$d=\{0,d|0\}.$$





这是由于，拿掉一朵蓝色花瓣之后，剩下来的飞燕草还是同原来的一模一样. 所以它的值是 **upon** $*$.

---

* 译者注：实际就是指左方与右方.

在图 10 中给出了一些无限伐木游戏的图与值. 有的图形中还有淡蓝边与粉红边,但这并不意味着增加了一般性,因为李氏法则是继续有效的.

不要把此类伐木游戏图形与本章其他地方出现的、带有箭头以表示合法动作的图形加以混淆.

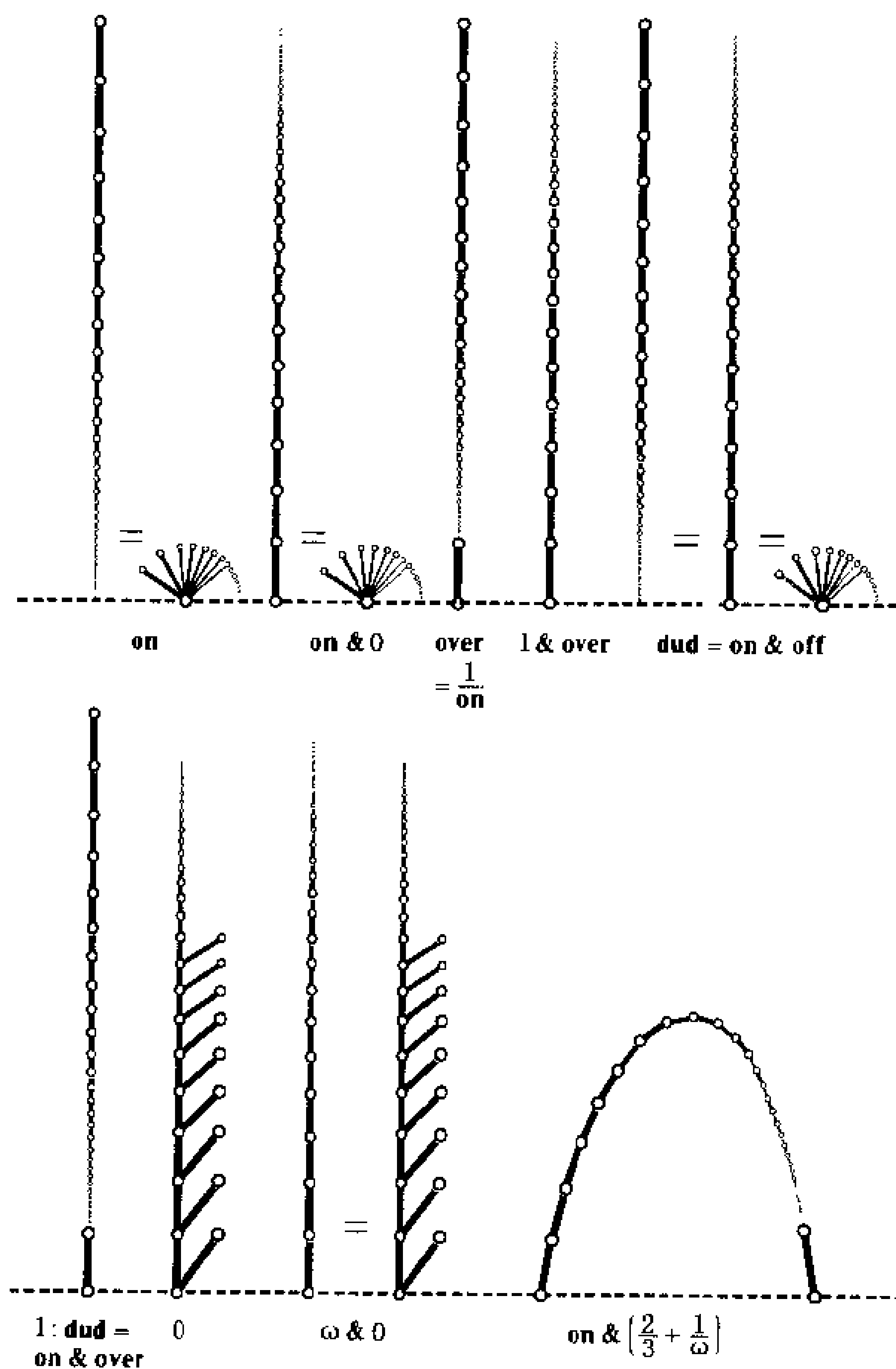



图 10. 庞大而有圈的伐木游戏图.

## 西西弗斯*游戏

西西弗斯推石上山，
永远无休无息，
完全白费精力！

朗费罗：《潘朵拉**的面具》（复仇三女神合唱）

这是一个可以让你练练挨近技法的游戏.

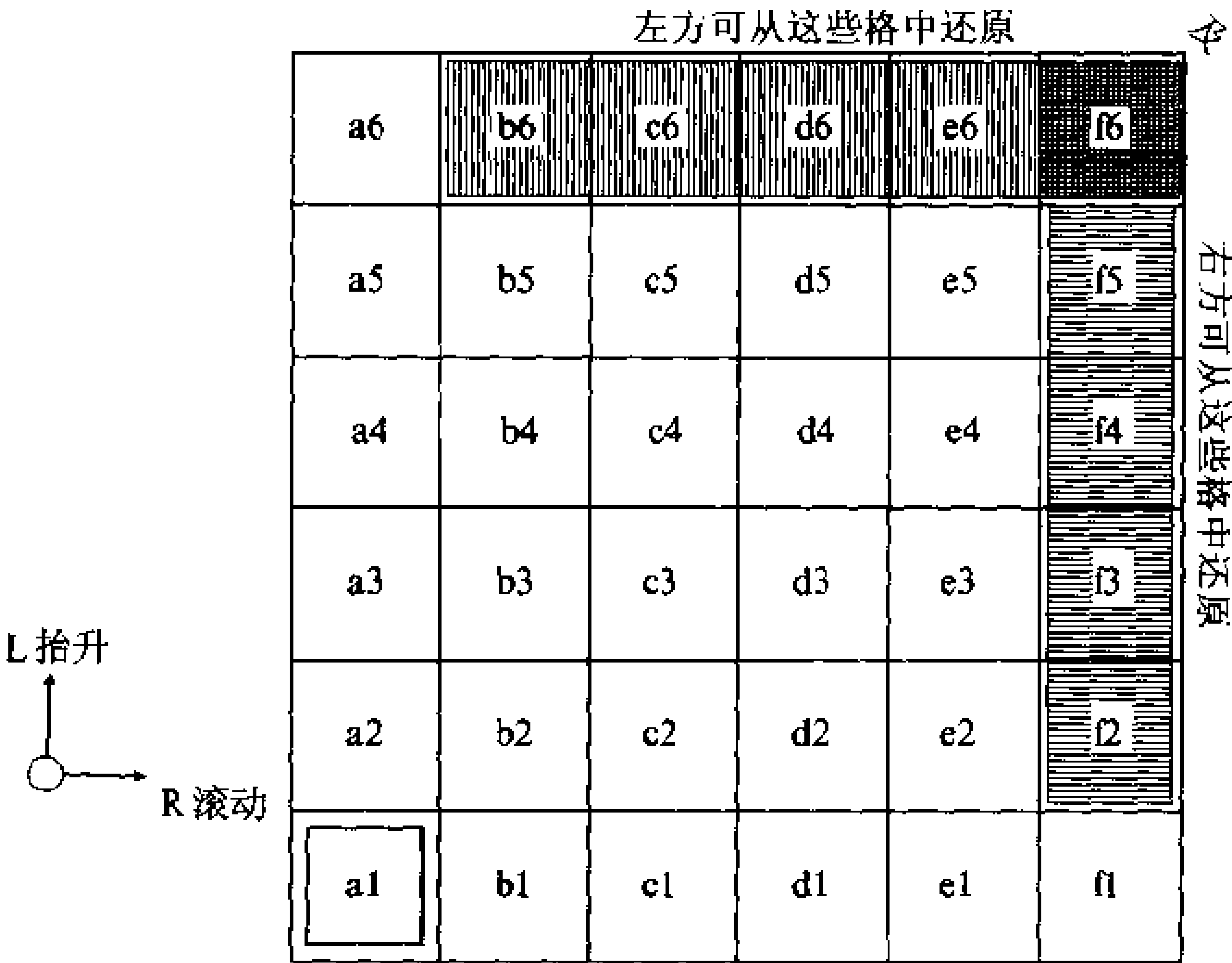



图11. 一个西西弗斯棋盘

---

* 译者注：根据希腊神话，西西弗斯是希腊古代暴君，死后堕入地狱，上帝罚他推石上山，但当石头接近山顶时又会滚下来，于是重新再推，永远无休无止，循环不息.

** 译者注：潘朵拉（Pandora）是主神宙斯命火神用粘土制成的人类第一个女性，宙斯命她带着一个盒子下凡，潘朵拉私自打开盒子，于是里面的疾病，罪恶等各种祸害全都跑出来散布到世上，显然这种说法同《水浒传》的楔子“洪太尉误走妖魔”极为类似.

开始时，在任一方格里放着任意数量的石子. 轮到他走时，右方可将任意一块石头向右**滚动**一格，而左方则可把一块石头向上**抬升**一格. 如果在 b6 , c6 , d6 , e6 , f6 等格子里有一块石头，则左方还有一种外加的选择，即把石头**还原**到 a1 ；同样，在 f2 , f3 , f4 , f5 , f6 中的一块石头可被右方还原到 a1 .

为了求出即边，我们来挨近第一列：

a6 ≤ |on 0, a5 ≤ 0|on −1, a4 ≤ 1 on −2, a3 ≤ 3, a2 ≤ 4, a1 ≤ 5,

然后从右上角来看其西南方* 各方格：

f6 ≤ 5|5 = 5*， e6 ≤ 5|5* = 5↑， f5 ≤ 5*|5 = 5▾， e5 = 5▴|5▾ = 5*，

d6 ≤ 5|5↑ = 5⇑*， f4 ≤ 5▾|5 = 5⇓*，…

从而得出图 12 所示的**暂时性**近似.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5⤊* | 5⤊ | 5↑* | 5▴ | 5* |
| 1 | 5⤊ | 5⇑* | 5↑ | 5* | 5↓ |
| 2 | 5⇑* | 5↑ | 5* | 5▾ | 5⇓* |
| 3 | 5↑ | 5* | 5↓ | 5⇓* | 5⇓ |
| 4 | 5* | 5↓ | 5▾* | 5⇓ | 5⇓* |
| 5 | 5↓ | 5⇓* | 5⟱ | 5⟱* | 5 |

**图 12.** 西西弗斯游戏则边的首次近似.

但是现在我们得出

$$\boxed{a1} \leqslant 4|5\downarrow = 4\frac{1}{2}，于是\boxed{f6} \leqslant 4\frac{1}{2}\Big|4\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}*.$$

除了最底下一行变为

---

* 译者注：指向左下方移动，作者的文风比较随便，东南西北与上下左右经常不加区别.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $4\frac{1}{4}$ | $4\frac{1}{2}\downarrow$ | $4\frac{1}{2}\downarrow *$ | $4\frac{1}{2}\Downarrow$ | $4\frac{1}{2}$ | 5 |

之外，所有其他的 5s 都要被 $4\frac{1}{2}$s 取代.

由于

$$\boxed{f1}\leqslant\left\{4\frac{1}{2}\Downarrow *\middle|\ \right\}=5,\cdots,\boxed{a1}\leqslant\left\{4\middle|4\frac{1}{2}\right\}=4\frac{1}{4}.$$

我们现在发现所有的 $4\frac{1}{2}$s 都应被 $4\frac{1}{4}$s 取代，而后者又可进一步代之以 $4\frac{1}{8}$s，就这样依次类推下去，直到最后，取代过程收敛于图 13 为止.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $4\frac{1}{32}\Uparrow *$ | $4\frac{1}{32}\Uparrow$ | $4\frac{1}{32}\Uparrow *$ | $4\frac{1}{32}\uparrow$ | $4\frac{1}{32}*$ |
| 1 | $4\frac{1}{32}\Uparrow$ | $4\frac{1}{32}\Uparrow *$ | $4\frac{1}{32}\uparrow$ | $4\frac{1}{32}*$ | $4\frac{1}{32}\downarrow$ |
| 2 | $4\frac{1}{32}\Uparrow *$ | $4\frac{1}{32}\uparrow$ | $4\frac{1}{32}*$ | $4\frac{1}{32}\downarrow$ | $4\frac{1}{32}\Downarrow *$ |
| 3 | $4\frac{1}{32}\uparrow$ | $4\frac{1}{32}*$ | $4\frac{1}{32}\downarrow$ | $44\frac{1}{32}\Downarrow *$ | $4\frac{1}{32}\Downarrow$ |
| 4 | $4\frac{1}{32}*$ | $4\frac{1}{32}\downarrow$ | $4\frac{1}{32}\Downarrow *$ | $4\frac{1}{31}\Downarrow$ | $4\frac{1}{32}\Downarrow *$ |
| $4\frac{1}{32}$ | $4\frac{1}{16}$ | $4\frac{1}{8}$ | $4\frac{1}{4}$ | $4\frac{1}{2}$ | 5 |

**图 13.** 西西弗斯游戏的即边.

在求离边时，当然可以将行与列对调，并将各值乘上 −1，

例如

$$\boxed{d1}=4\frac{1}{4}\&-2,\qquad \boxed{d2}=4\frac{1}{32}\downarrow *\&\left(-4\frac{1}{32}\right)\Downarrow *.$$

## 不必害怕同环圈生活在一起

利用迄今为止你所学到的知识，你应该有能力计算实际中所遇到的绝大多数有环圈的游戏. 如果你需要更多的例子，请阅读本章接近结束的那些段落. 在那里我们将为你提供更多的概

念，专家们曾利用它们来简化计算.

## 环圈游戏的比较

由于环圈游戏的边并非永远都是终端，我们需要一种对它们作出比较的办法. 这个问题在**确定**博弈（没有平局）的场合，解决得最好.

> 若 $\alpha^\bullet$ 与 $\beta^\bullet$ 是确定博弈，则在右方先走时，如果左方能作出一种安排以便在博弈 $\alpha^\bullet-\beta^\bullet$ 中取胜或打成平局，则有 $\alpha^\bullet\geqslant\beta^\bullet$

**不等式法则**

此项条件就是，若右方永远先走时，左方能**避免输棋**. 或者说，可以在博弈 $\alpha^\bullet\cdot\beta^\bullet$ 中**存活**下来.

由此可见，$\alpha^\bullet-\beta^\bullet$ 中的任一走法必将产生分支博弈 $\alpha^\bullet$ 与 $-\beta^\bullet$ 中的相应，而后者又是 $+\beta^\bullet$ 中的镜像走法. 仔细察看一下表 1，可以表明左方应安排如下策略：

> 在右方的每一步动作之后，左方的一步　　（保持）
> 应使在 $\alpha^\bullet$ 与 $\beta^\bullet$ 中导致的结果
> 具有 $\mathrm{sign}(\alpha^\bullet)\geqslant\mathrm{sign}(\beta^\bullet)$　　（在上面）

**存活条件**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{sign}(\alpha^\bullet)$ | + | + | + | 0 | 0 | 0 | | | |
| $\mathrm{sign}(-\beta^\bullet)$ | + | 0 | | + | 0 | − | − | 0 | − |
| 左方能否避免输棋？ | 是 | 是 | 是 | | 是，若(i) | 非 | 是 | 非 | 非 |
| $\mathrm{sign}(+\beta^\bullet)$ | − | 0 | + | | 0 | + | − | 0 | − |
| $\mathrm{sign}(\alpha^\bullet)\geqslant\mathrm{sign}(\beta^\bullet)$ 能否成立？ | 是 | 是 | 是 | 是 | 是 | 非 | 是 | 非 | 非 |

**表 1.** 符号的意义.

在表中，+，- 分别表示左方或右方获胜的无限博弈，而 0 表示有限的博弈（由于此种理论只适用于确定性的博弈，故而没有打成平局的无限博弈）. 对未明确的博弈 $\alpha_1^\bullet$ 与 $\alpha_2^\bullet$，

$$\alpha_1^\bullet \geqslant \alpha_2^\bullet$$

的意思是

$$(\alpha_1^\bullet)^+ \geqslant (\alpha_2^\bullet)^- \text{以及} (\alpha_1^\bullet) \geqslant (\alpha_2^\bullet)$$

两者都成立.此处$(\alpha_1^\bullet)^+$及$(\alpha_1^\bullet)$分别是由$\alpha_1^\bullet$得出的确定性博弈,其时$\alpha_1^\bullet$中的平局走法经过重新定义后改为左方或右方可胜.

不等式法则等于是在有圈博弈之间用不等式重新定义,所以必须证明它确实能够起作用.例如我们必须证明

$$\alpha_1^\bullet \geqslant \alpha_2^\bullet \quad \text{意味着} \ \alpha_1^\bullet + \beta^\bullet \geqslant \alpha_2^\bullet + \beta^\bullet .$$

此处我们同样可假定$\alpha_1^\bullet$,$\alpha_2^\bullet$及$\beta^\bullet$是确定性博弈.

换言之,我们必须为左方在

$$\alpha_1^\bullet + \beta^\bullet - \alpha_2^\bullet - \beta^\bullet$$

中提供一种策略,使得

$$\text{sign}(\alpha_1^\bullet + \beta^\bullet)^+ \geqslant \text{sign}(\alpha_2^\bullet + \beta^\bullet)^+$$

以及

$$\text{sign}(\alpha_1^\bullet + \beta^\bullet)^- \geqslant \text{sign}(\alpha_2^\bullet + \beta^\bullet)^-$$

(注意$\alpha_1^\bullet + \beta^\bullet$及$\alpha_2^\bullet + \beta^\bullet$不一定具有确定性).

幸而这的确是可以办得到的.如果左方在$\alpha_1^\bullet - \alpha_2^\bullet$中行使他的给定策略而在$\beta^\bullet - \beta^\bullet$中行使"依样画葫芦"策略的话.这是由于在表中

| | sign($\beta^\bullet$) − | 0 | + |
|---|---|---|---|
| sign($\alpha_i^\bullet$) − | − | − | + |
| 0 | − | 0 | + |
| + | + | − | + |

| | sign($\beta^\bullet$) − | 0 | + |
|---|---|---|---|
| sign($\alpha_i^\bullet$) − | − | − | − |
| 0 | − | 0 | + |
| + | − | + | + |

对$\text{sign}(\alpha_i^\bullet + \beta^\bullet)^-$与$\text{sign}(\alpha_i^\bullet + \beta^\bullet)$来说,每一列都是向下递增的.

## 转椅策略

我们也须证明

$$\alpha^\bullet \geqslant \beta^\bullet \quad \text{与} \quad \beta^\bullet \geqslant \gamma^\bullet \quad \text{蕴含着} \quad \alpha^\bullet \geqslant \gamma^\bullet$$

此处,我们要再次假定$\alpha^\bullet$,$\beta^\bullet$,$\gamma^\bullet$是确定性博弈.

换言之，若左方在$\alpha^{\bullet}-\beta^{\bullet}$及$\beta^{\bullet}-\gamma^{\bullet}$已给出存活策略，则需要在$\alpha^{\bullet}-\gamma^{\bullet}$中也有存活策略. 为了把它求出来，他要利用两张表，一个转椅以及右方的男仆“死读书”先生(见图 14). 他在博弈对子$\alpha^{\bullet}, -\beta^{\bullet}$以及$\beta^{\bullet}, -\gamma^{\bullet}$中行使他的给定策略，并教会“死读书”先生去行使东施效颦策略来回答左方在$\beta^{\bullet}$或$-\beta^{\bullet}$中的行动，这是用右方的镜像回答作出的(死读书先生的称呼是用小写字母表示的，以表明他的卑微地位).

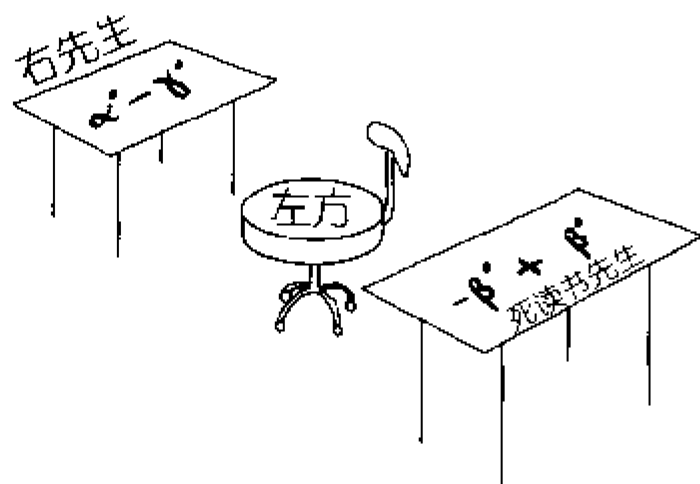



**图 14.** 转椅策略.

如果他这样做，结果，博弈将会有

$$\mathrm{sign}(\alpha^{\bullet})\geqslant\mathrm{sign}(\beta^{\bullet})\text{ 与 }\mathrm{sign}(\beta^{\bullet})\geqslant\mathrm{sign}(\gamma^{\bullet})$$

(“死读书”先生的指令使$\mathrm{sign}(\beta^{\bullet})=-\mathrm{sign}(-\beta^{\bullet})$)，因而我们肯定能满足占上风的条件. 另外，如果在实际博弈$\alpha^{\bullet}-\gamma^{\bullet}$中总的玩法是有限数时，则有

$$0=\mathrm{sign}(\alpha^{\bullet})\geqslant\mathrm{sign}(\beta^{\bullet})\geqslant\mathrm{sign}(\gamma^{\bullet})=0.$$

所以在全部四个分支博弈中玩法都是有限数，而且左方能走出最后一步. 由于“死读书”先生一贯只是奉命唯谨地作出回答，故而它不会是在$\beta^{\bullet}$或$-\beta^{\bullet}$，于是它必然是在实际博弈$\alpha^{\bullet}-\gamma^{\bullet}$中.

## 停止物是好东西

我们已看到

> 一个停止物 $s$ 只有一边：
> $s(\mathbf{on})=s(\mathbf{off})=s$,
> $s=s\ \&\ s$,

于是有：

> 对停止物来说，两种接近法都趋于同一处.

还有其他几种方式，其中停止物的性态同普通的终端很类似：

> 若 $s,t$ 为停止物，则不等式
>
> $$s^{+}\geqslant t^{+},\ s^{-}\geqslant t^{-},\ s^{-}\geqslant t^{-}$$
>
> 都是等价的，其中的每一式都蕴含
>
> $$s\geqslant t.$$

**停止物的不等式.**

这意味着，对停止物来说，你可以不理会这种⁺与⁻记号. 特别说来：

> 为了检验停止物之间的不等式，只要能证明右方先走时，对 $s-t$ 中的任一动作，左方均能应付裕如.

**比较停止物的大小**

> 可以通过下列办法来化简停止物：省略被优超的选择，使可逆选择"短路"，如同对终端游戏一样.

**简化停止物**

> 只拥有有限多种局势的停止物只能具有唯一的最简形式，不论哪个局势既没有被优超的，也没有可以逆转的行动.

**关于停止物的最简形式定理**

我们只能概略地说一下证明.

若 $s,t$ 是停止物，而我们在 $s-t$ 中有无限多走法，则我们在 $s,t$ 中必然也有无限多种走法，

否则在两者之一中必定会有一个最终互相交替的无限动作序列. 这就建立了不等式法则.

现设 $s$ 为任意停止物, 而 $\hat{s}$ 是在 $s$ 的各局势中省略了许多被优超的左方选择而得出的, 当然, 也保留了足够多的选择来进行优超. 设 $t$ 是另一个停止物, 而 $s\geqslant t$, 我们将证明 $\hat{s}\geqslant t$.

我们要证明的是当右方从

$$\hat{s}-t \quad 的 \quad \hat{s}_0 \quad t_0$$

采取任何行动时(其时我们有 $s_0\geqslant t_0$),

则左方肯定能走到一个局势, 譬如说

$$\hat{s}_m-t_m$$

来作为回答, 而此时我们将仍然有

$$s_m\geqslant t_m.$$

如果左方只要能继续走出这样的一步, 那么他就能永远走下去!

在右方从 $\hat{s}_0-t_0$

走出时, 我们将到达一个轮到左方走的局势

$$\hat{s}_1-t_1.$$

他将从 $s-t$ 的对应局势 $s_1-t_1$

中干些什么呢? 在 $-t_1$ 中的行动仍可源源不断地为他所用, 于是我们可以同样假定他会走到

$$s_2-t_1.$$

其中 $s_2$ 是 $s_1$ 中的某些左方选择, 现在, $s_2$ 有可能是我们从 $s$ 导出 $\hat{s}$ 时所省略的左方选择之一, 但我们肯定保留了 $s_1$ 的某些左方选择 $s_3$ 来优超 $s_2$, 故而左方能走到

$$\hat{s}_3-t_1.$$

由于我们已有了 $s_2\geqslant t_1$, 所以我们必然要有 $s_3\geqslant t_1$, 于是左方又多活了一步.

这就证明了 $\hat{s}\geqslant s$, 但显然 $\hat{s}\leqslant s$. 类似的证法表明我们能使可逆选择短路. 余下来的证明方法同普通终端博弈的证法就极为类似了.

## 梅树是更好的东西!

一个通常的终端游戏的走法形成一棵树, 其中蓝色树枝对应于左方的走法, 红色树枝对应于右方的走法. 我们也可以使用绿色树枝, 任何一位局中人都能加以利用.

加入梅子后我们将得到**梅树**! 我们将用蓝色梅子表示左方的"派司"走法, 红色梅子表示右方的"派司"走法, 而绿色梅子则表示双方都能利用的派司走法. 图 15 画出了我们的老例题, 但

也有新出现的一对:睇你与迷你.

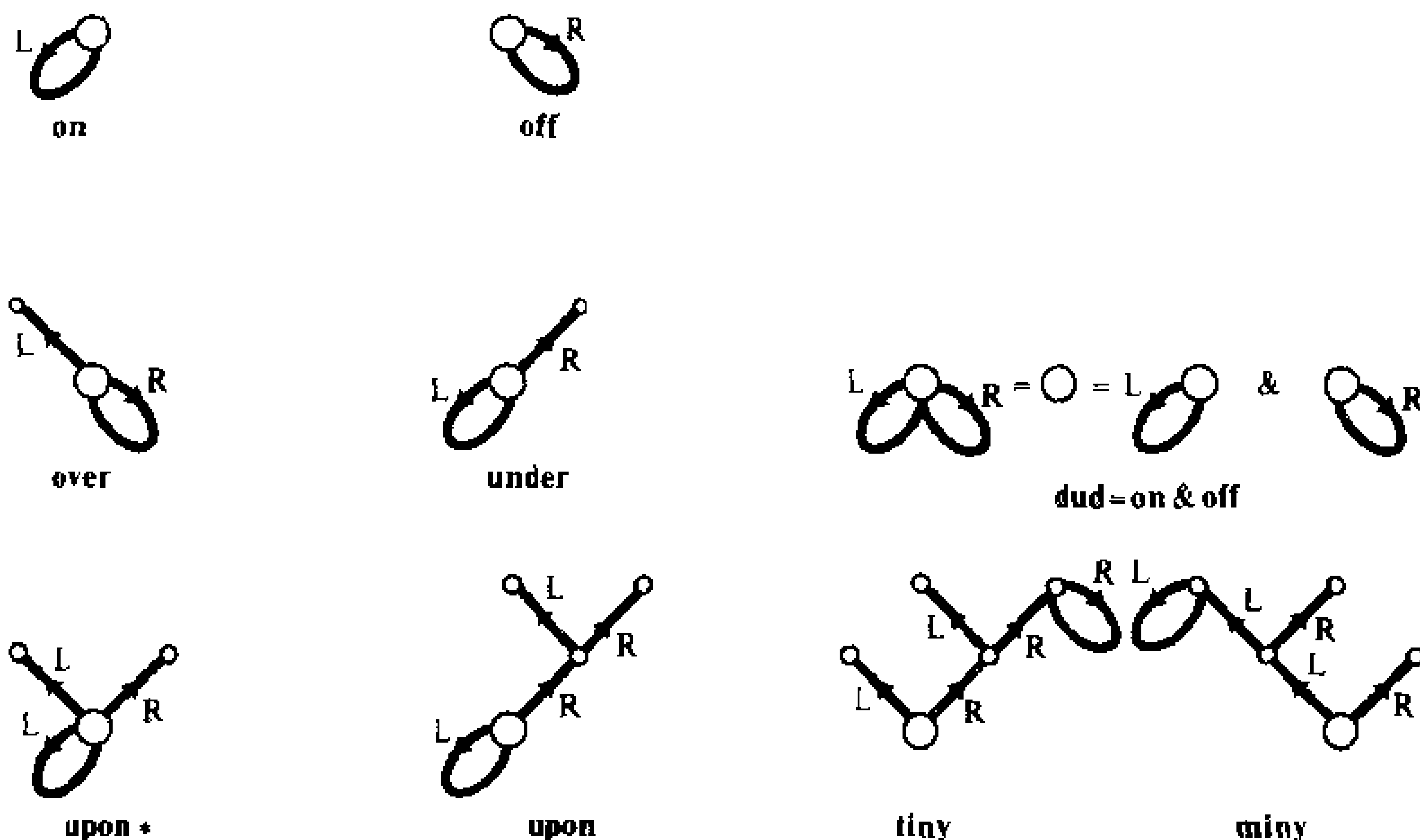



图 15. 某些选定的梅子.

**睇你(tiny)**的值有多大呢?

我们以前已经遇到过一些**普通的**睇你博弈

$$+_G = \{0 \| 0 | -G\}. \qquad (\text{“睇你 } G\text{”})$$

在骨牌游戏中,一个 4×2 矩形的值为 $+_2$,在癞蛤蟆—青蛙游戏中我们曾遇到过 $+_{\frac{1}{4}}$ 及 $+_{1\frac{1}{2}}$,并发现它们是极小的正值博弈. 但

$$\textbf{tiny} = +_{\text{on}}$$

不是通常的博弈:因为 **on** 要超过任一其他博弈,∴ $+_{\text{on}}$ 应小于任何其他正值博弈.

> **tiny 是所有正值中最小的.**

当然

$$\textbf{miny} = -_{\text{on}} = -\ \textbf{tiny}$$

是所有负博弈中最小的.

# 照管梅树

如果你的博弈全是梅树，那么你花园里的一切东西都很可爱，因为你有许多事情可做.

**采集.** 当然你很乐意采集你的劳动果实，对梅树来说，这也容易办到，因为一些梅树之和一般是另一棵梅树，它对一位指定局中人在某些局势下(仅当一个分支博弈可以派司时)有着一个派司动作.

**催熟.** 可以假定每棵梅树的每一个结点上至多只有一只梅子，因为一对红、蓝梅子是能被一只绿色梅子取代的. 在此种形式下，一棵梅树的两边在通过催熟后是容易求出来的：

为了求**即边**，可将所有的绿色梅子都用蓝的取代；

为了求**离边**，可将所有的绿色梅子都用红的取代.

**剪枝.** 成熟的梅树(每个结点最多只有一只梅子)是停止物，故而，若它们有着有限多种状态时，可以删去被优超的选择，以及将可逆选择旁路后化为最简形式.

**嫁接.** 若 $g,h$ 是成熟的梅树，而且 $g\geqslant h$，则 $g$ & $h$ 可用一株梅树来表示，它可以像图 16 那样，把 $g$ 嫁接在 $h$ 之上，但我们必须准许右方从每一个 $g^L$ 走到 **dud**，而左方可从每一个 $h^R$ 走到 **dud** 以确保嫁接作用不受排斥.

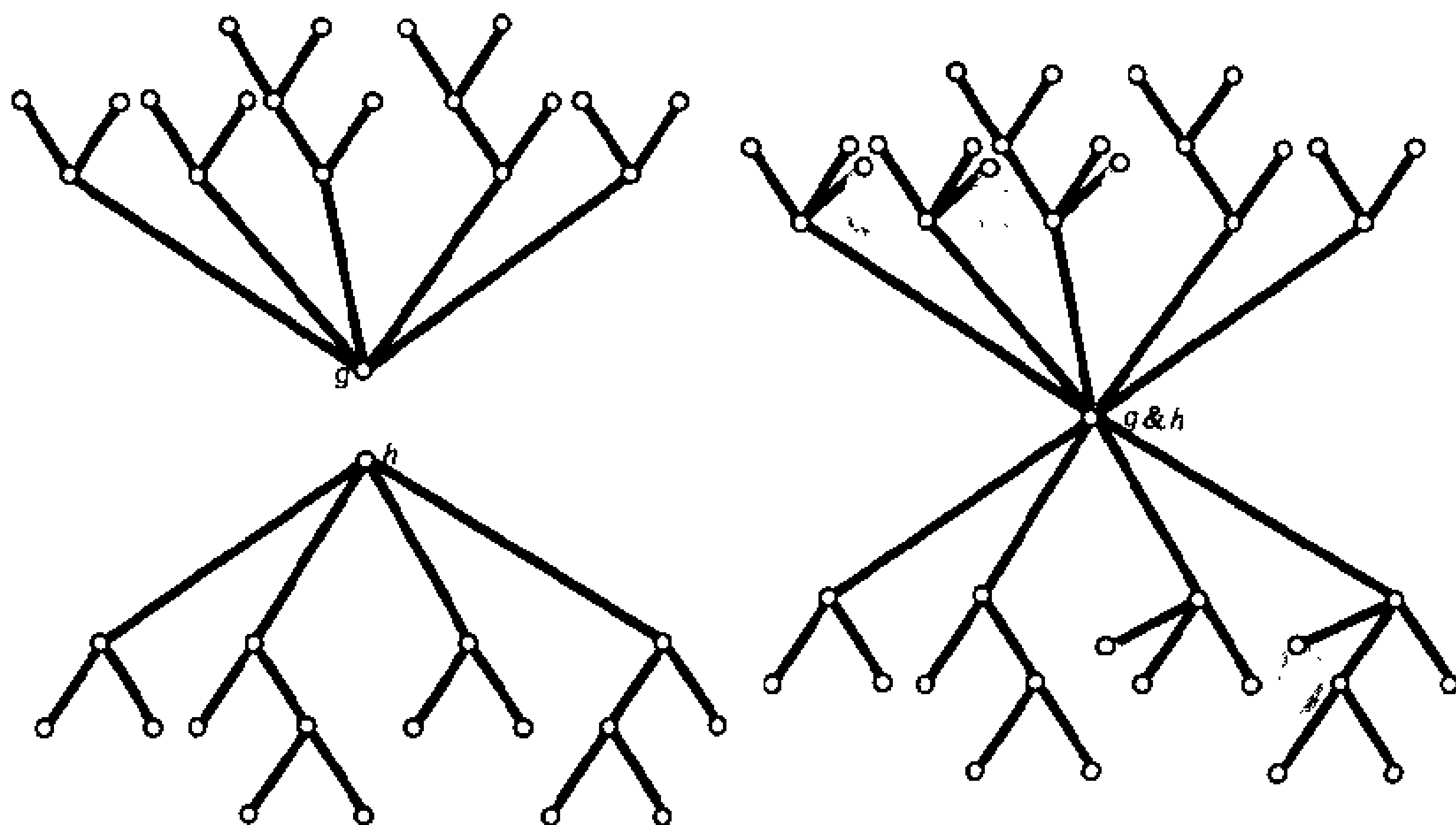



**图** 16. 嫁接两棵梅树.

**安置**　利用诺顿引理(见第 7 章的增补材料),很容易对拥有通常终端的梅树作出比较.这是由于

$g$:**on** 是将一棵蓝色梅子添加到它原有的结点上的 $g$;

$g$:**off** 是将一棵红色梅子添加到它原有的结点上的 $g$.

例如,你可以从图 15 中看到

**upon** * 是 *:**on**.

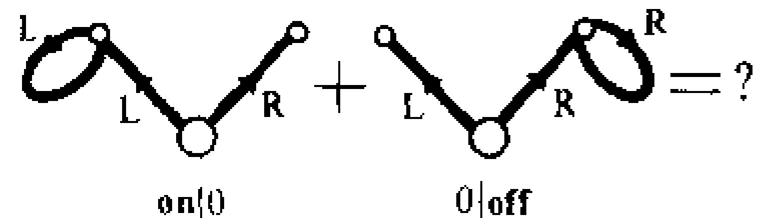
于是它同 $g$ 有着同样的顺序关系,如同 * 与每个不含 * 的 $g$ 所做的一样.事实上

**upon** * = ↑ *:**on**

(由于 *:1= ↑ *,以及 1:**on**=**on**),所以 **upon** * 与 $g$ 有着相同的顺序关系,如同 ↑ * 所做的,对每一个不含 ↑ * 的 $g$ 所做的一样.

## 同上和、下和一起工作

让我们利用这些概念,把两株简单梅树相加.




我们发现

? ={**on**+{0|**off**},{**on**|0}+0|0+{0|**off**},{**on**|0}+**off**}.

下一步,**on**+{0|**off**}={pass,**on**+0|**on**+**off**}

其中,派司表示左方在对应于他在 **on** 中的派司动作的和博弈中有一个派司动作,我们有

**on**+**off**=**dud**=**on** & **off**,

于是,**on**+{0|**off**}的即边是

**on**|**on**=**on**,

而离边是

譬如说,　　**on**|**off**=**hot**.

即一切博弈中最热的一个博弈.这些是上和与下和:

**on** ⋏ {0|**off**}=**on**,**on** ⋎ {0|**off**}=**hot**.

或者,更简单地记为,

**on**+{0|**off**}=**on** & **hot**,

类似地有　　{**on**|0}+**off**=**hot** & **off**.

于是,

? ={**on** & **hot**,{**on**|0}+{0|**off**},**hot** & **off**},

它的即边为

$$\{\mathbf{on},\{\mathbf{on}|0\}|\{0|\mathbf{off}\},\mathbf{hot}\}=\{\mathbf{on}|\{0|\mathbf{off}\}\}.$$

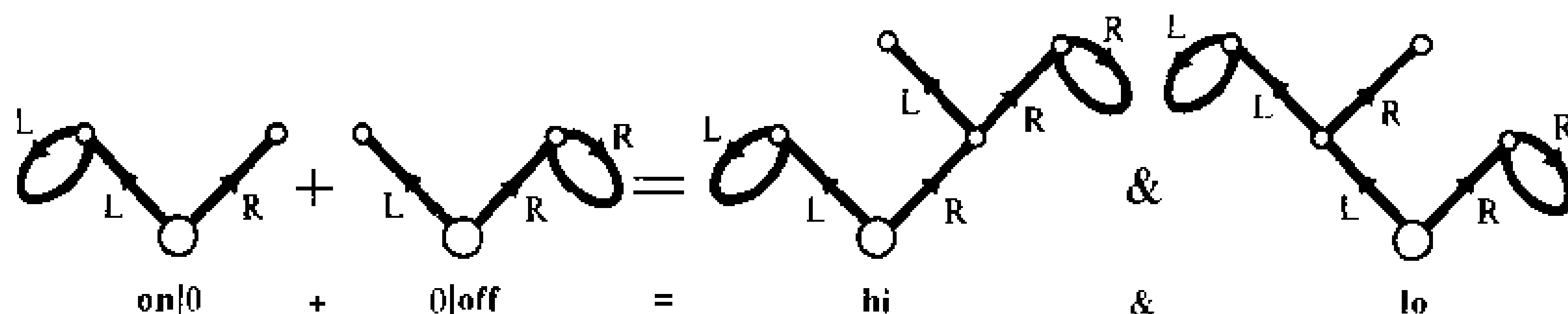
这是由于$\{\mathbf{on}|0\}$与 **hot**$=\{\mathbf{on}|\mathbf{off}\}$是被优超的选择之故.

于是我们下结论说

$$\{\mathbf{on}|0\}\curlywedge\{0|\mathbf{off}\}=\{\mathbf{on}|\{0|\mathbf{off}\}\}=\mathbf{hi},\text{记作 }\mathbf{hi},$$

类似地有

$$\{\mathbf{on}|0\}\curlyvee\{0|\mathbf{off}\}=\{\{\mathbf{on}|0\},\mathbf{off}\}=\mathbf{lo},\text{记作 }\mathbf{lo}.$$




这些答案都已经是最简形式.

## 即(on),离(off)与热(hot)

很容易把这三种博弈同其他任何博弈相加.我们将把一个停止物称作 **half-on**,如果 **on** 是它的一个左方选择的话;如果 **off** 是一个右方选择,则称为 **half-off**.(**half-on** 博弈实际上就是形式为$\{\mathbf{on}|a,b,c,\cdots\}$的博弈.

**on** 与 **hot** 都可以说是 **half-on**;**hot** 与 **off** 都是 **half-off**;但既是 **half-on**,同时又是 **half-off** 的就只能是 **hot** 了.下面是一张加法表:

| | **on** | 其他 half on | **hot** | 其他 half-off | **off** |
|---|---|---|---|---|---|
| **on** | **on** | **on** | **on & hot** | **on & hot** | **on & off** |
| 其他 half-on | **on** | **on** | **on & hot** | ? | **hot & off** |
| **hot** | **on & hot** | **on & hot** | **on & off** | **hot & off** | **hot & off** |
| 其他 half-off | **on & hot** | ? | **hot & off** | **off** | **off** |
| **off** | **on & off** | **hot & off** | **hot & off** | **off** | **off** |

下面还有一个表格则是与之有关的博弈(其中 ono=on|0，oof=0|off)：

<table>
<tr><th></th><th>ono</th><th>hi</th><th>lo</th><th>oof</th><th>tiny & miny</th></tr>
<tr><td>ono</td><td>on</td><td>on & ono</td><td>ono & hot</td><td>hi & lo</td><td>on|tiny & ono</td></tr>
<tr><td>hi</td><td>on & ono</td><td>on & hi</td><td>hi & lo</td><td>hot & oof</td><td>hi & on||miny|off</td></tr>
<tr><td>lo</td><td>ono & hot</td><td>hi & lo</td><td>lo & off</td><td>oof & off</td><td>on|tiny||off & lo</td></tr>
<tr><td>oof</td><td>hi & lo</td><td>hot & oof</td><td>oof & off</td><td>off</td><td>oof & miny|off</td></tr>
</table>

某些顺序关系的图解如下(见图 17)。

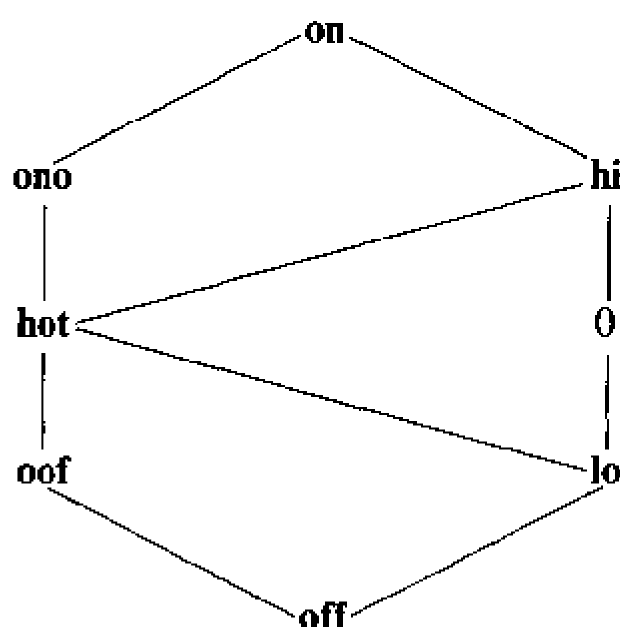



图 17. 高还是低?

## 某些求和性质的提要

停止物的上和与下和具有与普通和数相类似的性质，此外，还存在着一些其他关系以及顺序性质，我们的对数学一往情深的读者兴许想要一张一览表：

| | | |
|---|---|---|
| $0 \curlywedge a=a$ | $0 \curlyvee a=a$ | 零法则 |
| $a \curlywedge b=b \curlywedge a$ | $a \curlyvee b=b \curlyvee a$ | 交换性 |
| $(a \curlywedge b)\curlywedge c=a \curlywedge(b \curlywedge c)$ | $(a \curlyvee b)\curlyvee c=a \curlyvee(b \curlyvee c)$ | 结合性 |
| $-(a \curlywedge b)=(-a)\curlyvee(-b)$ | $-(a \curlyvee b)=(-a)\curlywedge(-b)$ | 负性 |
| $a'\geqslant a\Rightarrow a'\curlywedge b\geqslant a \curlywedge b$ | $a'\geqslant a\Rightarrow a'\curlyvee b\geqslant a \curlyvee b$ | 单调性 |
| $a \curlywedge b\geqslant a \curlyvee b$ | | $a,b$ 性质 |
| $a \curlywedge b\geqslant c$　当 $a\geqslant(-b)\curlyvee c$ 一旦成立时 | | $a,b,c$ 性质 |

（扑克牌中的“爱司”　　一点，二点，三点）

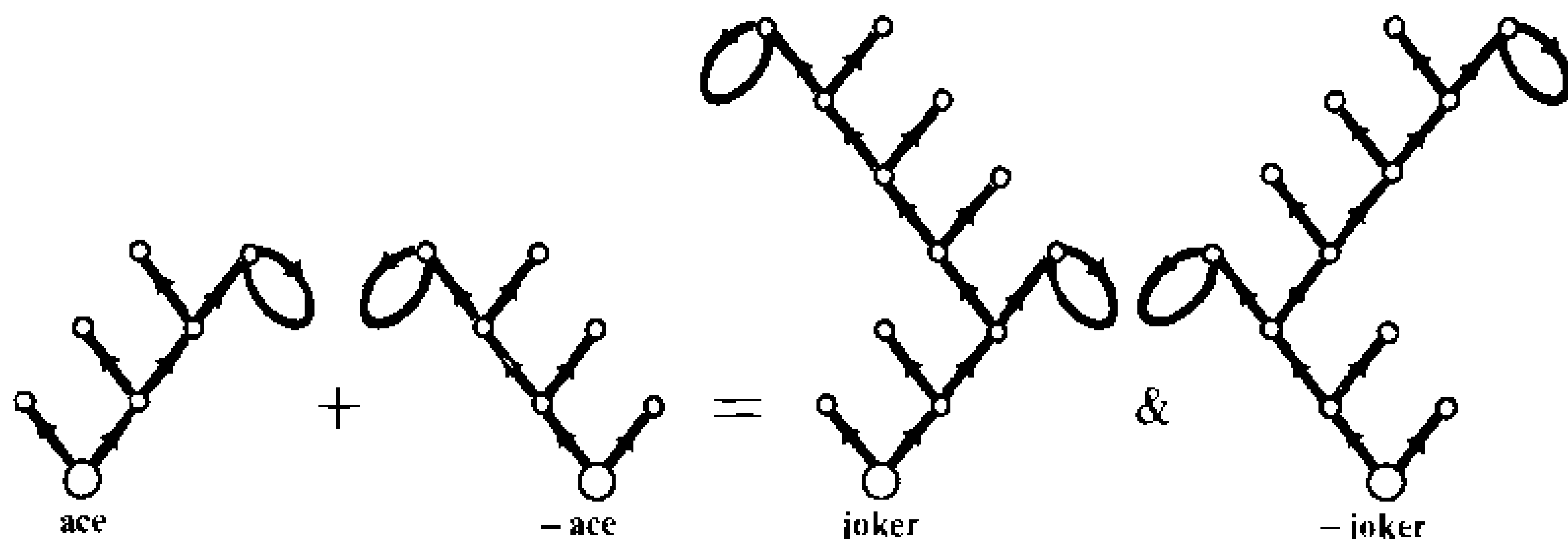
可以看出　　　　ace＋ace＝deuce，ace＋deuce＝trey，…

由此可知，在前三项之后你只要知道几个爱司之和即已足够.

不过，若把负的东西也考虑进去，那么上和与下和是很不一样的，例如

ace ⋏（−ace）＝joker（扑克牌中的“百搭”，也可叫大王或小王）ace ⋎（−ace）＝−joker，

此处，joker 与 −joker 是完全不同的博弈：




由于 ace 的原子量为 1，所以通过反复组合 ace 及 −ace，我们可以得到形形式式的各种博弈，它们的原子量全是整数，例如，博弈

deuce＝0 | ace 的原子量为 2，称为 2♣，而

0 | joker 的原子量为 1，叫做 1♡.

结果表明，对绝大多数原子量 $n$ 来说，我们将能正好得到这样四个博弈，使之满足

$n$♣＜$n$◇＜$n$♡＜$n$♠.

但是，对于原子量 −1，0，1 而言，我们还将得出

−ace＜−joker＜0＜joker＜ace.

以及它们同 tiny 与 miny 所构成之和.

图 20 告诉你，这些博弈是怎样定义的；图 21 表示它们之间的相互比较，图 22 则表明它们如何相加. 我们将使用下列记号：

$X+$ ＝ $X$ ⋏ tiny，$X-$ ＝ $X$ ⋎ miny.

| | | |
|---|---|---|
| $A$＝ace＝0 \| tiny | $A-$＝on \| $A$ ‖ 0 | $A+$＝$A$ |
| $J$＝joker＝0 \| $\bar{A}+$ | $J-$＝on \| $J$ ‖ $\bar{A}$ | $J+$＝$J$ |
| $\bar{J}$＝−joker＝$A-$ \| 0 | $\bar{J}+$＝$A$ ‖ $\bar{J}$ \| off | $\bar{J}-$＝$\bar{J}$ |
| $\bar{A}$＝−ace＝miny \| 0 | $\bar{A}+$＝0 ‖ $\bar{A}$ \| off | $\bar{A}-$＝$\bar{A}$ |

<table>
<tr><th>n</th><th>n♣</th><th>n◇</th><th>n♡</th><th>n♠</th></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$\bar{3}=-3$</td><td>$\bar{2}$♣|0</td><td>$\bar{2}$◇|0</td><td>$\bar{2}$♡|0</td><td>$\bar{2}$♠|0</td></tr>
<tr><td>$\bar{2}=-2$</td><td>$\bar{1}$♣|0</td><td>$\bar{1}$◇|0</td><td>$\bar{1}$■|0</td><td>$\bar{A}$|0</td></tr>
<tr><td>$\bar{1}=-1$</td><td>♣|0</td><td>$\bar{J}$|0</td><td>♡|0</td><td>0|$\bar{2}$♠</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1♣|0</td><td>A|$\bar{1}$◇</td><td>1♡|$\bar{A}$</td><td>0|$\bar{1}$♠</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2♣|0</td><td>0|◇</td><td>0|J</td><td>0|♠</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0|A</td><td>0|1◇</td><td>0|1♡</td><td>0|1♠</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0|2♣</td><td>0|2◇</td><td>0|2♡</td><td>0|2♠</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td></td><td>♣=-0♣</td><td>◇=-0◇</td><td>♡=-0♡</td><td>♠=0♠</td></tr>
</table>

对表中的一切博弈 $X$，均有 $X+=X-=X$；deuce，trey…不过是 2♣，3♣…的别名.（但是 ace≠1♣）.

图 20. 亮出牌来

| | $\bar{A}$ | $\bar{J}$ | $J$ | $A$ | ♣ | ◇ | ♡ | ♠ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ♠ | $\bar{1}$♠ | ♠&◇ | ♠ | 1♠&1◇ | ♠*♣ | ♠&◇ | ♠&♡ | ♠&♠ | ♠ |
| ♡ | $\bar{1}$♠&$\bar{1}$♡ | ♡&♣ | ♠&♡ | 1♡&1♣ | ♡&♣ | ♠&♣ | ♠&♡ | ♠&♡ | ♡ |
| ◇ | $\bar{1}$♠&$\bar{1}$◇ | ◇&♣ | ♠&◇ | 1◇&1♣ | ◇&♣ | ◇&♣ | ♣&♠ | ♠&◇ | ◇ |
| ♣ | $\bar{1}$♡&$\bar{1}$♣ | ♣ | ♡&♣ | 1♣ | ♣&♣ | ◇&♣ | ♡&♣ | ♠&♣ | ♣ |
| $A$ | $J$&$\bar{J}$ | $A$&1♣ | 1♡&$A$ | 2♣ | 1♣ | 1◇&1♣ | 1♡&1♣ | 1♠&1◇ | A |
| $J$ | $\bar{1}$♠&$\bar{A}$ | $J$&$\bar{J}$ | ♠&$J$ | 1♡&$A$ | ♡&♣ | ♠&◇ | ♠&♡ | ♠ | J |
| $\bar{J}$ | $\bar{A}$&$\bar{1}$◇ | $\bar{J}$&♣ | $J$&$\bar{J}$ | $A$1♣ | ♣ | ◇&♣ | ♡&♣ | ♠&◇ | $\bar{J}$ |
| $\bar{A}$ | 2♠ | $\bar{A}$&1◇ | $\bar{1}$♠&$\bar{A}$ | $J$&$\bar{J}$ | 1♡&$\bar{1}$♣ | $\bar{1}$♠&$\bar{1}$◇ | $\bar{1}$♠&$\bar{1}$♡ | $\bar{1}$♠ | $\bar{A}$ |
| | $\bar{A}$ | $\bar{J}$ | $J$ | $A$ | ♣ | ◇ | ♡ | ♠ | |

若 $X+Y=Z\&T$，则

$$(X-)+(Y)+=(Z+)\&(T-),(X-)+(Y-)=(Z-)\&(T-),$$

$$(X+)+(Y-)=(Z+)\&(T-)=(X-)+(Y+).$$

图 22. 把你的扑克牌相加起来.

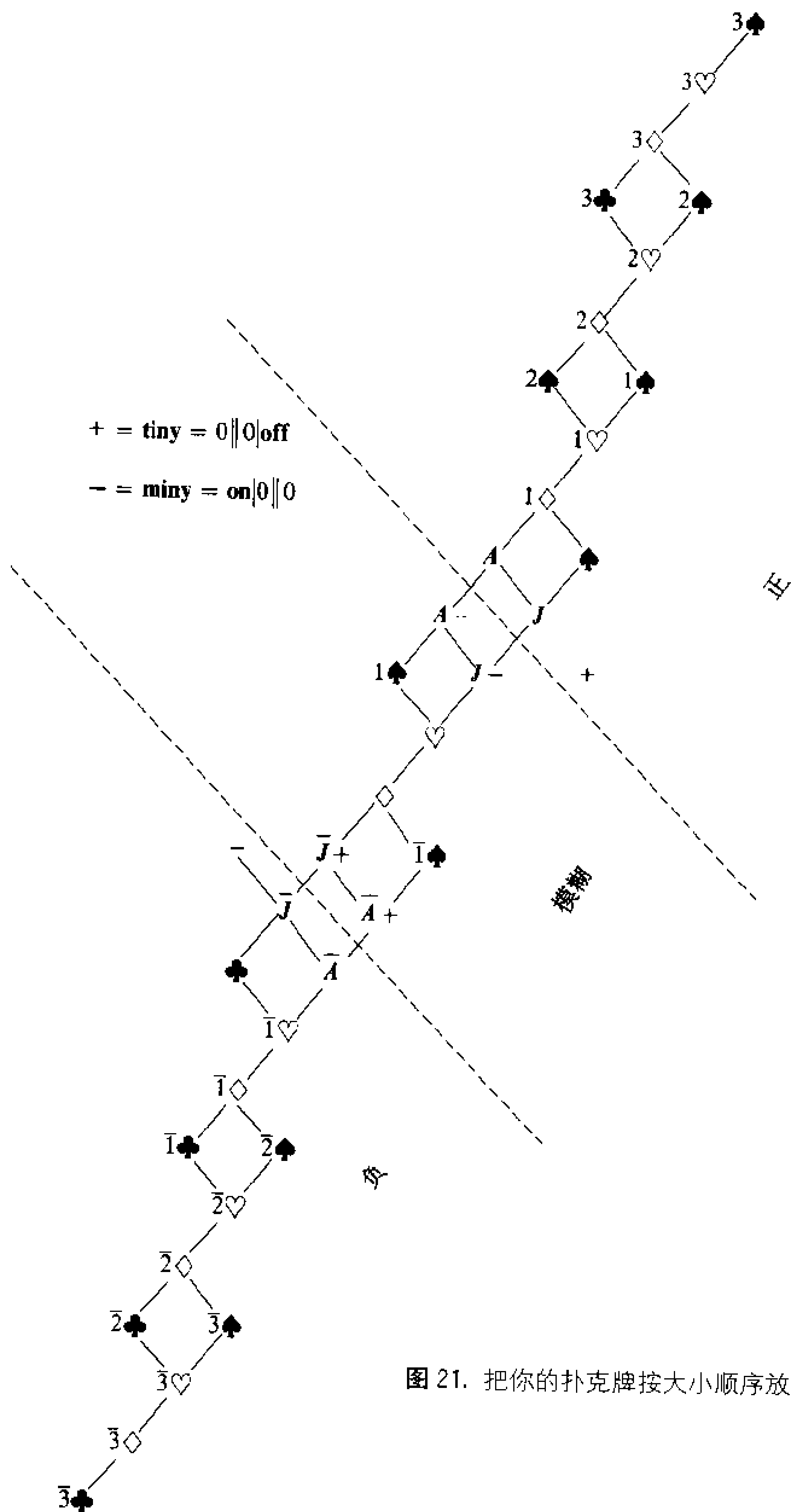



图 21. 把你的扑克牌按大小顺序放置.



# 转圈子的程度

当然,任一普通有终端的博弈 $G$ 具有性质

$$G+(-G)=0.$$

但对有圈博弈 $\gamma$ 而言,则有

$$\gamma+(-\gamma)=d\&(-d),$$

其中的 $d$ 称为 $\gamma$ 的**转圈度**,或简称为**度**,记作 $\gamma^{\circ}$,若用符号表示时,即为

$$\gamma^{\circ}=\gamma\curlywedge(-r),$$

也就是 $\gamma$ 与 $-\gamma$ 的上和. $a,b,c$ 性质意味着 $\gamma^{\circ}$ 可以计量 $\gamma$ 的下和吸收度:

$$\gamma\curlyvee x\leqslant\gamma \text{ 当 } x\leqslant\gamma^{\circ} \text{ 一旦成立时,}$$

特别,

$$\boxed{0\leqslant x\leqslant\gamma^{\circ}\text{时},\gamma\curlyvee x=\gamma.}$$

**下和吸收法则**

我们的数学修养较高的读者将能从上和与下和的一些性质中推导出:

$$(-\gamma)^{\circ}=\gamma^{\circ}=\gamma^{\circ}\curlyvee\gamma^{\circ}=(\gamma^{\circ})^{\circ},$$

$$\gamma^{\circ}\curlyvee\delta^{\circ}\leqslant(\gamma\curlyvee\delta)^{\circ}\leqslant\gamma^{\circ}\curlywedge\delta^{\circ},\qquad \gamma^{\circ}\curlyvee\delta^{\circ}\leqslant(\gamma\curlywedge\delta)^{\circ}\leqslant\gamma^{\circ}\curlywedge\delta^{\circ}.$$

类似地,对更复杂的和可导出以下性质:

$$\cdots\gamma^{\circ}\curlyvee\delta^{\circ}\curlyvee\cdots\curlyvee\eta^{\circ}\cdots\leqslant(\cdots\gamma\curlywedge\delta\cdots\curlyvee\eta\cdots)^{\circ}\leqslant\cdots\gamma^{\circ}\curlywedge\delta^{\circ}\curlywedge\cdots\curlywedge\eta^{\circ}\cdots$$

一个最重要的性质是

> 若 $\gamma$ 等于某个终端博弈,则转圈度 $\gamma^{\circ}$ 为 0,否则,它是严格取正值的.

因而,对真正的有圈博弈 $\gamma$ 而言,我们有

$$\gamma^{\circ}\geqslant\textbf{tiny},$$

于是

$$\gamma\curlyvee\textbf{tiny}=\gamma.$$

利用这些概念之后,可使大量计算工作简易得多.现在让我们来求 **tiny** 的度:

$$\mathbf{tiny}^{\circ}=\mathbf{tiny}\curlywedge(-\mathbf{tiny}).$$

由于我们加进了一个负的数量，所以这是$\leqslant$**tiny** 的，但它也必定是$\geqslant$**tiny**. 因为 **tiny** 是一个真正的有圈博弈：

$$\mathbf{tiny}^{\circ}=\mathbf{tiny}.$$

我们现在能够求

$$\mathbf{tiny}+\mathbf{tiny}$$

了，因为 **tiny** 只有红色梅子，所以 **tiny**+**tiny** 是一株成熟的梅树，从而已是一个停止物：

$$\mathbf{tiny}\curlywedge\mathbf{tiny}=\mathbf{tiny}\curlyvee\mathbf{tiny}.$$

但由下和吸收法则可知

$$\mathbf{tiny}\curlyvee\mathbf{tiny}=\mathbf{tiny},$$

于是最后得出

$$\mathbf{tiny}+\mathbf{tiny}=\mathbf{tiny}.$$

## 类与簇

在纸牌屋中，各种不同局势的度数为

0　　（仅仅对 0 而言），

**tiny**　（其中有 **tiny** 与 **miny**），

**joker**（其中有 $A$，$A-$，$J$，$J-$，$\bar{J}$，$\bar{J}+$，$\acute{A}$，$\bar{A}+$），

♠　　（其中有 $n$♣，$n$♢，$n$♡，$n$♠；$n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$）.

度数为♠（同别的不一样）的局势表现出一种特殊的规律性——它们自身能自然而然地形成一个**类**，每个 $n$ 有一类，而且每一类中四**簇**（种，变异）俱全：

♣，♢，♡，♠.

看来，这种现象的发生具有一般性，对一切有**稳定度** $d$ 的博弈都是这样. 所谓稳定度 $d$，是指满足

$$d\curlywedge d=d$$

而言，此时我们将用 $a\langle b\rangle$ 来表示类为 $a$，簇为 $b$ 的博弈. 形式上来看，$a$ 的类要包括度数为 $d$，介于

$$a\langle-d\rangle=a\curlyvee(-d)\text{与}a\langle d\rangle=a\curlywedge d$$

之间的一切博弈，此处 $a\langle-d\rangle$ 与 $a\langle d\rangle$ 是类中最小与最大的两名成员. 尽管对有圈博弈

而言

$$a \curlyvee \bar{a} < 0$$

但我们猜想

$$a\langle d\rangle \curlyvee \bar{a}\langle d\rangle \geqslant 0 \qquad \text{（稳定性条件）.}$$

只要 $a$ 具有度数 $d$，而 $d$ 是稳定的. 当这个条件成立时，我们将说 $a$ 对度数 $d$ 是稳定的. 可以证明这类博弈之和也能享有同一性质.

$a$ 的**簇**是指博弈

$$C(a) = a \curlyvee \bar{a}\langle d\rangle = a \curlywedge \bar{a}\langle -d\rangle.$$

譬如说，在纸牌屋中，

$$0\langle 3♡\rangle = ♡,$$

而在 3♡这一类中包含着所有的四张牌

$$3♣，3◇，3♡，3♠.$$

当 $a$，$b$ 对度数稳定时，存在着一个唯一的博弈

$$a\langle b\rangle = a\langle d\rangle \curlyvee 0\langle b\rangle = a\langle -d\rangle \curlywedge 0\langle b\rangle.$$

它像 $a$ 一样同属一类，也像 $b$ 一样同属一簇.

对于这类博弈的相加，你只要把类与簇分别相加就行了：

$$a\langle b\rangle \curlywedge c\langle d\rangle = (a+c)\langle b \curlywedge d\rangle,$$

$$a\langle b\rangle \curlyvee c\langle d\rangle = (a+c)\langle b \curlyvee d\rangle.$$

这里，我们之所以要写成 $a+c$，因为不管你使用 $a \curlywedge c$ 或 $a \curlyvee c$ 都无所谓.

这一理论也可稍加推广，以覆盖那些度数比 $d$ 小，但仍能满足稳定性条件的博弈. 这种博弈将兼有

**一个上和簇**，$a \curlywedge \bar{a}\langle -d\rangle$，

与

**一个下和簇**，$a \curlyvee \bar{a}\langle d\rangle$；

你在取上和时用前者，取下和时用后者. 譬如说，对博弈 **ace** 而言，这两个簇是

♣　与　◇，

故而在取上和时，可以用 1♣取代 **ace**，而在取下和时则用 1◇取代 **ace**.

练习二　试求 **upon**＝{pass，＊}的度数，并研究 **upon** 与其负值的一切形式的和.

## 没有交通干线的城市

图 23 是美国伊利诺州畸形城市*的平面图，你们可以看到所有的街道、马路全是单行道。一百年前，它是一个熙来攘往的城市，每条南北方向的街道上都有地方高尔夫俱乐部(简称 LLL)的有轨电车在行驶；而在东西向的林荫马路上有道路驾驶员协会的华丽的公共马车在为市民们服务。可惜由于内燃机时代的来临，这一切全都成为历史陈迹，如今只留下了两个社团。一个时期以来它们之间已经有了一个休战协定：每辆出租马车(出租马车上都标记着希腊字母 $\lambda$，$\nu$，$\mu$，$\kappa$ 等，如附图所示，例如在大马路与第五街的转角处就有一辆)上必须各有一名驾驶员来自上述两社团，而在各自合适的方向上操纵驾驶盘。因为只有四辆出租马车，所以旅途中的竞争是

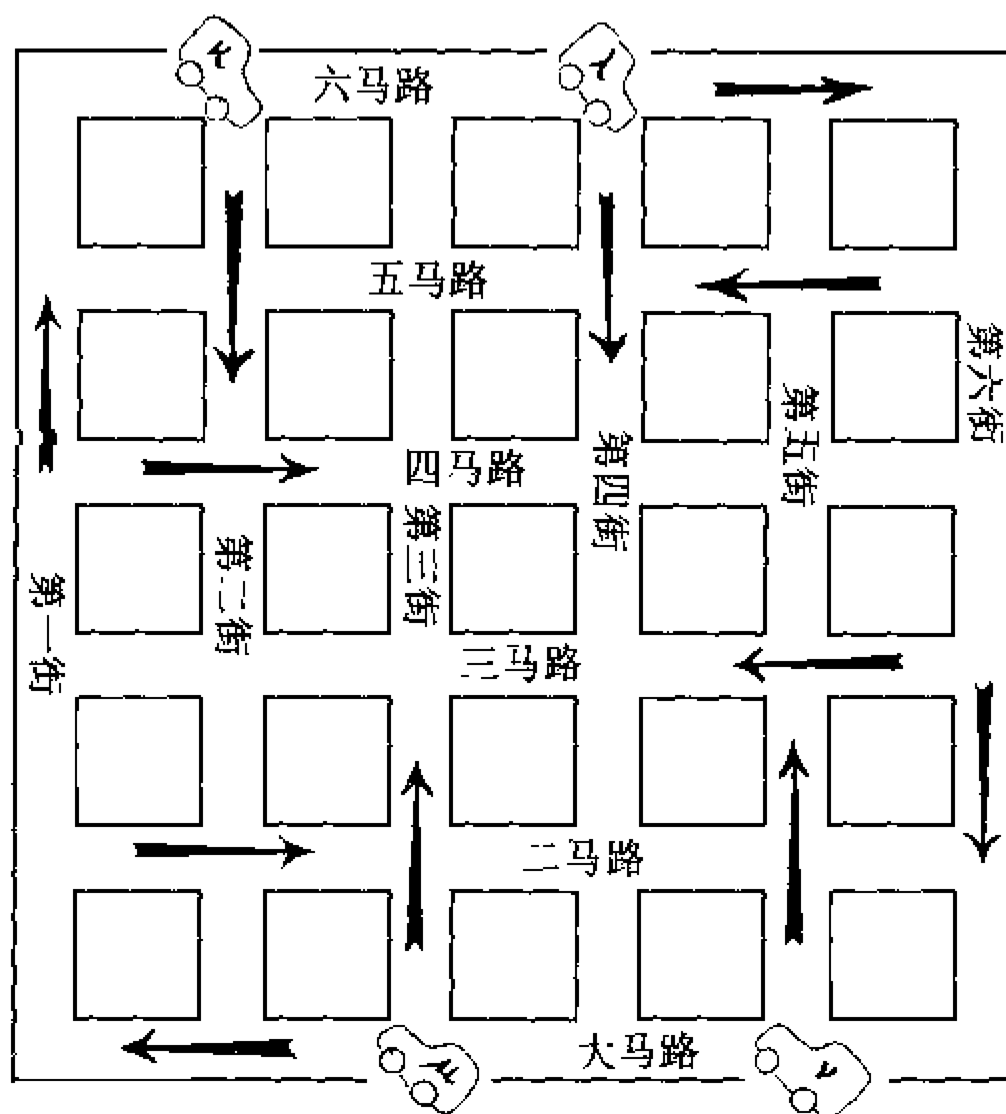



图 23. 伊利诺州畸形城市的出租马车.

* 译者注：该市纯属作者虚构。下文的 Linksman Labor Local 以及 Road Riders Regional 也是如此。美、英、加三国均无此种城镇与社会团体。

非常剧烈的，总是有一名旅客在合乎规定的方向上穿过一个街区（社团所准许的也只能是这些）. LLL 方面希望一直由他们的成员驾驶马车，不愿 RRR 的人接连开两次车. RRR 方面则有意破坏，企图使马车停下来，并在整个旅途中打算弃权三次.

换言之，LLL 与 RRR 双方轮流驾驶，每次在规定的方向上行走一个路段，RRR 方面可以有三次“派司”. 如果 LLL 在轮到他们走时无法行动，则 RRR 方面算是赢了. 反之，如果 LLL 一直在驾驶，那么他们就是赢家了. 所谓“一直在驾驶”，用有圈博弈的术语来说，究竟意味着什么呢?

由于一切无限玩法都算左方赢，而

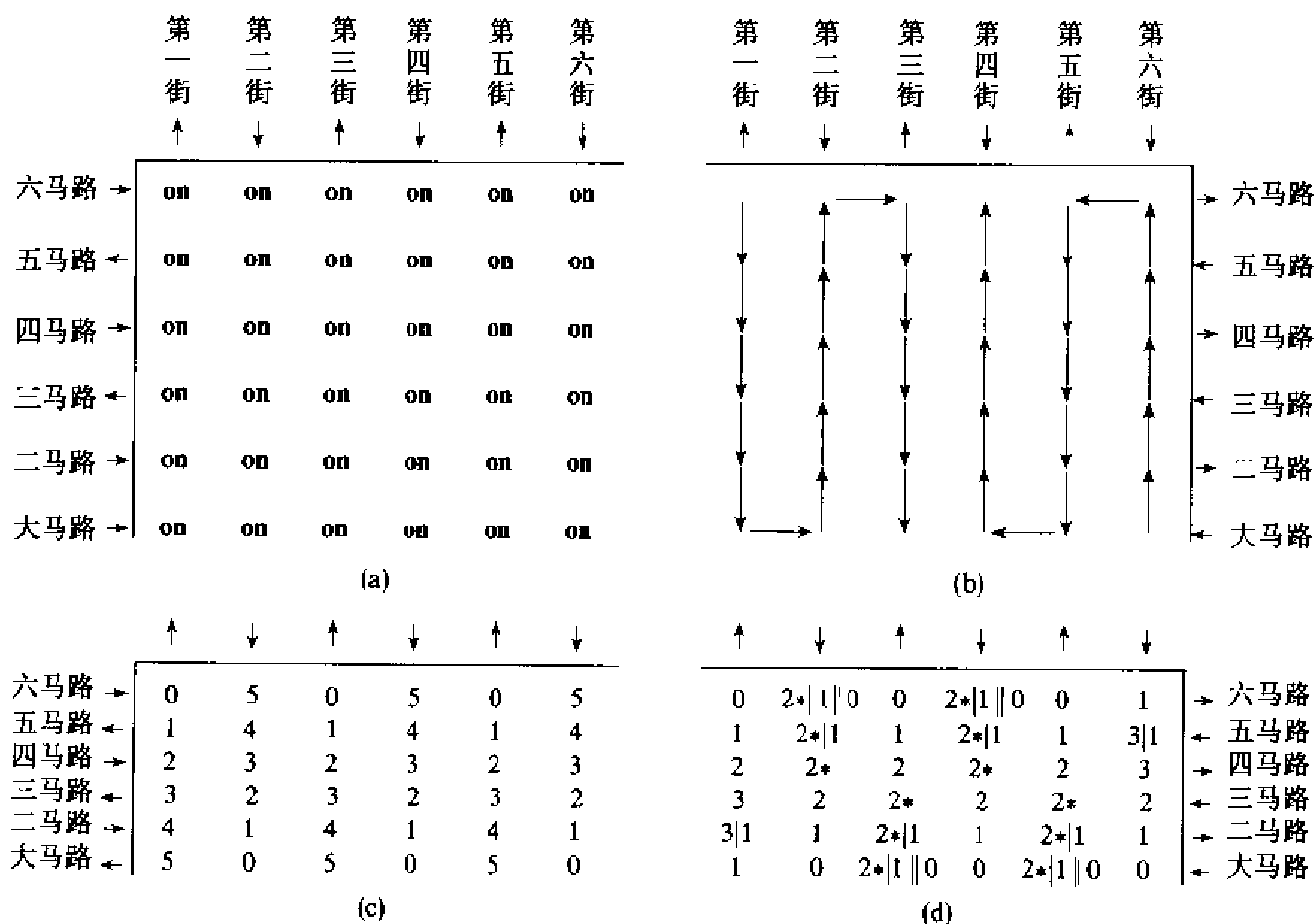
$$\gamma(\mathbf{on})^{+}=\gamma^{-},$$

我们只要考虑每个局势的“即边”就行. 从而我们需要去求博弈和

$$\kappa+\lambda+\mu+\nu-3$$

这相当于问题的初始条件与 RRR 的三个“派司”动作.

我们将利用挨近过程，从每一个交叉路口的 **on** 开始（见图 24(a)），再选择一条切合实际的




(c)

| | ↑ | ↓ | ↑ | ↓ | ↑ | ↓ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 六马路 → | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| 五马路 ← | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 四马路 → | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 三马路 ← | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 二马路 → | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| 大马路 ← | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 |

(d)

| ↑ | ↓ | ↑ | ↓ | ↑ | ↓ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2*\|1\|0 | 0 | 2*\|1\|\|0 | 0 | 1 | → 六马路 |
| 1 | 2*\|1 | 1 | 2*\|1 | 1 | 3\|1 | ← 五马路 |
| 2 | 2* | 2 | 2* | 2 | 3 | → 四马路 |
| 3 | 2 | 2* | 2 | 2* | 2 | ← 三马路 |
| 3\|1 | 1 | 2*\|1 | 1 | 2*\|1 | 1 | → 二马路 |
| 1 | 0 | 2*\|1\|\|0 | 0 | 2*\|1\|\|0 | 0 | ← 大马路 |

图 24. 用挨近法抓住懒散的出租马车.

路线(见图 24(b))来修正我们的估计. 几乎立即就能看出图 24(c)中的数目是上界，只要再作一次修正就能给出最后答案(图 24(d)).

| | 第一街 ↑ | 第二街 ↓ | 第三街 ↑ | 第四街 ↓ | 第五街 ↑ |
|---|---|---|---|---|---|
| 十马路→ | 0 | $4*\mid 3\mid\mid 2\mid\mid\mid 1\mid\mid\mid\mid 0$ | 0 | $4*\mid 3\mid\mid 2\mid\mid\mid 1\mid\mid\mid\mid 0$ | 0 |
| 九马路← | 1 | $4*\mid 3\mid\mid 2\mid\mid\mid 1$ | 1 | $4*\mid 3\mid\mid 2\mid\mid\mid 1$ | 1 |
| 八马路→ | 2 | $4*\mid 3\mid\mid 2$ | 2 | $4*\mid 3\mid\mid 2$ | 2 |
| 七马路← | 3 | $4*\mid 3$ | 3 | $4*\mid 3$ | 3 |
| 六马路→ | 4 | $4*$ | 4 | $4*$ | 4 |
| 五马路← | 5 | 4 | $4*$ | 4 | $4*$ |
| 四马路→ | $5\mid 3$ | 3 | $4*\mid 3$ | 3 | 4 |
| 三马路← | 3 | 2 | $4*\mid 3\mid\mid 2$ | 2 | $4\mid 2$ |
| 二马路→ | $3\mid 1$ | 1 | $4*\mid 3\mid\mid 2\mid\mid\mid 1$ | 1 | 2 |
| 大马路← | 1 | 0 | $4*\mid 3\mid\mid 2\mid\mid\mid 1\mid\mid\mid\mid 0$ | 0 | $2\mid 0$ |

图 25. 一个有五街十路畸形城市中的单行道出租马车游戏.

对于任何一个街道呈十字交叉的矩形城镇，这类游戏的解法也很容易. 图 25 中给出了一个五街十路的城镇，你可以猜测，在一个有着 20 条马路的畸形城市中，将会出现下面的值：

$$9*\mid 8\mid\mid 7\mid\mid\mid 6\mid\mid\mid\mid 5\mid\mid\mid\mid\mid 4\mid\mid\mid\mid\mid\mid 3\mid\mid\mid\mid\mid\mid\mid 2\mid\mid\mid\mid\mid\mid\mid\mid 1\mid\mid\mid\mid\mid\mid\mid\mid\mid 0$$

以前我们在什么地方看到过这些东西呢?

我们曾在第 6 章的背牌游戏与安排男、女孩子入座问题(尽管它们有时要被无穷小量来干扰)中看到过这种过热值. 而它们最好用积分来表示. 我们用 $\int x$ 表示 $\int_0^1 x$ 而用 $*\int x$ 来表示 $*+\int x$，并求出过

$$\int 0=0,\quad \int 1=2,\quad \int \frac{1}{2}=1*,\quad \int \frac{3}{4}=2*\mid 1,\quad \int \frac{7}{8}=3*\mid 2\mid\mid 1,\ \cdots$$

从而前面的那种记法之值为

$$-1+\int \frac{1023}{1024}=*\int \frac{511}{1024}.$$

我们也有 $\int *=1\mid -1$，于是 $\int 1*=3\mid 1$，等等，这样一来，我们可以把图 24(d)与图 25 重新改写为图 26 与图 27.

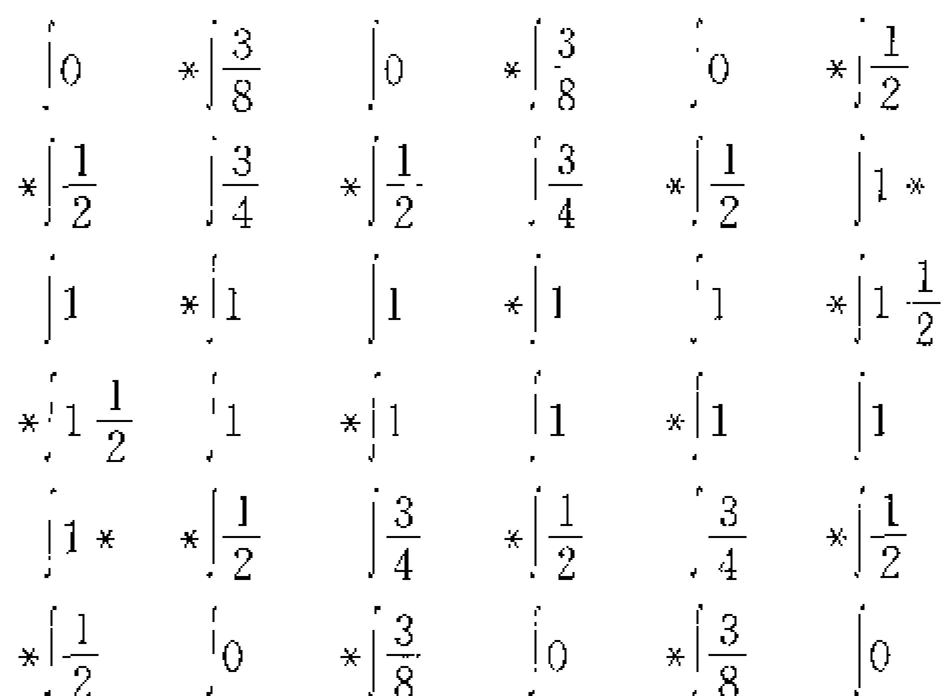



**图 26.** 过热的出租马车.

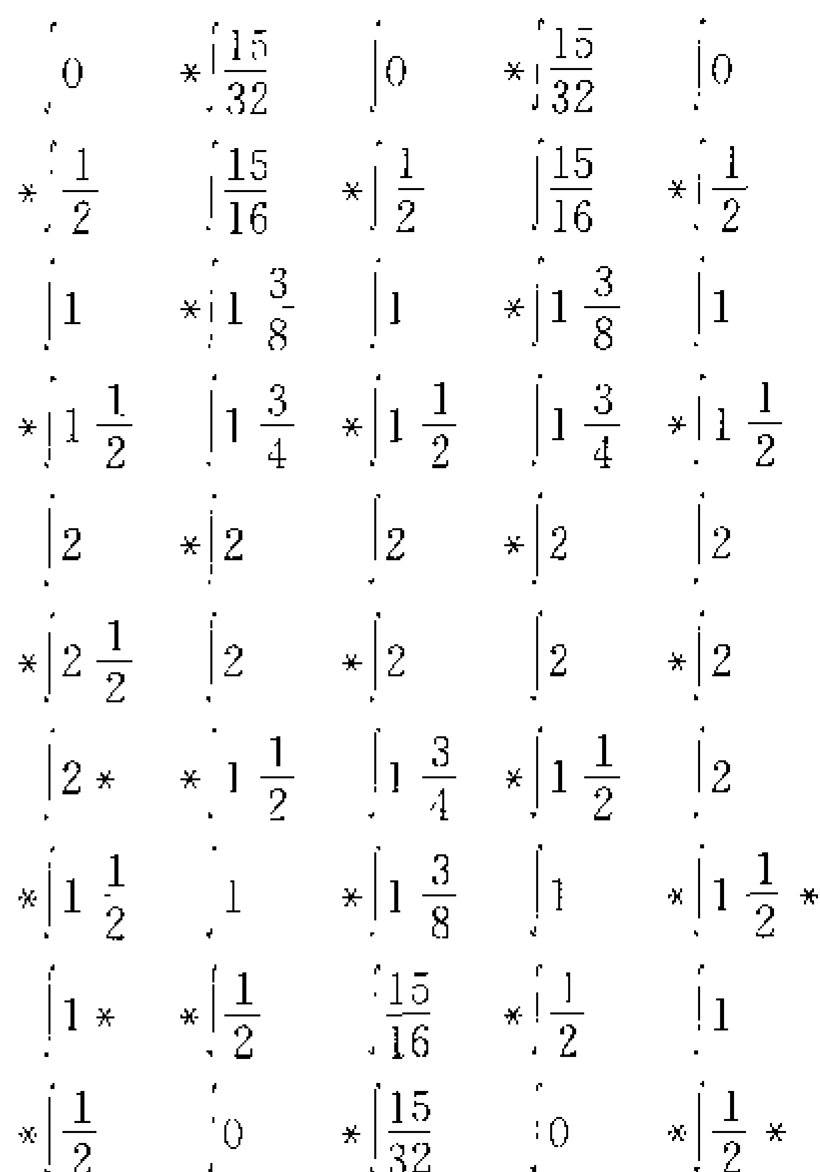



**图 27.** 更加过热的出租马车.

对图 23 来说，哪一个社团会赢呢？四辆出租马车都是在值为 $*\Big|\frac{3}{8}$ 的交叉路口，因而总的值将是

$$*+*+*+*+\Big|\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)=\Big|\frac{3}{2}=3*,$$

由于准许 RRR 有三次弃权机会，从上面的结果中减去了以后，最终得到 $*$，所以，先走的一方可以在本游戏中获胜.

在一个玩得很有水平的该游戏中，前四步应该移动所有的四辆出租马车，这样做了之后，

$$*\Big|\frac{3}{8}+*\Big|\frac{3}{8}+*\Big|\frac{3}{8}+*\Big|\frac{3}{8}$$

将变成

$$\Big|\frac{3}{4}+0+\Big|\frac{3}{4}+0.$$

下两步应该是移动现下在二马路与五马路上的出租马车，以使和数变为

$$*|1+0+*|\frac{1}{2}+0.$$

而最好的下一步是移动在三马路或四马路上的出租马车.这样一来，马车和将变成

$$|1+0+*|\frac{1}{2}+0=3.$$

从而使整个博弈的值变成

$$3-3=0.$$

如果 RRR 先走第一步，现在该轮到 LLL 走，于是 RRR 可以连续三次派司而取胜；当初如果是 LLL 先走，那么 RRR 将会发现三次“派司”还嫌不够；不管他们用不用，LLL 总能找到一个可以走动的地方.

## 可以倒走的癞蛤蟆—青蛙游戏

此种游戏的玩法基本上与通常的癞蛤蟆—青蛙游戏相同（见第 1 章）但是这些动物可以向前走，也可以向后走，但是不准许向后跳．图中给出的是 $(1,1)_1$ 游戏（见图 28）．试从

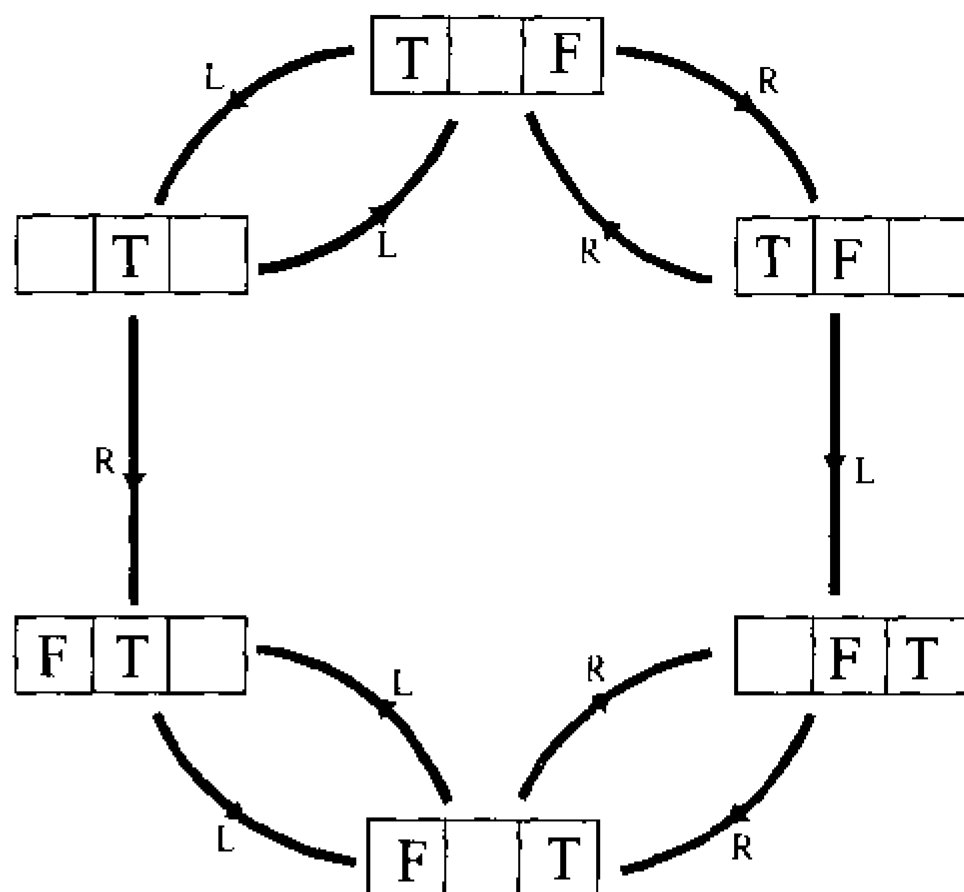



图 28．允许倒走的癞蛤蟆—青蛙游戏．



□FT≤|on--0,求即边,并验证离边与即边是同样的,局势的值呈现 0, *, 0, *,…交替状态;谁先走就谁输.

试分析$(1,1)_2$游戏(一只癞蛤蟆、一只青蛙,中间有两个空格)与$(2,2)_1$游戏并将你的结果与本章增补材料中给出的答案进行对照.

# 增　　补

## 巴赫的旋转木马游戏

我们以前曾试图费力地证明任一有圈博弈的即边与离边都有停止物，后来，克立佛·巴赫(Clive Bach，本章部分理论来源于他)终于发现了一个“旋转木马”游戏(图 29)，它有着一些令人困扰的特征：

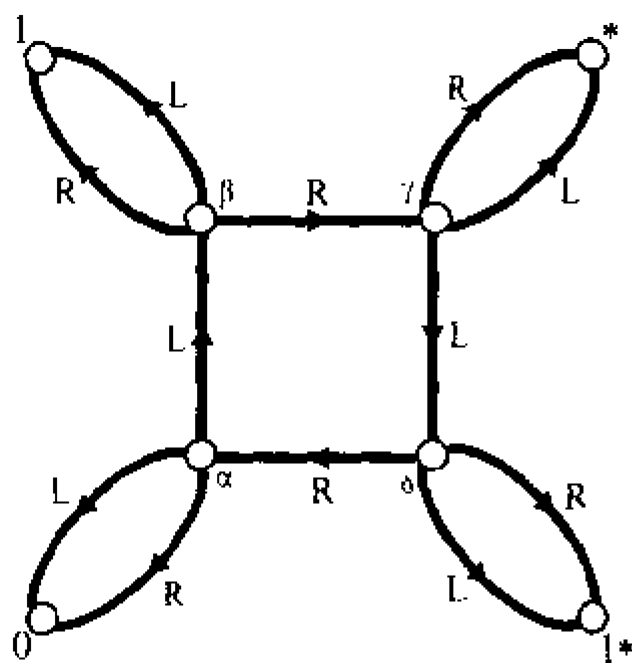


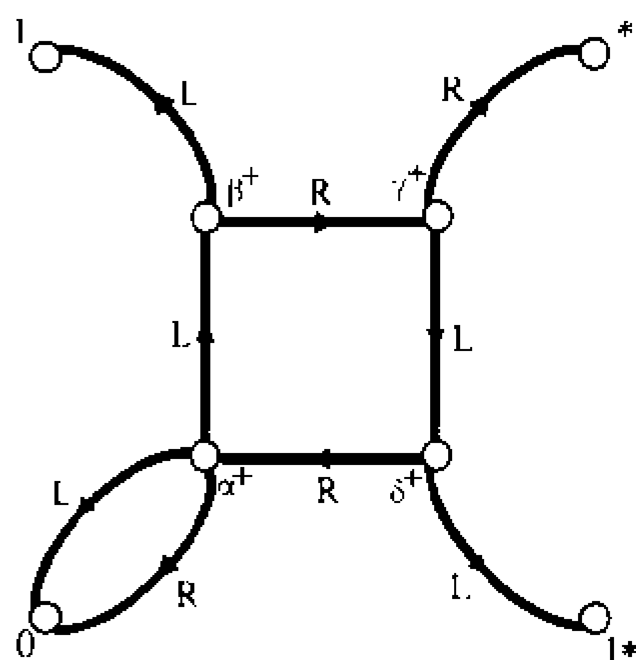

图 29. 巴赫的旋转木马游戏.

(i) 它的即边与离边与停止物不等价；

(ii) 其中有着一些不能忽视的被优超走法；

(iii) 如果在 $\alpha$—$\alpha$ 中，第一局中人总是绕着木马转圈子，那么第二局中人不能干别的事情，只能在另外的分支中走出其镜像行动.

(i)，(ii)的证明如下，考虑即边 $\alpha^+$，$\beta^+$，$\gamma^+$，$\delta^+$ 时，旋转本马游戏等价于




此图是从原图中省略了被优超的选择而导得的，被省略的选择是 $\gamma$ 的左方选择 $*$，$\beta$ 的右方选择 1，$\delta$ 的 $1*$。在导出图的任一局势中已经没有**可逆转**的选择，并且只剩下一个被优超优择（即 $\alpha$ 的左方选择 0）。最简形式定理的证明指出，在最简形式上等价于 $\alpha^+$ 的任何博弈必将具有一个结构，在此结构中最后剩下的被优超走法也要被删除.

但是，如果我们省略了 $\alpha^+$ 的被优超左方选择 0，则所得之博弈 $\hat{\alpha}$ 同 $\alpha^-$ 不等价！你可以用下面的办法来加以验证，即右方可以赢得 $\hat{\alpha}-\alpha^+$。由此可见，$\alpha^+$ 没有最简形式，它不可能是一个停止物.

为什么 0 即使被优超，而仍然不能省略呢，理由大致如下：左方可以沿着旋转木马走另一条路以取得更好的局势而不是直接踩到 0。但是，也确有某些情况，他踩到 0 之后可赢，而永远绕着旋转木马转圈子是赢不了别人的！

存在的问题：有没有另外一种最简形式的概念，使它可以适用于**一切**有限的有圈博弈？（特别说来，能适用于旋转木马游戏.）

巴赫又指出，图 30 中两个停止物 $s_0$ 与 $t_0$ 之和显然不可能具有等价于停止物的即边或离边

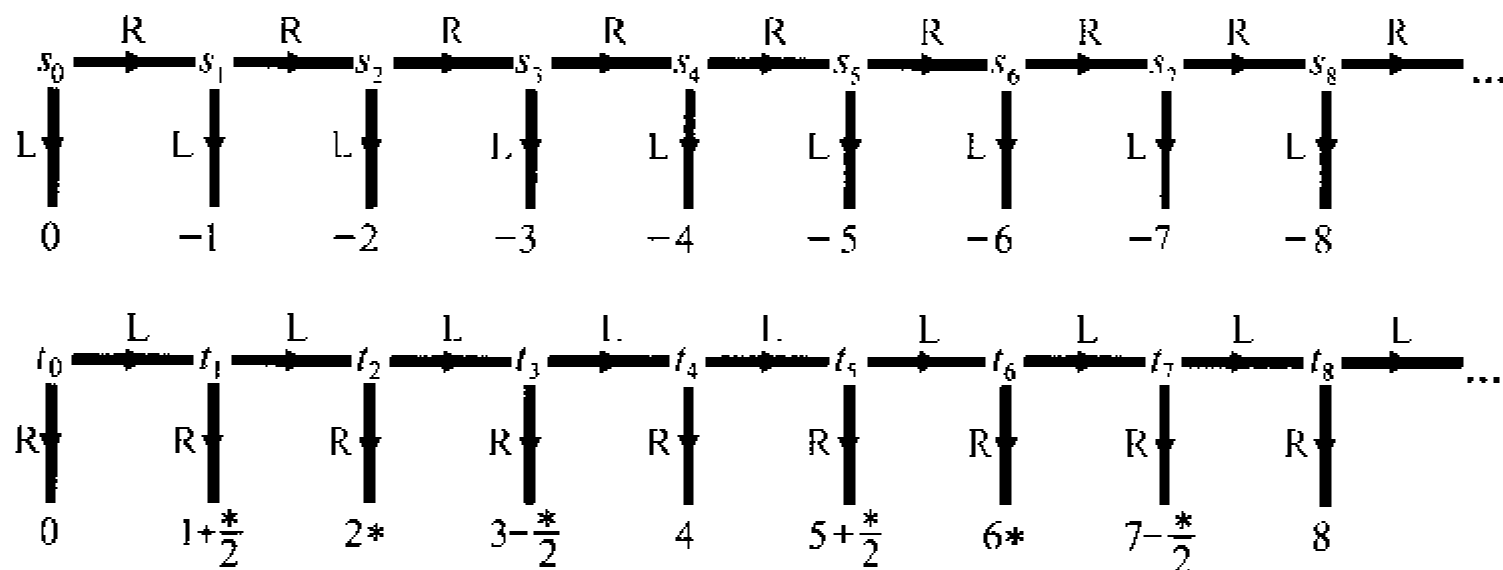



**图 30.** 这些停止物之和的边同停止物不等价.

(图 30 中的"半星" $\frac{*}{2}$ 就是{ ∗ , ↑ | ↓ ∗ ,0|, )*

## 挨近定理的证明

如从 **on** 出发,博弈 $\alpha^{+}$ 的挨近过程收敛,则它将产生上界

$$\alpha(\mathbf{on}), \qquad \beta(\mathbf{on}), \qquad \cdots$$

譬如对 $\alpha^{+}$ 的各种局势

$$\alpha^{+} \qquad \beta^{+} \qquad \cdots$$

具有满足不等式

$$[\alpha]\leqslant\{[\alpha^{L}]\mid[\alpha^{R}]\}, \qquad [\beta]\leqslant\{[\beta^{L}]\mid[\beta^{R}]\}, \qquad \cdots$$

的　$[\alpha]$,　$[\beta]$,　…

(实际上是同等式在打交道). 我们现在来证明,满足这些不等式的任何博弈 $[\alpha]$, $[\beta]$, …总会有

$$[\alpha]\leqslant\alpha^{+}, \qquad [\beta]\leqslant\beta^{+}, \qquad \cdots$$

(如果$[\alpha]$,$[\beta]$,…本身就已经是上限的话,我们将再次遇到等式).

于是我们将假定在如下的每一个博弈

$$\{[\alpha^{L}]\mid[\alpha^{R}]\}-[\alpha], \qquad \{[\beta^{L}]\mid[\beta^{R}]\}-[\beta], \qquad \cdots$$

都已把生存策略给了左方,我们需要在

$$\alpha^{+}-[\alpha]$$

中也有一个.

由于新策略相当难求,我们将假定右方善意地雇佣着无限众多的、有数学癖好的仆从,他们是:

拉多,　拉东,　…　拉德马赫　…**

$r_0$　$r_1$,　…　$r_m$,　…

这些仆人全都听从左方自由调遣,并准许他利用宏伟建筑匠师会堂的大厅以及各种其他家具

---

* 译者注:原文如此,见原书第 350 页. 此处有相当严重的错误,第二根竖线很费解. 方括号与圆括号也不能配套,应改为{ ∗ , ↑ | ↓ ∗ ,0},最后再接半只圆括号以作为注释的结束.

** 译者注:这些都是当代西方著名数学家的姓氏,作者不过信手拈来,并无深意. 这些人也不是研究博弈论的学者.

陈设.

在图 31 的较远的一张桌子上建立起实际博弈 $\alpha^{+}-[\alpha]$,以供左方同其实际对手右方来进行对抗. 但是,甚至在博弈开始前,左方吩咐仆人 $r_0$ 搬进一张额外的桌子,在它上面建立起博弈之差

$$\{[\alpha^{L}]|[\alpha^{R}]\}-\{[\alpha^{L}]|[\alpha^{R}]\}=\alpha_0-\alpha_0,$$

并把一只椅子(编号 $s_0$)放在

$$\{[\alpha^{L}]|[\alpha^{R}]\}=\alpha_0 \quad 与 \quad -[\alpha]$$

附近. 因为按照定理的假设,左方在这两个博弈之和中有一个生存策略(我们把它叫做 $S_0$).

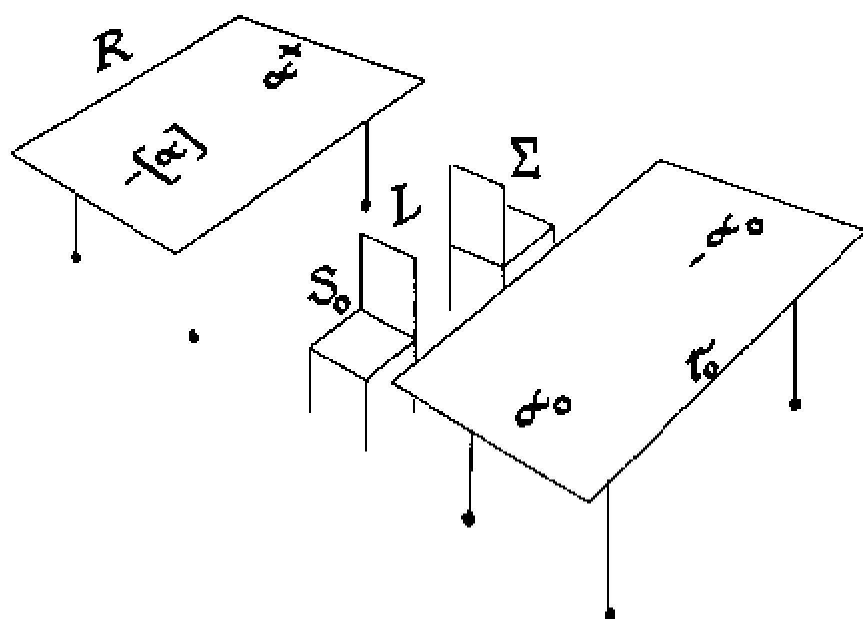



图 31. 用挨近法寻找策略——开始时的座位.

已经放在大厅里的,编号为 $\Sigma$ 的椅子则放在博弈

$$\alpha^{+} \quad 与 \quad -\alpha_0$$

附近. 当博弈继续进行下去时,左方不时叫一个新仆人搬进一只新椅子 $s_i$,一张新桌子,在桌子上建立起形式为 $\alpha_i-\alpha_i$ 的局势. 仆人 $r_i$ 被详细告知,从此以后,对左方的每一步动作,必须在 $\alpha_i$ 或 $-\alpha_i$ 作出回应,并在另一个分支中走出它的镜像动作. 在图 32 中我们看到了这些桌子,在桌子上都已标记了它们原先被建立起来的局势.

座椅 $S_0,S_1,\cdots,S_m,\Sigma$ 放在相邻的两张桌子之间,每一把椅子都对应着玩这两种相邻博弈的策略. 策略 $S_i$ 是最容易描述的. 当座椅 $S_i$ 被第一个带进来时,下一个要放上去的局势是形式为

$$\{[\beta^{L}]|[\beta^{R}]\}-[\beta]$$

的局势(对 $\alpha$ 的某个局势 $\beta$ 而言);策略 $S_i$ 是由我们的假设所给出的左方的生存策略.

最接近座椅 $\Sigma$ 的两个博弈通常具有形式

$$\beta=\{\beta^L|\beta^R\} \quad 与 \quad -\{[\beta^L]|[\beta^R]\}$$

(对 $\alpha$ 的某个 $\beta$ 局势而言). 于是"策略"$\Sigma$ 就是以下各行动的序列. 如果右方或者仆人拉德马赫在这些博弈中的无论哪一个分支中走出一步时，左方可在另一个中走出相应的一步，以使得复合局势具有形式

$$\gamma-[\gamma]$$

(对 $\alpha$ 的某个局势 $\gamma=\beta^L$ 或 $\beta^R$ 而言). 然后他吩咐一个新仆人 $r_{m+1}$ 搬进来一张新桌子，在它上面建立起两博弈之差

$$\{[\gamma^L]|[\gamma^R]\}-\{[\gamma^L]|[\gamma^R]\}.$$

另外还要搬进一只新座椅 $S_{m+1}$，放在博弈

$$\{[\gamma^L]|[\gamma^R]\} \quad 与 \quad -[\gamma]$$

附近，对这两个博弈和而言，他有着一个同一名称 $S_{m+1}$ 的生存策略. 座椅 $\Sigma$ 于是重新安放在

$$\gamma=\{\gamma^L|\gamma^R\} \quad 与 \quad -\{[\gamma^L]|[\gamma^R]\}$$

附近. 左方的总体策略就是这样了. 对于任一动作，不论走它的人是他的真正对手右方，还是仆从 $r_0$，$r_1$，…中的一人，他只要用最近的座位所给出的相应策略去回应就行了. 策略 $S_i$ 是应付各种差博弈 $\alpha_i-\alpha_{i-1}$ ($\alpha_i\geqslant\alpha_{i-1}$)，由假设给了我们的，而策略 $\Sigma$ 却需要一个"模仿"动作，搬进一只新座椅与插进一张新桌子. 显然这一复合策略总能为左方对大厅中的一个博弈作出回应，但是并不很清楚他能否在实际游戏中以该游戏中的一步动作来回答另一步，更加不清楚的是，如果游戏无限进行下去，他能否避免损失？我们现在进而建立起这些事实.

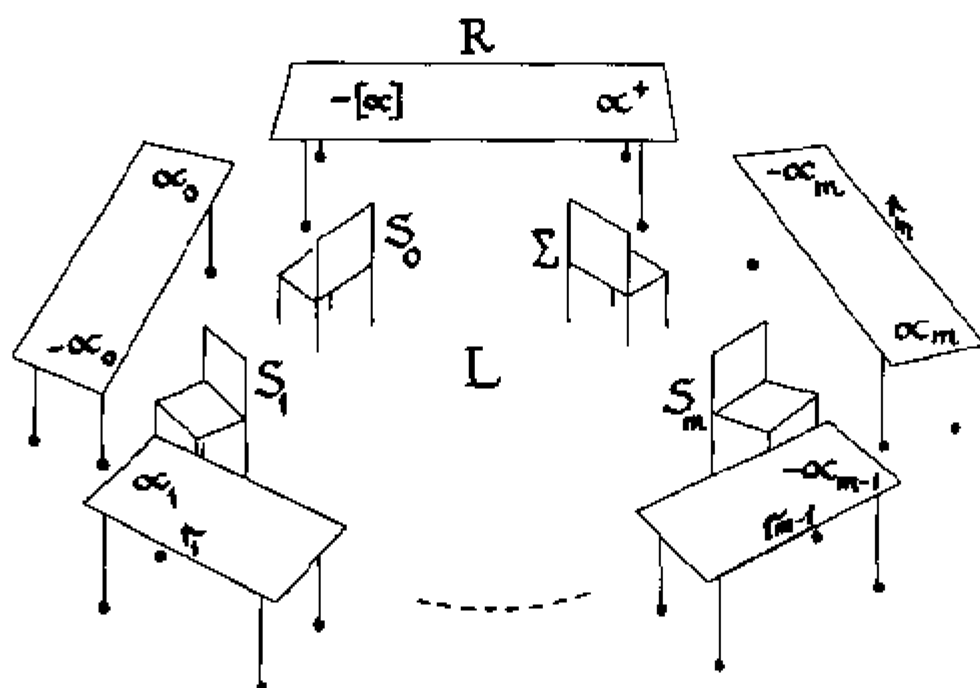



**图 32.** 右方，拉多，拉东，……拉德马赫在团团转.

如果无限多张桌子带入大厅，则左方肯定能在 $\alpha^+$ 中走出无限多种步法对付他的敌手，既然 $\alpha^+$ 中所有的无限多种走法都是左方获胜的，当然他可以避免损失.

假定情况不是这样，我们可以设想除了图 32 中所表示的那样，不再有更多张桌子带入大厅了，于是

$$\text{sign}(\alpha^+)=\text{sign}(\alpha_m)=0.$$

现在，策略 $S_0,S_1,\cdots,S_m$ 的安排将使

$$\text{sign}([\alpha])\leqslant\text{sign}(\alpha_0)\leqslant\text{sign}(\alpha_1)\leqslant\cdots\leqslant\text{sign}(\alpha_m)=0.$$

于是 $\text{sign}([\alpha])=0$ 或负. 如果 $\text{sign}([\alpha])=$ 负，则左方肯定在真实游戏 $\alpha^+-[\alpha]$中能作出无限多种走法. 并满足有圈博弈相互比较时的**保持在上面**生存条件. 如果 $\text{sign}([\alpha])=0$，则在一切分支中的总的步法当是一个有限数，而左方可以走出最后的一步. 但这一步不是对付仆人的，因为仆人总是要作出回应的，那就不算最后一步了. 所以它必然是对付其真正对手的，即右方. 就这样，挨近定理终于得到了证明.

在鲍勃·李[*]的论文中所出现的挨近过程的一种形式使我们产生了为有圈博弈建立一种一般理论的想法. 那篇论文的主要结果实质上就是挨近定理，不过所有的即边与离边全都是数.

## 练习一的答案

容易验证，从这种博弈的任一局势出发，不存在走法的无穷交替序列，所以 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是停止物，从而我们只要从一侧来挨近即可，譬如说，从 **off** 来逼近.

由定义式

$\alpha=\{\delta|\ \}$，　　$\beta=\{\alpha\ \alpha\}$，　　$\gamma=\{\ \ |\alpha\}$，　　$\delta=\{\gamma|\beta\}$，

我们能够相继推出

$\alpha\geqslant\{\textbf{off}|\ \}=0$，

$\beta\geqslant\{0\ 0\}=*$，

$\gamma\geqslant\{\ \ 0\}=-1$，

$\delta\geqslant\{-1|*\}=0$，

$\alpha\geqslant\{0|\ \}=1$，

$\beta\geqslant\{1|1\}=1*$，

---

* 译者注：即本章所附参考文献中的李孝严，此人当为一华裔学者，但详情不得而知.

$$\gamma \geqslant \{\ |1\} = 0,$$

$$\delta \geqslant \{0|1*\} = 1,$$

$$\alpha \geqslant \{1|\ \} = 2,$$

$$\beta \geqslant \{2|2\} = 2*,$$

$$\gamma \geqslant \{\ |2\} = 0,$$

$$\delta \geqslant \{0|2*\} = 1.$$

挨近过程到此结束. 实际上,从 **on** 出发来逼近可以更快一些.

## tis 与 tisn

$$\textbf{tis} = \{\textbf{tisn}|\ \} \quad 与 \quad \textbf{tisn} = \{\ |\textbf{tis}\}$$

的即边可以通过下面的式子来近似:

$$\textbf{tisn} \leqslant \{\ |\textbf{on}\} = 0,$$

$$\textbf{tis} \leqslant \{0|\ \} = 1,$$

$$\textbf{tisn} \leqslant \{\ |1\} = 0$$

而离边的近似式子为

$$\textbf{tis} \geqslant \{\textbf{off}|\ \} = 0,$$

$$\textbf{tisn} \geqslant \{\ |0\} = -1,$$

$$\textbf{tis} \geqslant \{-1|\ \} = 0,$$

从而有

$$\textbf{tis} = 1\&0, \qquad \textbf{tisn} = 0\&-1.$$

为了回答以前提出的问题:若将一切无限步数的玩法视为平局,则 **tis**$+*$ 的结果是什么?

我们注意到左方走到$*$时可赢,因为右方在 **tis** 中是无法行动的,但如果右方先走,那么他可以走到 **tis**$+0$,此时走法将有无限多,所以该博弈可视为打成平局.

## 博弈 upon

博弈 **upon** 有着稳定度

$$d = \uparrow^{\text{on}} = \{0|-\textbf{upon}*\} \qquad (读作“\uparrow的 on 次方”)$$

在此种情况下,若把各个 **upon** 与其负博弈相加,我们就能对每个 $n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$得出

一类，而每一类中正好包括两簇

$$(\textbf{upon}\times n)(-d)\text{与}(\textbf{upon}\times n)(d).$$

所以在把这两种东西相加时，你只要按照学校里所教的办法把 $n$ 相加就行，至于 $d$ 的相加则是像下面那样：

$$d+d=d,(-d)+(-d)=-d,$$
$$d+(-d)=d\&(-d)=(-d)+d.$$

## 可以倒走的癞蛤蟆—青蛙游戏

对可以倒走的癞蛤蟆—青蛙游戏$(1,1)_2$ 进行挨近过程之后，我们得出了图 33 那样的，看来不大像环圈的值 0 与 *．但是，实际做游戏时就会发现潜在的转圈子．$(2,2)_1$ 游戏的挨近过程最好像图 34 那样分成六步来做，这时你会发现，任一跳跃动作将把你带回已分析过的局势．于是你将会看到潜在的转圈值将在最内层（仅在这部分转圈子）中出现．

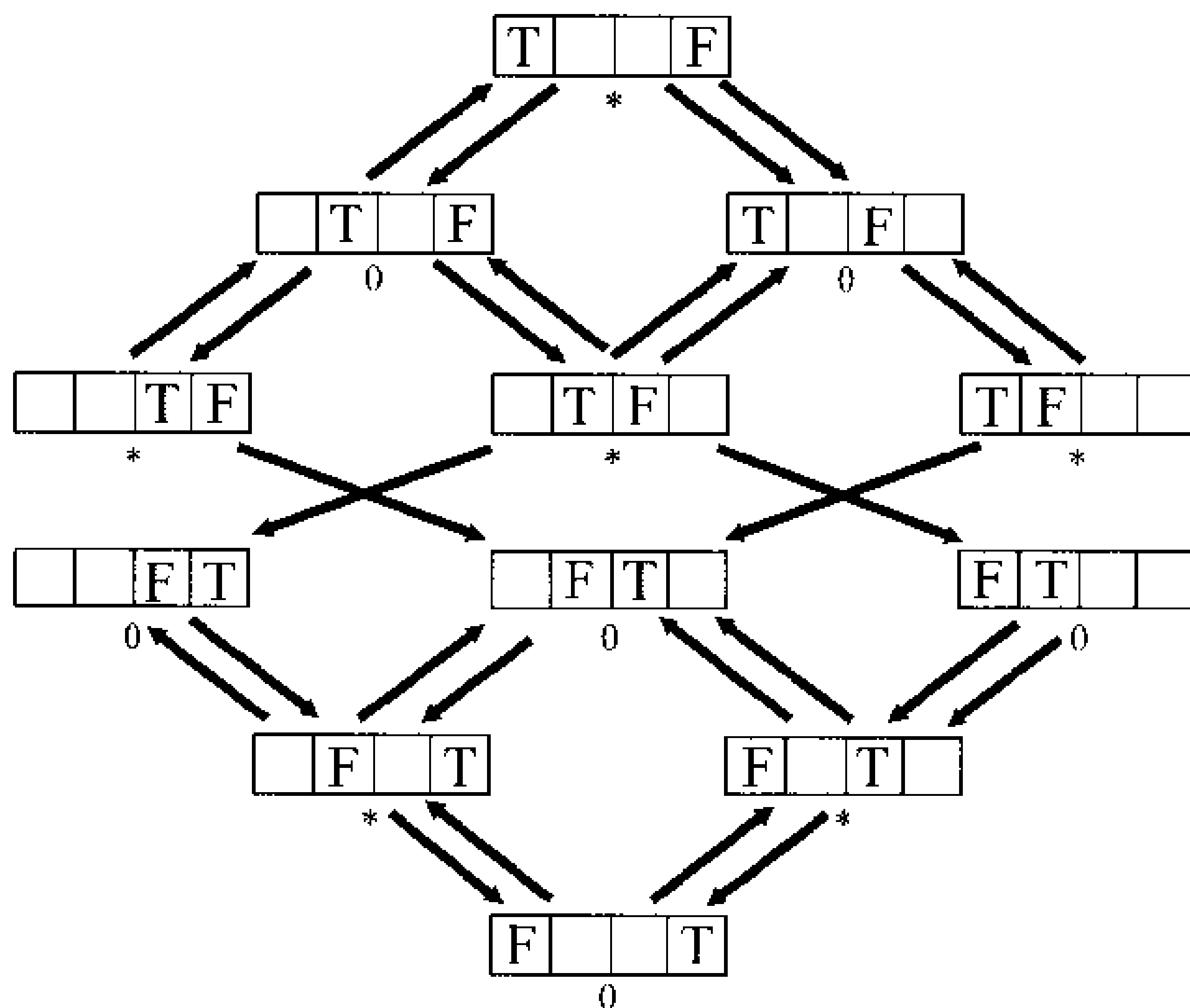



图 33．可倒走癞蛤蟆—青蛙游戏$(1,1)_2$ 中的潜在转圈性．

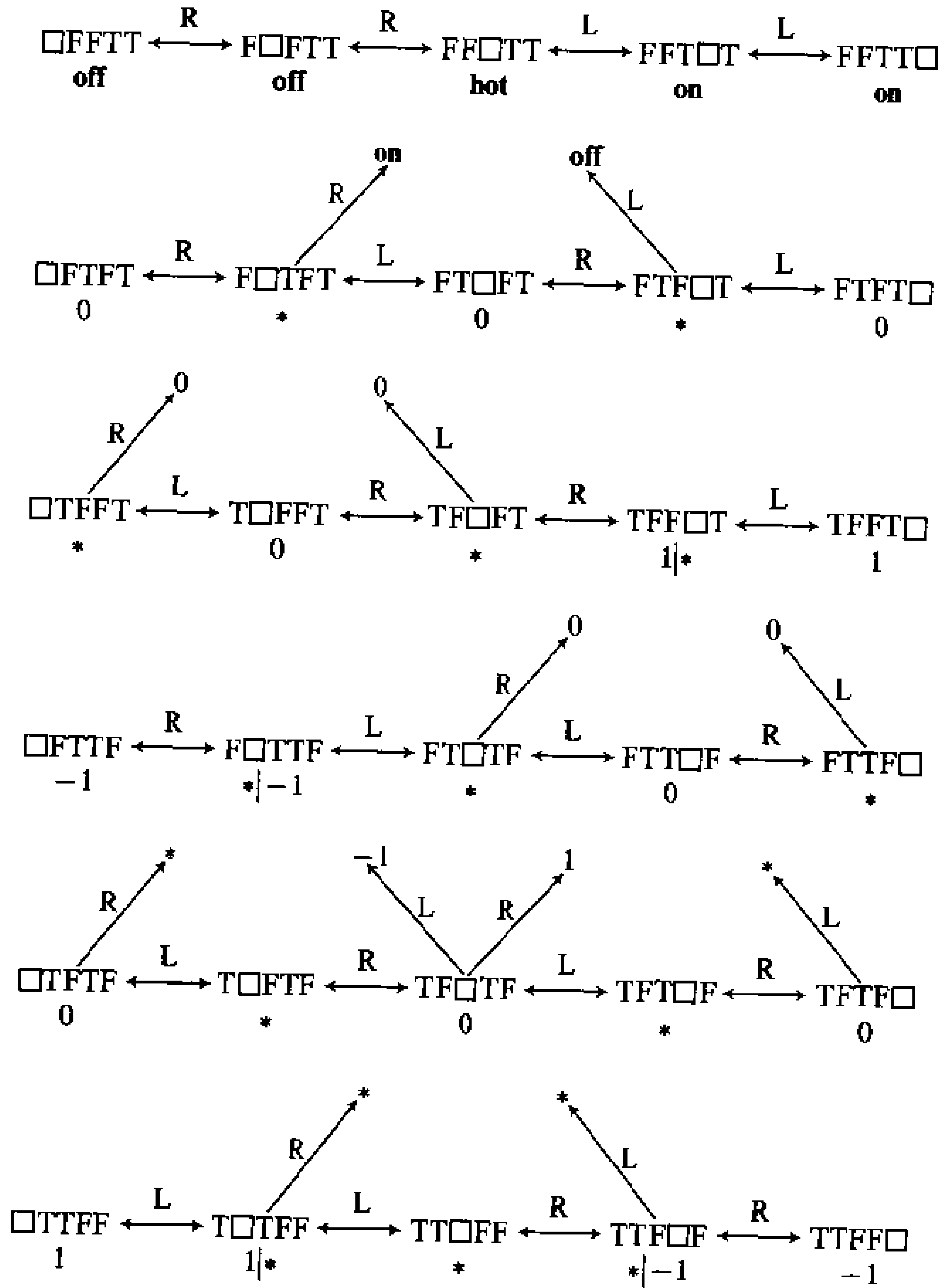



图 34. 可倒运癞蛤蟆—青蛙游戏(2,2)₁中的潜在转圈性.



## 参考文献及进一步阅读材料

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapter 16.

J. H. Conway, Loopy games, in Béla Bollobás(ed.) "Advances in Graph Theory" (Cambridge Combinatorial Conference 1977) Ann. Discrete Math. **3**(1978)55－74.

James Alan Flanigan, An analysis of some take-away and loopy partizan graph games, Ph. D. dissertation, UCLA, 1979.

Robert Li Shuo-Yen. Sums of Zuchswang games, J. Combin. Theory, Ser. A **21**(1976)52—67.

Ahiezer S. Shaki, Algebraic solutions of partizan games with cycles, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **85**(1979)227—246.

# 第12章

# 永恒的博弈与有后继要求的博弈

如果它不是可以继承的事物.我是不会在意的.

——吉恩·奥斯丁,《傲慢与偏见》,第23章

天幕下端,可见一弯新月与一颗明星.

——塞缪尔·泰勒·柯勒里奇,《古代的水手》,第三部

如果你在玩一些博弈之和时,改变了通常的游戏规则与终止条件,那将会出现什么情况呢?本章要讲到的两个重要理论是涉及**无偏博弈**的——即C·A·B·史密斯的无偏有圈博弈,它可以一直玩下去;另一种则是我们的有后继要求或免费赠送动作的一种新的博弈理论.至于较艰深的有偏有圈博弈与反常情况下的无偏博弈则在本章的相邻章节中处理*.

你是否注意到在宴会结束时,钵盂里总会留下一些杏仁,因为它们很难砸碎?下面也有一个相当难啃的小游戏,你可以用来迷惑来宾.

---

* 译者注:指第11章与第13章.

# 公平分配与大小结对

取 10 颗杏仁，把它们在地毯上分成一堆堆——我们建议你在开始时把它们分成一颗与二颗的各堆。然后对你在宴会中最感兴趣的一位朋友提出挑战，请他（或她）同你一起来参加下列“公平分配与大小结对”游戏，它的走法是：

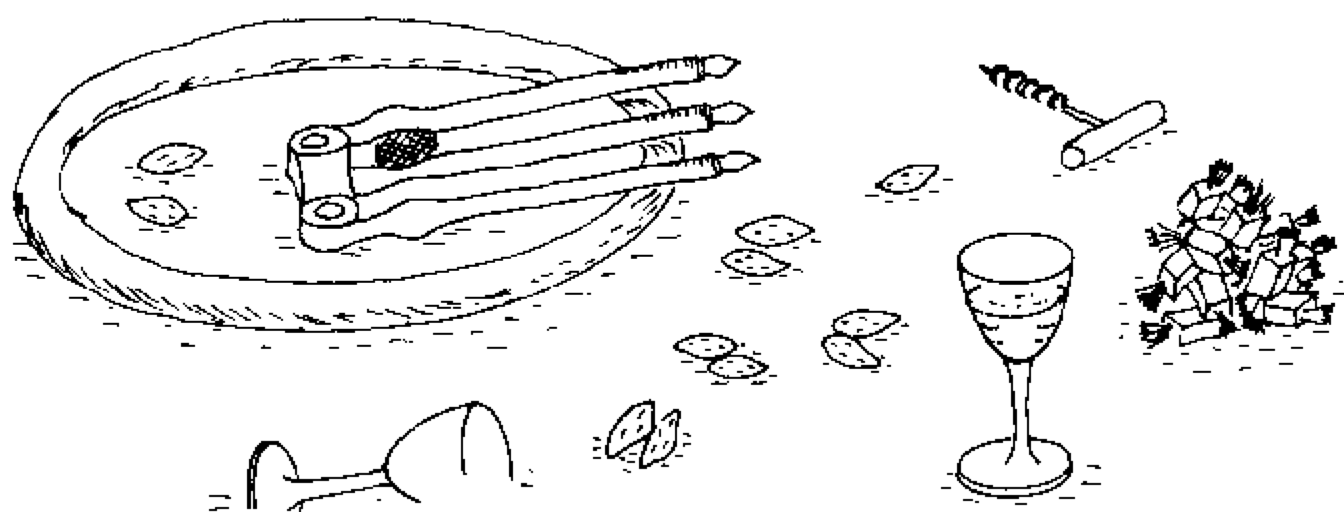


**图 1.** 哪位来宾对“平分与结对游戏”感兴趣啊?

| | |
|---|---|
| 把任一堆坚果分成两堆或更多堆同样大小的堆 | **公平分配** |
| 把不同大小的任意两堆并成一堆 | **大小结对** |

如果把所有的杏仁全部分完（每堆只含一颗杏仁），那么你就赢了，因为此时你的对手已经无法行动。对此外任何其他局势来说，至少还有一步可走，那就是把某堆坚果分为每堆只有一颗杏仁的各堆。

本游戏的奥妙在于你会不时返回你已经见到过的情况，然而下一步要走的人却不一定是同一局中人，实际上本游戏可以达到一种近乎狂欢的地步：欣赏一位有造诣的局中人不断地转着不同的圈子，突然一下子取得了胜利。胜利来临时，对手已被搞得头昏脑胀，眼花缭乱，记不清楚他在什么地方跳出了旋转木马（特别是在又经过一次“干杯”之后）。

为了在此游戏中保持你自己的平衡，需要掌握 $\mathscr{P}$—局势。譬如说，在九颗杏仁的游戏中，它们是：

72，54，5211，4311，4221，333，321111，222111，111111111.

在游戏图中找出这些局势是很容易的——若一局势的一切选择都已标上 $\mathscr{N}$（包括其特例：没有任何选择可走时），则将此局势标记为 $\mathscr{P}$；而将一个局势标记为 $\mathscr{N}$，如果它有一个选择已标记为 $\mathscr{P}$ 的话。在图 2 中，我们已对一个、二个、……最多有六个杏仁的情况作好了这些标记工作。

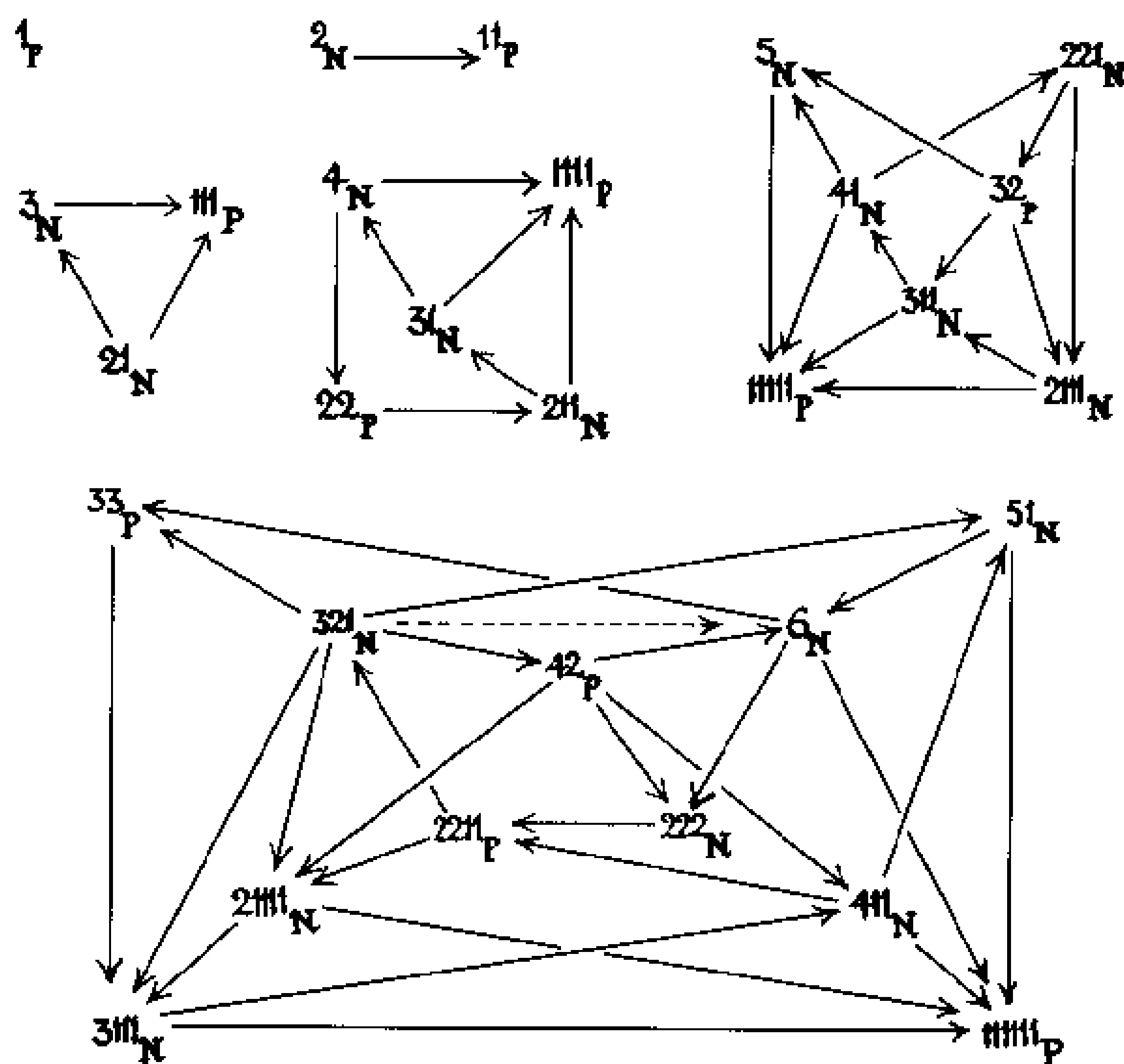



**图 2.** 公平分配与大小结对游戏的各种状态图(从一颗到六颗杏仁为止).(图中虚线表示一种与通常走法不同的结对合并法.)

为了赢得游戏,当然你必须永远走到一个 $\mathscr{P}$ 局势,但若你的知识仅限于此,那么你将发现在剩下的时间里总是像图 3 那样,不断转圈了.你总是走到 $\mathscr{P}$ 位置的(图中打着方框的),但好像总是不能赢,这究竟是什么原因呢?

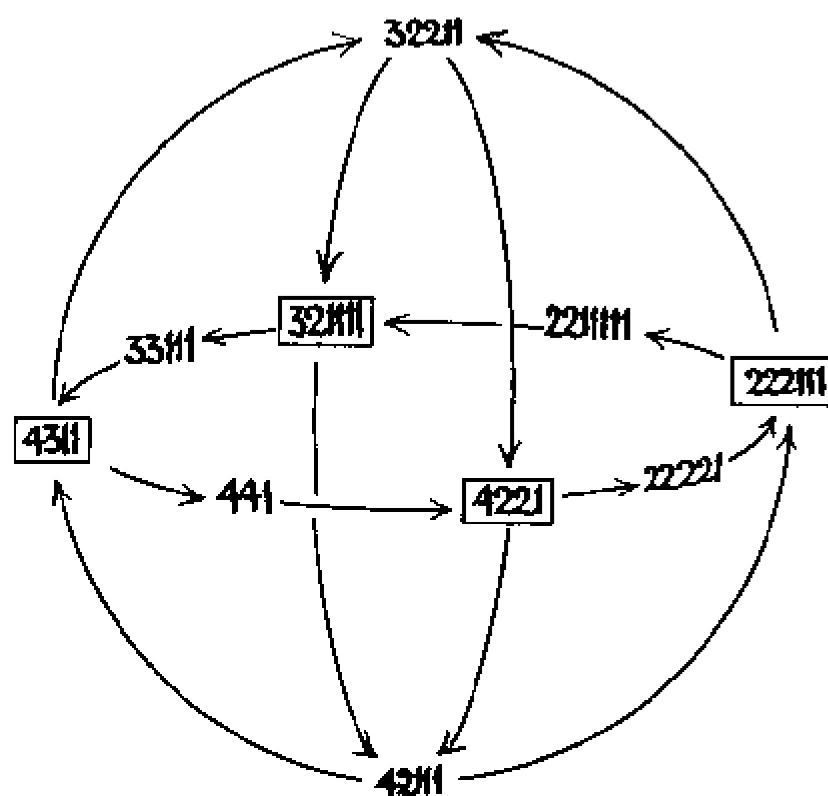



**图 3.** 在九颗杏仁的世界里不断转圈子.

## 你要多久才能赢?

你需要了解的另一件事是局势的**遥远度**.由第 9 章可知,所谓遥远度是指胜利的一方究竟要走多少步以便强行取胜,另外从该章也可得知,根据遥远度的或偶或奇,可以判明是 $\mathscr{P}$—局势还是 $\mathscr{N}$ 局势.但是,在有圈博弈中,也可能存在着具有无穷大遥远

度的局势，这时，两位局中人都不可能强行取胜，因为，如果走法得当，博弈将能永远进行下去.

对于这类博弈，我们将把局势的遥远度划分为若干阶段：

阶段 0.　　一切终端局势的遥远度赋以值 0.

阶段 1.　　不论什么局势，如果它有一个选择的遥远度为 0，则赋予该局势的遥远度为值 1.

阶段 2.　　如有一新局势，它的一切选择都已赋予值为 1 的遥远度，则应赋予该新局势的遥远度值 2.

阶段 3.　　对任一新局势，如果它有一个遥远度为 2 的选择，则应赋予该新局势的遥远度为 3.

…………………………………………………………

阶段 $2n$.　　把遥远度 $2n$ 赋予那些新局势，若它的一切选择都已有了较小的奇数赋值（其中最大的一个为 $2n-1$）.

阶段 $2n+1$.　将遥远度 $2n+1$ 赋给任意新局势，如果它有一个选择，其遥远度为 $2n$ 的话.

## 可能存在着开放局势（$\mathscr{C}$—局势）

当你到达某个阶段，按照上述规则，已经无法对遥远度赋值时，则认为这些局势的遥远度都是无穷大，如果双方应对有方，则博弈将永久性地持续下去. 此时，我们将称之为**开放局势**，或简称为 $\mathscr{C}$—局势. 图 4 给出了直到 10 颗杏仁为止的**公平分配与大小结对**游戏中一切 $\mathscr{P}$—局势（打上方框的）与若干 $\mathscr{N}$—局势的图解，这是按照它们的遥远度来排列的. 如果你想赢，那就应当记住 $\mathscr{P}$—局势，特别是那些遥远度很低的局势. 但应尽量避免泄露图解的机关，所以你不应该老是采取步数最少的制胜策略. 有时候，你也可以走到遥远度较高的那些 $\mathscr{P}$—局势. 如果同你对垒者是个新手，你甚至可以故意走到遥远度较高的 $\mathscr{N}$—局势中去，以等待他的、迟早不可避免的错误走法.

令人惊讶的事实是：如果杏仁数为 10 颗或 10 颗以下，那么，只要应对得当，是不存在永远可以走下去的局势的. 但是，杏仁数一旦达到 11 颗，情况就发生剧变：

存在着一个 $\mathscr{P}$—局势 $\boxed{11111111111}$，其遥远度为 0，

十个 $\mathscr{N}$—局势 2111111111，311111111，41111111，…，其遥远度均为 1，

四十五个 $\mathscr{C}$—局势（它们都有 2 个或 2 个以上可分的堆）.

所以这种博弈是极其乏味的——即便在一位专家与一个只能看一步的生手对阵时，它也能永远走下去，没完没了.

如果 $n$ 是两个素数 $p,q$ 之和，则在 $n$ 颗杏仁的博弈中，所谓“哥德巴赫局势”$\boxed{p,q}$的遥远度为 2. 但是我们相信，对每个 $n>10$ 的博弈来说，其中绝大多数局势为 $\mathscr{C}$—局势.

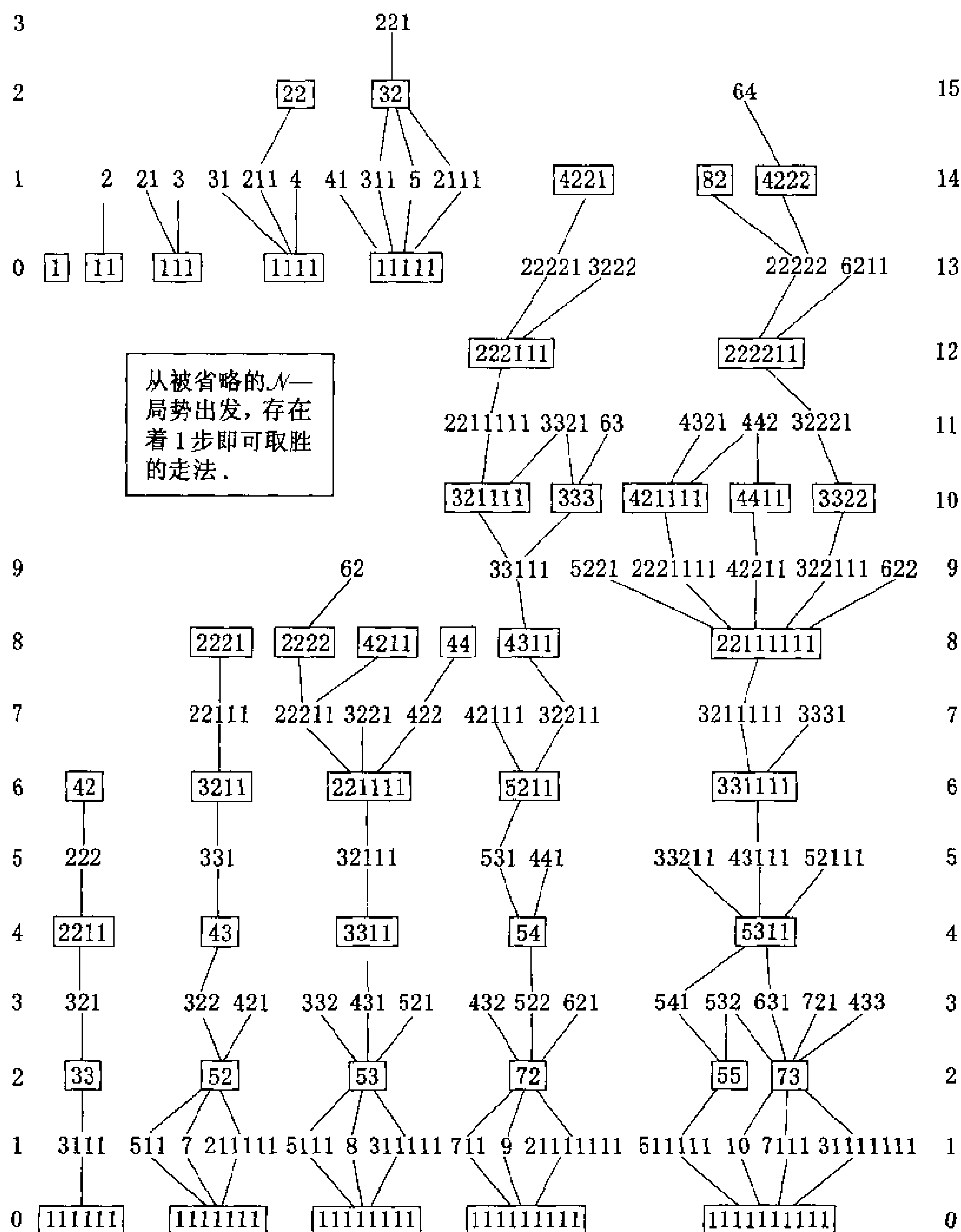



**图 4.** 直到十颗杏仁为止的局势.

在任一博弈中我们将期望 $\mathscr{N}$—局势多于 $\mathscr{P}$—局势，因为具有一个 $\mathscr{P}$—选择的局势将自动成为 $\mathscr{N}$—局势. 若博弈具有许多环圈，我们当然会指望它也会具有大量 $\mathscr{O}$—局势.（十颗或十颗以下杏仁的公平分配与大小结对游戏的情况是不典型的）. 所以用手工方式分析这类博弈时，最好是集中分析 $\mathscr{P}$—局势. 你们可以先求出一切终端局势——即遥远度为 0 的 $\mathscr{P}$—局势. 然后再去攻打遥远度为 2 的 $\mathscr{P}$—局势，就是每一步都可以逆转为终端局势的. 照此方式继续分析下去，直到把全部 $\mathscr{P}$—局势（或者你自己）搞完为止. 至于 $\mathscr{N}$—局势或 $\mathscr{O}$—局势的分析，那不过是浪费笔墨而已.

## 德·波诺的 $\mathscr{L}$ 块游戏

爱德华·德·波诺（Edward de Bono）在其著作《思考五日记》中介绍了这个小游戏（图 5）. 它是在 4×4 棋盘上摆弄的；每位局中人都有他自己的 $\mathscr{L}$ 块（分别用蓝、红两色加以区别），可以把它翻转来，另外还有两只中性的 1×1 小方块. 每走一步由两部分组成：

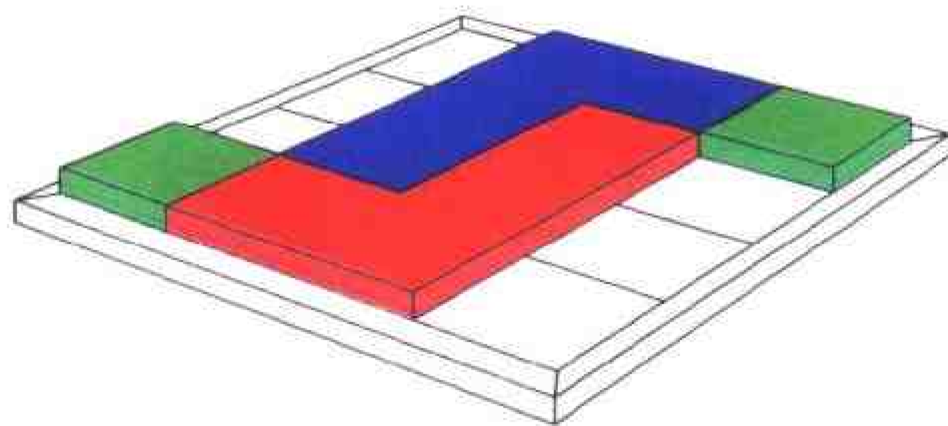


**图 5.** 怎样来玩 $\mathscr{L}$ 块游戏.

你**必须**把自己的那个 $\mathscr{L}$ 块拿出来，再把它放回到棋盘上的**另一个**位置.

如果你高兴，你**可以**把一个中性块改变位置.

倘若你无法行动，因为只有一个位置可以安放你的 $\mathscr{L}$ 块时，那时你就输了.

从棋盘上的对称性来考虑，共有 82 个不同的位置来安放 $\mathscr{L}$ 块，因此，一共有 82×28＝2 296 个不同局势. 不难通过手算得出遥远度为 0 的 $\mathscr{P}$—局势共有 15 个，从而再继续寻求遥远度为 2 的 $\mathscr{P}$—局势，如此等等，从而把计算工作归结为 29 个 2 步回溯解析. 不必作向前或横向思考，只要回溯就行. 不过，幸运的是我们不必再花费什么力气去思考了，吉尔斯维克（V. W. Gijlswijk），金特瓦德（G. A. P. Kindervater），土巴根（G. J. Van Tubergen）以及维盖林克（J. J. O. O. Wiegerink）已经利用计算机找到了所有 2 296 个局势的最优解，并从中鉴别出 29 个 $\mathscr{P}$—局势，1 006 个 $\mathscr{N}$—局势与 1 261 个 $\mathscr{O}$—局势. $\mathscr{N}$—局势与 $\mathscr{P}$—局势的分布如下：

| 遥远度 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 总计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{P}$—局势 | 15 | | 3 | | 3 | | 5 | | 3 | | 29 |
| $\mathscr{N}$—局势 | | 768 | | 27 | | 81 | | 11 | | 119 | 1 006 |

只要你具有向前看一步的能力，你就不需要他们论文中给出的完整表格. 只要你走到图 6 中所示

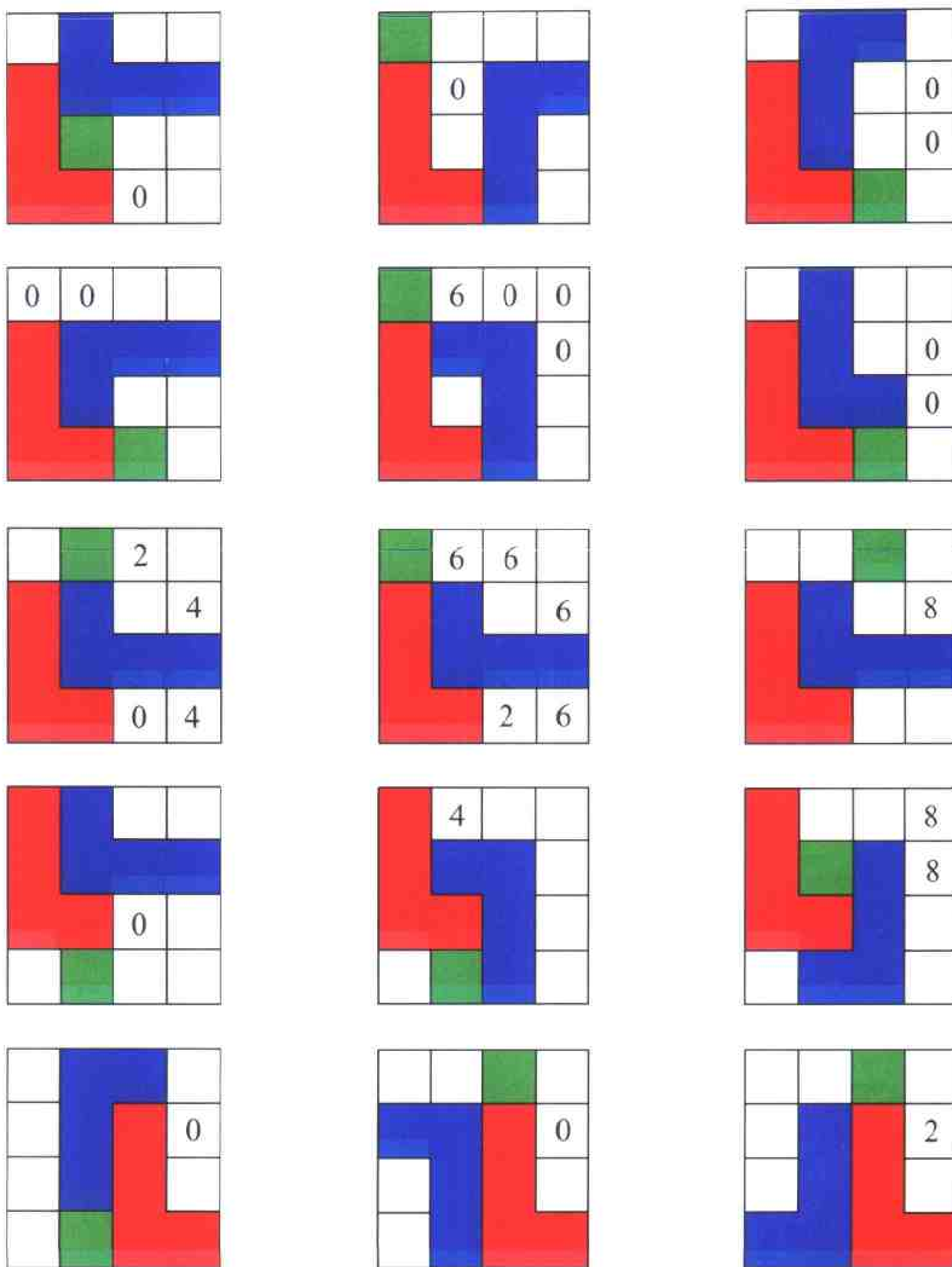



图 6. 德·波诺 $\mathscr{L}$ 块游戏中 29 个 $\mathscr{P}$—局势的遥远度.

的 29 种局势之一，而且以后走法得当，你就肯定能赢. 否则通过无限重复，博弈将出现不分胜负的局面，除非你的对手使你陷入这些局势而使双方角色互换. 此时他有可能知道他的战略，而你只好认输了.

图 6 中的定向安排是使红色(活动性的)$\mathcal{G}$块看上去就像个字母 $L$. 试把你的 $\mathcal{G}$ 块尽量凑成图中的蓝色 $\mathcal{G}$块(不活动的)两个中性块中的一块已在图中印出绿色，另一块的可能位置亦已在图中用绿色数字标出，并把由此而引出之局势的遥远度告诉了你.

在本章增补材料中你将能找到一个最长的合理对弈局势(遥远度为 9)，高勒(N. E. Goller)的简单而巧妙的战术将至少使你打成平局.

## 蝰蛇* 与扶梯

姑婆莫迪在这个圣诞节送给吉米与基妮一些小游戏，不过其中绝大多数游戏都是粗制滥造，也不太有趣. 下面将要讲到的蝰蛇与扶梯游戏只是一张 5×5 卡纸，还附有一只用塑料制造的，上面刻着四个数字的骰子，滚动得不太好，所用的筹码大都一模一样，你也难以区别. 这些东西在图 7 中已经都表示出来了. 两位孩子发现，骰子在桌子上滚动时，可以出现从 1 至 4 的任一数字，所以他们决定舍弃不用，而是把他们所打算移动的任何筹码向前行进 1，2，3 或 4 格. 他们同意在任一格子上可以放置任意个数的筹码，谁把最后一只筹码送回"家"，他就赢了.

基妮不久就注意到，当所有的筹码都已放到顶上一行时，这游戏实际上就是她所说的"可恨的火柴游戏". 用我们的术语来说，它就是一些筹码的博弈和. 而顶上一行的值是

$$\boxed{21} = *4, \quad \boxed{22} = *3, \quad \boxed{23} = *2, \quad \boxed{24} = *1, \quad \boxed{25} = 0.$$

当你一旦到达$\boxed{20}$时，你可以立即爬上梯子而走到$\boxed{23}$，所以

$$\boxed{20} = \boxed{23} = *2.$$

类似地有

$$\boxed{11} = \boxed{21} = *4, \quad \boxed{9} = \boxed{25} = 0, \quad \boxed{8} = \boxed{21} = *1,$$

由于从$\boxed{19}$到$\boxed{7}$有一条蛇，于是

$$\boxed{19} = \boxed{7},$$

---

* 译者注：一种小毒蛇.

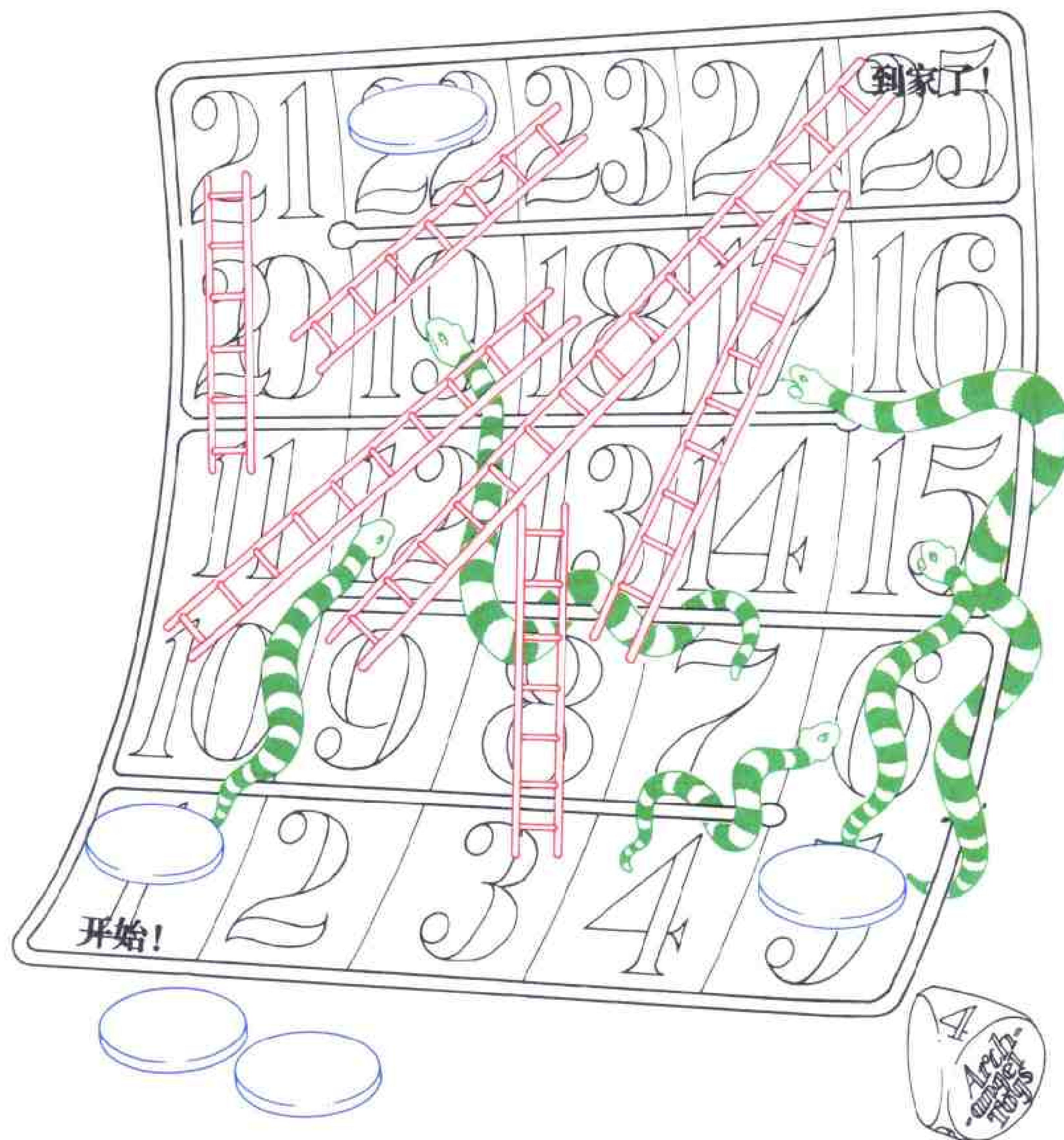



图 7. "蝰蛇与梯子"的廉价游戏(轮到吉米走).

但我们暂时还不知道这两个方格的值.

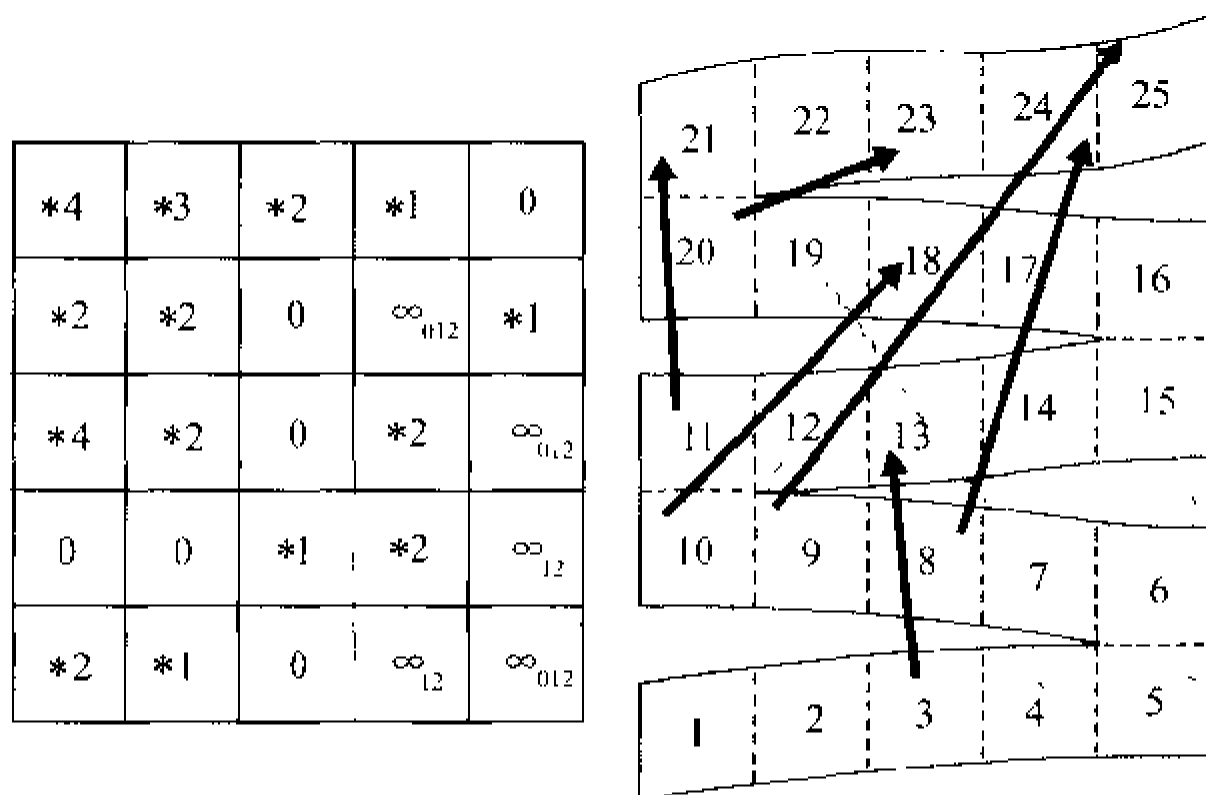
不过吉米发现$\boxed{10}=\boxed{18}$是一个 $\mathscr{P}$—局势:

$$\boxed{10}=\boxed{18}=0,$$

因为,不管基妮在[18]以后采取什么走法,吉米都能一步到"家":

| 基妮的走法 | | 吉米的应答 | |
|---|---|---|---|
| [18] → [19] = [7] | → | [9] · [25] | |
| [18] → [20] = [23] | → | [25] | |
| [18] → [21] | → | [25] | |
| [18] → [22] | → | [25] | |

图 8 给出了我们对蝰蛇与扶梯游戏所求出的值(另附一个经过简化的棋盘以供参考). 梯脚或蛇头所占的方格实际上不是一个真正的位置,因为一枚棋子是不能停留在该处的. 它们的值(图 8 中标以红色)只是把蝰蛇的另一头复制一下而得. 至于环圈值$\infty_{012}$及$\infty_{12}$,我们将在后面加以解释.



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *4 | *3 | *2 | *1 | 0 |
| *2 | *2 | 0 | $\infty_{012}$ | *1 |
| *4 | *2 | 0 | *2 | $\infty_{012}$ |
| 0 | 0 | *1 | *2 | $\infty_{12}$ |
| *2 | *1 | 0 | $\infty_{12}$ | $\infty_{012}$ |

图 8. 蝰蛇与扶梯游戏的值.

由于博弈中存在着环圈,有时我们在列举一个局势的一切选择时不得不计算它的博弈值. 譬如说,吉米能够证明

$$\boxed{18} = 0,$$

尽管在下面的选择中存在着问号?,

$$\boxed{19}=?,\qquad \boxed{20}=*2,\qquad \boxed{21}=*4,\qquad \boxed{22}=*3.$$

因为打着问号的选择是可以逆转到 0 的.

$$\boxed{19}=\boxed{7}\longrightarrow\boxed{9}=\boxed{25}=0.$$

一般地说：

> 如果我们对某一局势 $G$ 的若干选择已算出了值 $*a$, $*b$, $*c$,… 而 $m=\text{mex}(a,b,c,\cdots)$则我们能够断定 $G=*m$.
>
> 假定 $G$ 的所有其他选择都具有可逆动作，使之逆转到已知其值为 $*m$ 的局势的话.

**由史密斯法则计算答数**

当限制条件得到满足时，$G$ 在任一和式中都可以由 $*m$ 代替，理由很明显——它的动作与 $*m$ 的动作相互对应，而任何其他动作都不过是一种拖延时间的动作，是可以逆转为 $*m$ 的.

吉米与基妮对他们的游戏没有作出更进一步的分析，但在利用这一概念之后，我们却能办到. 例如，局势 $\boxed{16}$ 的各个选择如下：

$$\boxed{17}=?,\qquad \boxed{18}=0,\qquad \boxed{19}=?,\qquad \boxed{20}=*2$$

并且 $\text{mex}(0,2)=1$，由于 $\boxed{17}$ 与 $\boxed{19}$ 都有可逆动作到达 $*1$：

$$\boxed{17}=\boxed{5}\longrightarrow\boxed{8}=\boxed{24}=*1,$$
$$\boxed{19}=\boxed{7}\longrightarrow\boxed{8}$$

所以我们能算出

$$\boxed{16}=*1.$$

有时我们甚至可以在计算某一局势的各种选择之值以前就求出它的值. 例如，通过观察，所有的选择都是可以逆转的：

$$\boxed{13}\longrightarrow\boxed{14}\longrightarrow\boxed{18}=0$$
$$\boxed{13}\longrightarrow\boxed{15}=\boxed{5}\longrightarrow\boxed{9}=\boxed{25}=0.$$
$$\boxed{13}\longrightarrow\boxed{16}\longrightarrow\boxed{18}$$
$$\boxed{13}\longrightarrow\boxed{17}=\boxed{5}\longrightarrow\boxed{9}$$

从而证明了

$$\boxed{3}+\boxed{13}=0.$$

下面我们来解释一下图 8 中其他一些不成圈的博弈值：

$$\boxed{19}=\boxed{7}=*2 \qquad \boxed{14}=*2 \qquad \boxed{2}=*1 \qquad \boxed{12}=\boxed{1}=*2$$

这是因为

$$\boxed{8}=\boxed{24}=*1 \qquad \boxed{15}=\boxed{5} \qquad \boxed{3}=\boxed{13}=0 \qquad \boxed{2}=*1$$

$$\boxed{9}=\boxed{25}=0 \qquad \boxed{16}=*1 \qquad \boxed{4} \qquad \boxed{3}=\boxed{13}=0$$

$$\boxed{10}=\boxed{18}=0 \qquad \boxed{17}=\boxed{5}\rightarrow\boxed{7}=*2 \qquad \boxed{5}\rightarrow\boxed{8}=*1 \qquad \boxed{4},\ \boxed{5}\rightarrow\boxed{7}=*2$$

$$\boxed{11}=\boxed{21}=*4 \qquad \boxed{18}=0 \qquad \boxed{6}=\boxed{4}$$

以及

$$\text{mex}(0,1,4)=2 \qquad \text{mex}(0,1)=2 \qquad \text{mex}(0)=1 \qquad \text{mex}(0,1)=2$$

现在我们终于面临用这种方法搞不下去的位置了.一般来说，当你用史密斯规则尽量向前推进时，终于会到达一个阶段，此时将无法使用规则，而分析也变得进行不下去.此时，尚未求出标记值的一切局势都称为**有环圈**的，它们与尼姆堆是不等价的.

> 如果某一有圈局势 $G$ 的非环选择的值为 $*a,*b,*c,\cdots$，则认为 $G$ 的值是 $\infty_{abc\cdots}$.

**有圈局势的值**

作为特例，我们有，

$$\boxed{17}=\boxed{15}=\boxed{5}=\infty_{012}$$

$$\boxed{6}=\boxed{4}=\infty_{12}$$

这是可以从它们的选择中看出来的：

$$\boxed{17}=\boxed{15}=\boxed{5}\rightarrow\begin{cases}\boxed{6}=\boxed{4}\\ \boxed{7}=*2\\ \boxed{8}=*1\\ \boxed{9}=0\end{cases} \qquad \text{mex}(0,1,2)=3$$

$$\boxed{6}=\boxed{4}\rightarrow\begin{cases}\boxed{5}\\ \boxed{6}=\boxed{4}\\ \boxed{7}=*2\\ \boxed{8}=*1\end{cases} \qquad \text{mex}(1,2)=0$$

有关解释如下：

[5]的未标记选择[4]，没有办法走到已建值的 $*3$；

[4]的未标记选择[4]，没有办法走到已建值的 0.

（尽管[4]的另一个未标记选择[5]，可逆转到 0）.

存在着一些规则来处理这些有圈博弈同具有通常尼姆值博弈的相加. 常见的尼姆加法规则使我们得以将无圈分支用一个尼姆堆 $*n$ 来取代，譬如说.

不存在有圈分支时，$*n$ 为 $\begin{cases} \mathscr{P}，若\ n=0; \\ \mathscr{N}，若\ n\ 为非零数. \end{cases}$

只有一个有圈分支时，$\infty_{abc\cdots} + *n$ 为 $\begin{cases} \mathscr{N}，若\ n\ 为\ a,b,c,\cdots 中之一; \\ \mathscr{D}，其他情况. \end{cases}$

且总值为 $\infty_{ABC\cdots}$ 其中 $A=a\overset{*}{+}n, B=b\overset{*}{+}n,\cdots$

有多个有圈分支时，$\infty_{abc\cdots}+\infty_{\alpha\beta\gamma\cdots}+\cdots$ 恒为 $\mathscr{D}$，而其总值为 $\infty$.

**有圈值的相加**

从图 7 所示的蝰蛇与扶梯游戏中，吉米应当怎样行走才算正确呢？由图 8 可知，三只筹码的值是

$$[1]=*2,\quad [5]=\infty_{012},\quad [22]=*3,$$

所以此种局势实际上等价于

$$\infty_{012}+*1=\infty_{103}.$$

吉米的唯一取胜策略是从[5]走到[8]（也就是沿着扶梯上升到[24]）. 由于[8]$=*1$. 如果他不这样走，而是从[1]走到[3]=[13]=0，或者从[1]走到[4]$=\infty_{12}$，则博弈值将变为

$$\infty_{012}+*3=\infty_{321}\quad 或\quad \infty_{012}+\infty_{12}+*3=\infty,$$

从而基妮将满有把握地使游戏一直没完没了地进行下去（除非吉米走出其他拙劣步法）. 如果他从[1]走到[2]$=*1$，则值将为

$$\infty_{012}+*2(=\infty_{230}).$$

而基妮将可立即从[5]走到[7]$=*2$.

## 你能得到什么样子的环圈?

转圈性可以是潜在的,明显的,甚至是炫耀性的!

某些走法构成一个圆形链,在双方都按最优策略行动时,这种情形根本不会出现,甚至在你把它们加入别的(不打圈)游戏时亦是如此.这种转圈性其实是一种幻想或错觉,除非游戏的获胜者存心要你在整个旅途中走一走,否则你不会注意到它的存在.这类局势同不打圈游戏中的值 $*n$ 是同一类东西,它们只能称为**潜在的转圈性**.

其他的局势则在它们的博弈值中显示出转圈性:

例如像

$$\infty_{abc}$$

就具有**明显的转圈性**.但若下标中有一个是 0,则转圈性只能影响博弈和中的最佳策略.而在玩这种游戏本身时,它只能取有限多步动作.

如果没有一个下标是 0,此时的局势是一种**炫耀性的转圈**.此时的最好走法将是走到同类型的另一局势,从而,一个双方都走得很好的游戏势将永远维持下去.

在公平分配与大小结对游戏中,上述三种情况都能出现.表 1 表明,9 颗或少于 9 颗杏仁时,所有的转圈都是潜在性的,而在 11 颗或更多杏仁时,几乎所有的局势都具有炫耀性的转圈,并经常具有最厉害的转圈值 $\infty$.当杏仁数正好为 10 颗时,将拥有许多转圈子局势,但没有一个具有炫耀性.例如值为 $\infty_0$ 的局势 4321 是一个 $\mathcal{N}$—局势(可走到 421111),但是 $4321+*1$ 却是一个 $\mathcal{P}$— 局势.

## 科拉尔岛改善交通方案

图 9 是科拉尔岛的概貌,以前它曾是一个风光优美的,同美国处于地球上对蹠点的风景区,后来,岛上三位有钱的大地主,资助了一个名为科拉尔岛交通改善方案,修建了一些代价高昂的高速公路.岛上两个政治集团(左党与右党)如今正在竞选,民意测验预测,哪一家能够走出最后一步,使汽车开到垃圾堆,该党就能轻易取胜而执政.现在,要求每家都在图上所示的单行道上轮流行走.整个比赛中只有一辆汽车,双方轮流送钱给汽车司机,要他驾驶汽车,在高速公路上走一段路,开到下一个交会的路口.你在图上可以看到,一旦开进垃圾堆,就出不去了.试问,我们有什么好办法来传授给执政党(他们必须走出第一步)呢?

实际上这游戏本质上同"蝰蛇与扶梯"游戏是一样的,但它却是在更巧妙的附图上进行.图 10 给出其值,而对其中每一个不转圈的值,也指出了它的阶段数(开始时,我们将垃圾堆定为阶段 0).

图 10. 科拉尔岛交通改善方案的图形，值与阶段.

你只要在每一阶段至少标记一个结点，如此继续进行下去，直到史密斯法则已不再能应用为止. 这时你就能得出各个正确值. 但如果你常在最早的阶段标记每个结点(就像我们对科拉尔岛问题所做的那样)，你就会捞到外快：

> 你能用值 $*n$ 标记一个局势 $G$ 的最早阶段数实际上就是($G$+大小为 $n$ 的一个尼姆堆)的遥远度的一半.

**斯泰因豪斯的机敏捞进外快法则(C. A. B. S. 法则)**

# 分享其他坚果游戏

你可以利用这些概念来玩一些公平分配与大小结对游戏的和. 此时你可以摆弄若干堆榛树坚果、若干堆杏仁，若干堆巴西果，以后我们还要加上一堆糖果. 在任一堆东西中都不准有两种不同类的坚果，除此规定之外，游戏规则一如以前　你可以将一堆坚果分成相等的若干小堆，苦将同类坚果而个数不同的大、小两堆合成一堆. 表 1 给出了一种坚果多达 10 个的值，以及对每一局势所能指派的最早阶段. 或许你愿意像图 2 那样来自己重新算一算以作为操练.

| | |
|---|---|
| 1 | 0@0 |
| 11 | 0@0 |
| 2 | *1@1 |
| 111 | 0@0 |
| 3 | *1@1 |
| 21 | *2@2 |
| 1111 | 0@0 |
| 22 | 0@1 |
| 4 | *1@2 |
| 211 | *1@3 |
| 31 | *2@3 |
| 11111 | 0@0 |
| 32 | 0@ |
| 5 | *1@1 |
| 311 | *1@2 |
| 221 | *1@3 |
| 2111 | *2@3 |
| 41 | *2@4 |
| 111111 | 0@0 |
| 33 | 0@1 |
| 2211 | 0@2 |
| 42 | 0@3 |
| 222 | *1@3 |
| 51 | *1@4 |
| 6 | *2@4 |
| 3111 | *1@5 |
| 411 | *2@5 |
| 21111 | *2@6 |
| 321 | *3@7 |

| | |
|---|---|
| 1111111 | 0@0 |
| 52 | 0@1 |
| 7 | *1@1 |
| 43 | 0@2 |
| 511 | *1@2 |
| 3211 | 0@3 |
| 31111 | *1@3 |
| 2221 | 0@4 |
| 22111 | *1@4 |
| 211111 | *2@4 |
| 331 | *2@4 |
| 421 | *1@5 |
| 322 | *2@5 |
| 4111 | *2@5 |
| 61 | *3@5 |
| 11111111 | 0@0 |
| 53 | 0@1 |
| 3311 | 0@2 |
| 221111 | 0@3 |
| 2222 | 0@4 |
| 4211 | 0@4 |
| 44 | 0@4 |
| 8 | *1@5 |
| 422 | *1@6 |
| 71 | *2@6 |
| 22211 | *1@7 |
| 5111 | *1@8 |
| 611 | *3@8 |
| 311111 | *1@9 |
| 332 | *1@9 |
| 41111 | *2@9 |
| 2111111 | *2@10 |
| 3221 | *2@11 |
| 32111 | *3@11 |
| 521 | *3@11 |
| 62 | *4@11 |
| 431 | *3@12 |

| | |
|---|---|
| 111111111 | 0@0 |
| 72 | 0@1 |
| 54 | 0@2 |
| 5211 | 0@3 |
| 4311 | 0@4 |
| 321111 | 0@5 |
| 333 | 0@5 |
| 222111 | 0@6 |
| 9 | *1@6 |
| 4221 | 0@7 |
| 711 | *1@7 |
| 51111 | *1@8 |
| 3111111 | *1@9 |
| 441 | *1@9 |
| 2211111 | *1@10 |
| 42111 | *1@10 |
| 21111111 | *2@10 |
| 33111 | *2@10 |
| 3222 | *1@11 |
| 3321 | *1@11 |
| 32211 | *2@11 |
| 111111 | *2@11 |
| 522 | *2@11 |
| 6111 | *3@11 |
| 22221 | *2@12 |
| 63 | *2@12 |
| 432 | *3@13 |
| 81 | *3@13 |
| 531 | *4@14 |
| 621 | *4@14 |

| | |
|---|---|
| 1111111111 | 0@0 |
| 55 | 0@1 |
| 73 | 0@1 |
| 5311 | 0@2 |
| 331111 | 0@3 |
| 22111111 | 0@4 |
| 3322 | 0@5 |
| 421111 | 0@5 |
| 4411 | 0@5 |
| 222211 | 0@6 |
| 4222 | 0@7 |
| 82 | 0@7 |
| 22222 | *1@7 |
| 10 | *2@8 |
| 622 | $\infty_{01}$ |
| 64 | $\infty_{02}$ |
| 91 | $\infty_{02}$ |

十颗坚果中,另有25种分法此表中未予列出,它们中间每一个的值都等于$\infty_0$.

**表 1.** 公平分配与大小结对游戏的值与阶段.

## 公平分配与不相等的合伙人

在游戏的这一变种中，允许你将不同大小的三堆或更多堆坚果合并成一堆（图2中的虚线箭头表示这一种走法），但只改变了为数不多的值，详见本章增补材料.

## 糖果与坚果，兴许还有约会呢？

设想你最感兴趣的来宾心中还有另一种游戏，如果你能赢得下面的游戏变种，她（或他）将同你来上一个异性约会. 你可以用9颗杏仁来做公平分配与大小结对游戏，但允许另一种走法，即每位局中人都可以吃掉一定数量的糖果，如图1所示. 如果你从图上所示的局势出发，你将预期会有什么结果？

## 添加性的相减游戏

现在来回顾一下相减游戏 $S(a,b,c,\cdots)$，在非空的任意一堆中允许你取走 $a,b$，或 $c$ 颗豆子. 如果 $a,b,c,\cdots$ 中有一些负数，情况又将如何？由于我们现在是要在一堆豆子中添加豆子，这种游戏有可能永远持续下去，因此我们要用史密斯理论加以分析. 表2给出了一些典型的值.

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S(−1,2,5) | $0_{\omega 0}$ | $0_{\omega 1}$ | $2_{\omega 3}$ | $1_{\omega 2}$ | $0_{\omega 1}$ | $3_{\omega 5}$ | $2_{\omega 1}$ | $1_{\omega 5}$ | $0_{\omega 2}$ | $3_{\omega 6}$ | $2_{\omega}$[illegible] | $1_{\omega}$[illegible] | $0_{\omega 3}$ | $3_{\omega 7}$ | $2_{\omega}$[illegible] | $1_{\omega}$[illegible] |
| S(−2,4,5) | $0_{\omega 0}$ | $1_{\omega 2}$ | $0_{\omega 1}$ | $0_{\omega 1}$ | $1_{\omega 3}$ | $2_{\omega}$[illegible] | $3_{\omega}$[illegible] | $1_{\omega 1}$ | $2_{\omega 6}$ | $\infty_{12}$ | $\infty_{23}$ | $\infty_{13}$ | $\infty_{12}$ | $\infty_{2}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| S(−1,3,8) | $0_{\omega}$[illegible] | $1_{\omega 2}$ | $0_{\omega 1}$ | $1_{\omega 3}$ | $0_{\omega 2}$ | $1_{\omega 4}$ | $0_{\omega 3}$ | $1_{\omega 5}$ | $2_{\omega}$[illegible] | $3_{\omega 7}$ | $2_{\omega}$[illegible] | $0_{\omega}$[illegible] | $1_{\omega}$[illegible] | $0_{\omega 4}$ | $1_{\omega}$[illegible] | $0_{\omega}$[illegible] |
| S(−2,3,8) | $0_{\omega}$[illegible] | $0_{\omega 1}$ | $0_{\omega 2}$ | $2_{\omega 1}$ | $1_{\omega 2}$ | $1_{\omega 3}$ | $0_{\omega 1}$ | $0_{\omega 2}$ | $2_{\omega 1}$ | $2_{\omega}$[illegible] | $1_{\omega}$[illegible] | $1_{\omega}$[illegible] | $0_{\omega 2}$ | $0_{\omega 3}$ | $2_{\omega}$[illegible] | $2_{\omega}$[illegible] |
| S(−2,4,10) | $0_{\omega 0}$ | $\infty$ | $0_{\omega}$[illegible] | $\infty$ | $2_{\omega}$[illegible] | $\infty$ | $1_{\omega 2}$ | $\infty$ | $0_{\omega 1}$ | $\infty$ | $3_{\omega}$[illegible] | $\infty$ | $2_{\omega 4}$ | $\infty$ | $1_{\omega}$[illegible] | $\infty$ |

**表2.** 添加性相减游戏的值与阶段.

## 虻

一只虻的走法是国际象棋中骑士的8种步法中的6种（见图11），但除此之外还有别的限制，决不允许它把最后所走的一步逆转回去（即便有别的虻已经走过）. 下面的附图11中，哪一

方把第一只虻登上胜利标杆，他就是赢家. 对此局势，你愿意先走吗？

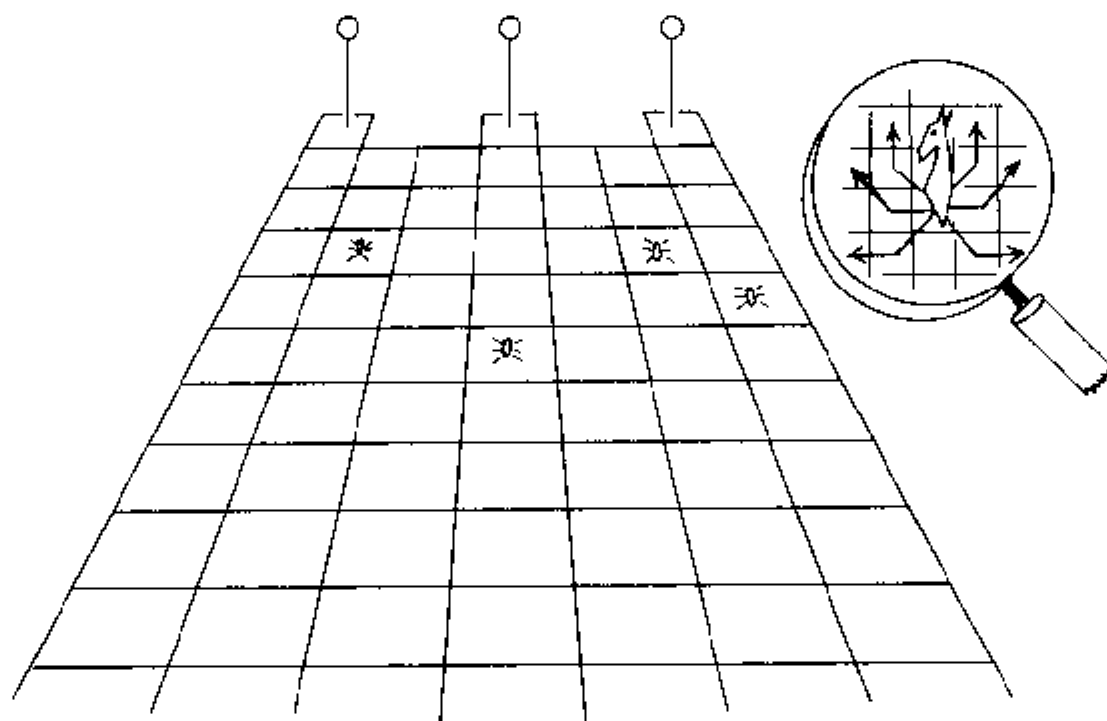


图 11. "虻"的游戏.

## 无偏博弈的可选与次可选复合物

在探讨有圈无偏博弈的同一篇论文中，C・A・B・史密斯讨论了无偏博弈情况下的可选复合物. 其答案很简单，在正常情况下，

$$G \vee H \vee \cdots$$

是一个 $\mathscr{P}$ 局势，仅当所有的 $G, H, \cdots$ 都是这样. 反常情况同正常情况是一致的，除了仅有一个分支博弈未曾结束之外.

史密斯另外也讨论了我们将称之为**次可选复合物**的情况，此时，合乎规则的走法是在任意选取的分支游戏中行动，但应排除全部集合. 对这种复合物来说，所有分支的尼姆值都相等时，此时的局势是一个 $\mathscr{P}$—局势.（如果它们并不完全相等，则应从中选出最小的一个，并化简其他尼姆值，使与之吻合.）

## 必需应对的行动

**顶上取钱**是一种花样翻新的游戏，对象是几堆钱币. 有两类动作可以采取，要末将一堆钱币分作较小的两堆，要末在某一堆钱币中取走顶上的一枚钱币. 在后一情况下，对手的下一步动作

必须在被取走一枚钱币的堆中进行. 所以你决不应该在台面上留下只有一枚钱币的一堆，因为如果你的对手把它取走以后，此堆已经空无所有，你怎么能应对啊！

含有此类必需应对的行动的博弈和理论只是在本书中才首次出现. 在这种博弈和

$$A+B+C+\cdots$$

中，你可以在任一分支中走一步，除非你的对手已在什么地方走出了一个必需应对的动作，这时你就必须在同一分支中对付他. 通常，最好的回答是另一个必需应对的动作，于是，我们在同一分支中就可能有着一些必需应对动作的集合.

此种游戏的理论还是可以归结为尼姆游戏，但以一种新的方式出现.

典型分支 $A$ 具有一系列尼姆值

$$a_0<a_1<a_2<a_3<\cdots,$$

其中仅有最小的一个尼姆值 $a_0$ **有关**，除非该分支正好被必需应对的行动呼唤到，这时，所有的尼姆值就都有关. 为了计算新值：

> $G$ 的尼姆值的完整集合包含以下一切数
>
> $$g_0<g_1<g_2<\cdots$$
>
> 仅有 $g_0$ 是有关的，除非走到 $G$ 的行动是必需应对的.

并求出最好的走法：

> $A+B+C+\cdots$ 中走一步如果存在着一个 $a_i$ 使有 $*a_i+*b_0+*c_0+\cdots=0$，则在分支 $A$ 中有一个必需应对的行动应是良策；而当 $*a_0+*b_0+*c_0+\cdots=0$，则一如通常情况，采用不需应对的行动应是上策.

为了说明这些规则确实起作用，如果目前的局势为

$$A+B+C+\cdots=G,$$

是一种无需应对的局势，而总的值为

$$*a_0+*b_0+*c_0+\cdots=*g_0,$$

则像通常的理论一样，它的各种选择的尼姆值应包括一切小于 $g_0$ 的数但不包括 $g_0$ 本身. 如果走到 $A$ 的行动是必需应对的，则在可能采取的行动之后，总的值应该不是具有以下形式

$$*a_i + *b_j + *c_k + \cdots$$

的拧数.

在以下表格中给出了顶上取钱游戏的博弈值：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ⊙ | 10 | * 1,4→ | 20 | * 2,5,8→ | 30 | * 2,7→ | 40 | * 1,4,8,9,12→ |
| 1 | ☽ | 11 | * 3. | 21 | * 0,1,7. | 31 | * 0,5. | 41 | * 6,7,11. |
| 2 | ⊙ | 12 | * 4→ | 22 | * 3,4,6,8→ | 32 | * 8→ | 42 | * 2,5,8,10,12→ |
| 3 | ☽ | 13 | * 0,2. | 23 | * 2,5. | 33 | * 1,6. | 43 | * 9. |
| 4 | * 1→ | 14 | * 3,5→ | 24 | * 7→ | 34 | * 5,9→ | 44 | * 3,6,7,8,11,13→ |
| 5 | * 0. | 15 | * 4. | 25 | * 3. | 35 | * 0,7,8. | 45 | * 0,2,4,10,12. |
| 6 | * 2→ | 16 | * 2,6→ | 26 | * 1,4,6,8→ | 36 | * 1,6,10→ | 46 | * 5,7,8,9,13→ |
| 7 | * 1. | 17 | * 5. | 27 | * 7. | 37 | * 4,5,9. | 47 | * 3,6,10,11. |
| 8 | * 3→ | 18 | * 1,3,4,7→ | 28 | * 3,5,8→ | 38 | * 7,8,11→ | 48 | * 4,8,12→ |
| 9 | * 0,2. | 19 | * 6. | 29 | * 4,6. | 39 | * 10. | 49 | * 2,7,9,10. |

## 光明与阴暗的局势

在我们的表格里，

$$*n\rightarrow$$

代表大于、等于 $*n$ 的一切拧数，而

$$*\bar{n}$$

则表示异于 $*n$ 的一切拧数.

所以

$$*5\rightarrow \text{意味着} *5, *6, *7, *8, *9, \cdots;$$

$$*\bar{5} \text{意味着} 0, *1, *2, *3, *4, *6, *7, *8, \cdots;$$

$$*0,1,7. \text{意味着} 0, *1, *7;$$

而
$$*3,4,6,8\rightarrow \text{意味着} *3, *4, *6, *8, *9, *10, \cdots.$$

但我们经常使用

⊙（光明，开朗，向阳）

而不是用 $*0\rightarrow$ 来表示全体拧数

$$0, *1, *2, *3, *4, \cdots$$

的集合，并使用

$$☽\quad（阴暗，愚蠢，发疯）$$

来表示空集，即一个指数都没有. 在实践中，它们意味着什么呢？

在我们定义顶上取钱游戏时已经警告你切勿留下只有一枚钱币的一堆，因为此时你的对手可将这枚钱取走而要求你在空堆中作出回应. 你的行动将是**阴暗的**，而他的行动自然是**光明的**. 一般而言：

> 一分支博弈中光明的一步是能够使走出此步者获胜的动作，而阴暗的一步是使得走出此步者失败的动作，而不问其他分支情况如何.

在顶上取钱游戏中，从两枚钱币的一堆出发时，两种可能走法都至少会留下只有一枚钱的一堆，所以要求你的对手必须从二枚钱的一堆中付诸行动的走法必然是光明的一步. 由此推论出，留下二枚钱币的一堆（不论它是否要求对手必需应答）的走法肯定是阴暗走法，因为你的对手将可用光明走法来回敬.

回忆起以前曾经说过的

$$⦿\ 意味着\ 0,*1,*2,*3,\cdots,$$

另外，只有最早出现的值同非强制性走法有关，所以用通常走法得出两枚钱的一堆时，其值应该是 0.

## 用强制应对值进行计算

图 12 说明我们怎样去求顶上取钱游戏的值. 格隆第尺度被用来计算 14 个钱币的一堆，即 $S_{14}$ 的值. 对于非强制性的走法

$$S_1+S_{13},S_2+S_{12},S_3+S_{11},S_4+S_{10},S_5+S_9,S_6+S_8,S_7+S_7$$

而言，只是最早的值才有关：

$$☽+0,\ 0+*4,\ ☽+*3,\ *1+*1,\ 0+0,\ *2+*3,\ *1+*1,$$

从而产生了

$$☽,\quad *4,\quad ☽,\quad 0,\quad 0,\quad *1,\quad 0,$$

而必需应对的选择 $S_{13}$ 有两个值：

$$0,\ *2.$$

$S_{14}$的值是剩下来的拧数

$$*3,\ *5,\ *6,\ *7,\ *8,\cdots$$

所以我们应在下面标尺的下一个位置上记下 3,5-➛,而在上面的标尺上记下了.

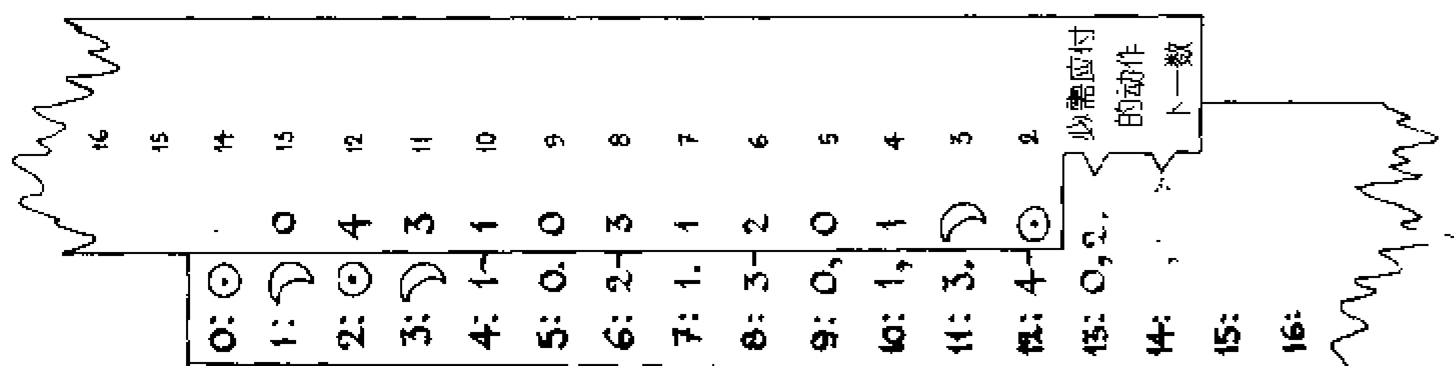



图 12. 用格隆第滑尺计算 $S_{14}$的值.

局势

$$S_2+S_6+S_{14}$$

的值为

$$0+*2+*3=*1,$$

故而应该有一步较好的走法,使 $S_{14}$化简到 $*2$. 我们的分析表明它必然是走到 $S_{13}$的、非应对不可的动作. 如果我们走了这一步,那就逼得我们的对手只能把 $S_{13}$代之以

$S_1+S_{12}$,　$S_2+S_{11}$,　$S_3+S_{10}$,　$S_4+S_9$,　$S_5+S_8$,　$S_6+S_7$,　$S_{12}$(必需应对的动作)

中的一个,而它们的值

☽,　$0+*3$,　☽,　$*1+0$,　$0+*3$,　$*2+*1$,　$*4, *5, *6,\cdots$

中不包括 $*2$,所以整个局势的值中将不含有 0.

当然,由于☽表示空集,我们有着显然的加法规则

☽ $+*n=$ ☽　$(n=0,1,2,\cdots)$,

☽ $+$ ☽ $=$ ☽

我们不知道顶上取钱游戏中是否有着多于 3 个钱币的阴暗堆. 前面一些 $\mathscr{P}$—局势的孤立堆是

$$S_0, S_2, S_5, S_9, S_{13}, S_{21}, S_{31}, S_{35}, S_{45}, S_{57}.$$

# 有着必需应对动作的尼姆游戏

在某些变相的尼姆游戏中，我们规定某些走法必需应对，这类游戏分析起来也很简单. 作为我们的第一个例子，我们可以规定，把某堆减少一粒豆子的行动是必需应对的. 即使走了这一步之后，将使只有一粒豆子的一堆变成空堆亦然. 此时由于对手无法行动，这一步轻而易举地赢了.

博弈值有着一种明显的模式：

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (⊙=) *0→ | ☊ | *1→ | ☊ | *2→ | ☊ | *3→ | ☊ | *4→ | … |

为了察看一下该模式的进行情况，请观察一下大小为 9 粒豆子的一堆是阴暗局势，因为此时将有非强制性的动作使它演变为 0,2,4,6 各堆，它们的值分别为 0，*1，*2，*3，另外还有一个必需应对的动作，使它演变为 8 粒豆子的一堆，其值为 *4→，这种分析考虑了每一种可能性. 大小为 10 的一堆，其值应为 *5→，因为唯一的、不阴暗的动作是非强制应对的，使原来的一堆演变成大小是 0,2,4,6,8 的各堆，而其值为 0，*1，*2，*3，*4.

倘若把大小为 1 的一堆拿空的动作不具有强制应对性，则留下大小为 1 的一堆就不算阴暗了，此时模式将会产生平移现象，而粒数是偶数的各堆将成为阴暗局势：

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *0→ | *1→ | ☊ | *2→ | ☊ | *3→ | ☊ | *4→ | ☊ | *5→ | ☊ | *6→ | ☊ | … |

我们也可以来玩另一种尼姆游戏 $N(a,b,c,\cdots)$，其中在一堆豆子中取走 $a$ 粒，$b$ 粒或 $c$ 粒……的走法将被视为必须作出应对的动作(即使下一个局中人在取走粒子后的各堆中根本无法行走时亦然). 此种游戏的理论很容易从相应的相减游戏 $S(a,b,c,\cdots)$ 中导出(见第 4 章).

下面是 $S(2,5,7)$ 与 $N(2,5,7)$ 的一些值的序列：

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(2,5,7)$ | $\dot{0}$. | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | $\dot{2}$ |
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| $N(2,5,7)$ | *0→ | *1→ | ☊ | ☊ | *2→ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | *3→ | ☊ | ☊ | *4→ | *5→ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | … |
| $N(2,5,7)$ | *6→ | *7→ | ☊ | ☊ | *8→ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | *9→ | ☊ | ☊ | *10→ | *11→ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | ☊ | … |

你们将会看到：$S(2,5,7)$ 中的每一个非零值将会在 $N(2,5,7)$ 中变成阴暗局势，而余下来的 $N(2,5,7)$ 值则为井然有序的

*0→ *1→　*2→　*3→　*4→　…

对此种游戏的一个 $H$ 堆来说，如果较它为小各堆的非阴暗值为

*0→，*1→，*2→，…，*($n$−1)→，

则

*0，*1，*2，…，*($n$−1)

肯定会在 $H$ 的一些选择中出现，如果相应的行动都不是非应对不可的，则 $H$ 的值是 *$n$→，但若这些行动中的任一个是必须应对的，则所有的拧数会出现在各种选择的值中，从而 $H$ 将是阴暗的.

例如，在 $N(2,5,7)$ 中，大小为 27 的一堆的非阴暗选择的值是

*0，*1，*2，*3，*4，*5，*6→，*7，*8

（由于走到大小为 22 的一堆的走法是必须应对的行动），所以这一堆是阴暗的.

一般来说，

> 在具有若干必须应对走法的尼姆游戏中，博弈值将是按照顺序的 *0→，*1→，*2→，*3→，…其中散布着一块块阴暗局势.

如果我们修改 $N(2,5,7)$ 游戏，把走到 0 一堆的行动解除其强制应对性，则将得出

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⊙ | *1→ | *2→ | ☽ | ☽ | *3→ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | *4→ | ☽ | … |

如果也解除走到 1 一堆的行动的强制应对性，则有：

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⊙ | *1→ | *2→ | *3→ | ☽ | ☽ | *4→ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | *5→ | … |

在开始几项以后，可以用这些模式来取代 $N(2,5,7)$（将拧数加 1 或加 2）.

## 哥德巴赫尼姆

不论用什么异乎寻常的外加条件来规定必须应对的行动，上述论证总是能够对付过去. 哥德巴赫把取走豆子数与剩下豆子数都是素数的行动视为必须应对的. 如果我们不把 1 看作素数，则在 $n$ 为以下各种数值时，前面的一些非阴暗值为：

| 0 | 1 | 2 | 3 | 11 | 12 | 17 | 23 | 27 | 29 | 35 | 37 | 38 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⊙ | *1→ | *2→ | *3→ | *4→ | *5→ | *6→ | *7→ | *8→ | *9→ | *10→ | *11→ | *12→ | … |

但是哥德巴赫却把 1 看成了素数，对于他的这种游戏方式，我们发现仅有的一些非阴暗值为：

| 0 | 1 | 3 | 9 | 11 | 15 | 17 | 21 | 23 | 27 | 29 | 33 | 35 | 37 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⊙ | *1→ | *2→ | *3→ | *4→ | *5→ | *6→ | *7→ | *8→ | *9→ | *10→ | *11→ | *12→ | *13→ | … |

对于这种游戏，我们能够证明仅当 $n-2$ 为素数而 $n-4$ 不是素数时，一个 $n>7$ 的奇数 $n$ 是阴暗的. 我们可以肯定，哥德巴赫相信一切偶数是阴暗的：[×] 一个偶数 $n$ 不是阴暗的，仅当表达式

$$n=p+q$$

是 2 个素数之和而 $p$ 与 $q$ 的每一个或者是 3，或者是素数对中更大的成员. 122 这个数差点没有说中，你能不能发现它的唯一的，必须作出应对的走法，以便到达一个非阴暗局势呢？

## 惠德皇后及其一列随从

如果你们已经想不起惠德皇后游戏了，那就请参看第 3 章第 61 页的图 5. 皇后棋子可以横走或直走，也可以斜走，一直向棋盘的角落里走过去. 现在让我们来看一看，如果某些走法必须作出应答，情况将有什么改变. 如果横走或直走必须应对，则博弈值将如表 3 所示. 图中，零出现在与普通游戏同样的位置上，而每个零会带来长长的一列对角线随从 0,1,2,3…；除此之外，其余的值全是阴暗的.

倘若来个改变，把对角线行动视为必须应对的行动时，我们将得出一种更有趣的游戏，甩掉

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0→ | | | | | | | | | | | |
| 1 | | 1→ | 0. | | | | | | | | | |
| 2 | | 0. | 2→ | 1. | | | | | ☽ | | | |
| 3 | | | 1. | 3→ | 2. | 0. | | | | | | |
| 4 | | | | 2. | 4→ | 3. | 1. | 0. | | | | |
| 5 | | | | 0. | 3. | 5→ | 4. | 2. | 1. | | | |
| 6 | | ☽ | | | 1. | 4. | 6→ | 5. | 3. | 2. | 0. | |
| 7 | | | | | 0. | 2. | 5. | 7→ | 6. | 4. | 3. | 1. |

**表 3.** 横走、直走视为必须应对的行动，随从呈对角线分布.

× 译者注：此处作者行文比较随便，下文又立即作了更正.

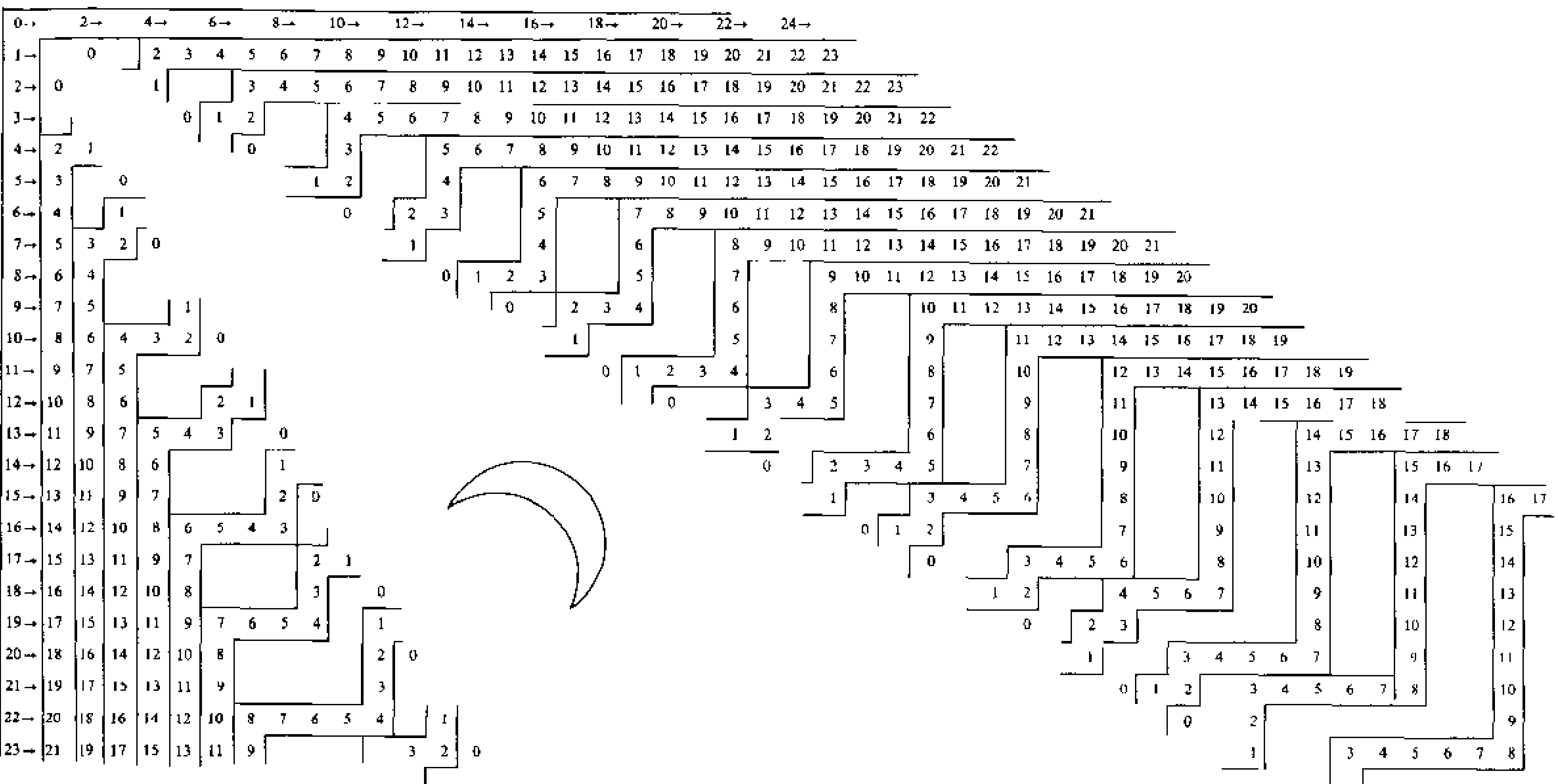


**表 4.** 斜走视为必须应对的动作；随从呈纵、横分布.

**惠德皇后的随从**,表 4 中给出了它的值. 这时,除了零以外的非阴暗值在纵、横两个方向构作起了"走廊". 零值显示在一个对角线位置上,作为走廊的开始值.

在此游戏中,究竟何者作为必须对付的行动,你还可以作出种种改变而并不影响表中的值,只要你能做到:

沿着边界的横,直走法不视为必须应对的动作;

边界的斜角走法要视为必须应对的动作.

除此两者以外,其他动作是否要视为必须应对的动作则属于无所谓,值将保持不变.

| 尼姆值 | $k$: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 差数 $d$: | 0 | (0,0) | | | | | | | |
| | 1 | (1,2) | (0,1) | | | | | | |
| | 2 | (3,5) | (2,4) | (0,2) | | | | | |
| | 3 | (4,7) | (3,6) | (1,4) | (0,3) | | | | |
| | 4 | (6,10) | (5,9) | (3,7) | (1,5) | (0,4) | | | |
| | 5 | (8,13) | (7,12) | (5,10) | (2,7) | (1,6) | (0,5) | | |
| | 6 | (9,15) | (8,14) | (6,12) | (4,10) | (2,8) | (1,7) | (0,6) | |
| | 7 | (11,18) | (10,17) | (8,15) | (6,13) | (3,10) | (2,9) | (1,8) | (0,7) |
| | 8 | (12,20) | (11,19) | (9,17) | (8,16) | (5,13) | (3,11) | (2,10) | (1,9) |

**表 5.** 附表 4 中值的坐标.

我们在第 3 章增补材料中给出的,求惠德霍夫游戏 $\mathcal{P}$—局势的差数规则可以作出推广,以便求出甩掉随从游戏的一切非阴暗值. 如表 5 所示,每一个要求的 $k$ 是无限多个局势$(x,y)$的尼姆值,而每个差数均有 $d \geqslant k$ 的关系. 表中差数为 $d$ 的各对可看作$(x,x+d)$,其中 $x$ 是不出现于该列的较大对子的最小数. 如果你能用寥寥数行证明在此游戏中我们所作的论断,那就请你写信告诉我们——我们的证明显得太长了一些.

# 在 PRIM(互质取子)与 DIM(除数取子)游戏中添上尾巴*

我们在第 4 章中曾讲过 Prim 与 Dim 游戏. 在 Prim 游戏中,你可以从 $n$ 颗豆子的一堆中取走 $m$ 颗豆子,如果 $m$ 与 $n$ 没有大于 1 的公因子(即"$m$ 与 $n$ 互质")的话. 我们现在将追加一个条件,若一位局中人从某堆中取走一颗豆子,他的对手就必须在同一堆中采取行动. 换句话说,减

* 译者注:"尾巴"一词由"Entailing"演变而来,其意即指必须应对的动作.

少一颗豆子是一项必须应对的动作.

存在着好几种情况.第一种情况是,从 1 减少为 0 的动作是合法动作.如果这种动作也视为必须应对.于是即可得出以下的,非常肤浅的尼姆值:

| $n=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⊙ | ☽ | ⊙ | ☽ | ⊙ | ☽ | ⊙ | ☽ | ⊙ | ☽ | ⊙ | … |

如果从 1 减少为 0 的动作算是合法的,但并不要求必须应对它,这时将有:

| $n=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0 | *1→ | *0 | *2→ | *0 | *3→ | *0,2 | *4→ | *0 | *2,5→ | *0,3 | *5→ | *0,2 | *6→ | *0,4 |

| $n=$ | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *2,3,7→ | *0 | *7→ | *0,2 | *8→ | *0,3 | *2,4,9→ | *0,5 | *9→ | *0,2 | *3,10→ | … |

若 1 减少为 0 的动作是非法的,而 2 减少为 1 的动作必须应对.则有:

| $n=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | - | ⊙ | ☽ | *1→ | ☽ | *2→ | *1 | *3→ | ☽ | *1,4→ | *2 | *4→ | *1 | *5→ | *3 | *1,2,6→ | ☽ | *6→ |

| $n=$ | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1 | *7→ | *2 | *1,8→ | *4 | *8→ | *1 | *2,9→ | *5 | *1,9→ | *3 | *9→ | *1,2 | *10→ | ☽ | *1,4,11→ | … |

在 Dim 游戏中,合法动作是从任一堆中取出该堆豆子数的除数.现在我们要追加一个条件,即减少 1 视为必须应对的动作,这时的值为:

| $n=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⊙ | ☽ | *1→ | ☽ | *2→ | *1 | *3→ | *1,2 | *4→ | *1,2 | *3,5→ | *1,2,4 | *5→ | *1,2,3,4 | *6→ |

| $n=$ | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1,2,4 | *3,7→ | *1,2,4,5,6 | *7→ | *1,2,3,4,5,6 | *8→ | *1,2,3,4,5 | *6,7,9→ | *1,2,3,4,5,8 | *9→ |

| $n=$ | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1,2,3,4,5,6,7 | *8,10→ | *1,2,3,4,5,6 | *7,10→ | *1,2,3,4,5,6,8,9 | *10→ | *1,2,3,4,5,6,7,8,9 | *11→ | … |

若将从 $n$ 减少为 0 的动作视为非法,而从 2 减少为 1 的动作不认为必须应对,这时应将 *0 加入上面表格中所有奇数堆的值中去.

## 有奖励的动作

某些游戏中具有特殊的**有奖动作**,在这种行动之后,同一位局中人还有一步**奉送行动**.在造房

子游戏(见第 16 章*)中每造好一间房子后就可多走一步.在许多儿童游戏中每当掷出一只"双六"时也是如此.(奉送动作当然应该奖给掷出"双六"者)、有奖动作是相当自由随便的,甚至有可能是另一个有奖动作. 一个局中人在一旁无聊地捻弄手指,而另一局中人却在接二连三地行动. 我们可以把这些无计可施的玩弄指头者是在做一种"派司"动作,其任务只是完成双方交替易手而已.

让我们来看一个实例. **"全平方数"**游戏是将一堆豆子分为较小的两堆,当分出来的较小两堆的豆子数都是完全平方数时可以奉送一步. 凡是奖给你走时就必须当仁不让地非走不可,——若不能做到这一点,就算你输——好比反手抽球,似赞美又似讽刺! 下面是全平方游戏的一些博弈值:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| | $\boxed{0}$ | 0 | *1 | $\boxed{*2}$ | *2 | *1 | 0 | ☊ | $\boxed{*1}$ | ☊ | 0 | *1 | *3 | *2 | *1 | $\boxed{0}$ | 0 |
| $n=$ | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
| | ☊ | *4 | *2 | *1 | *3 | *2 | *1 | $\boxed{☊}$ | ☊ | *3 | *4 | ☊ | *1 | 0 | ☊ | *4 | ☊ |
| $n=$ | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 |
| | *5 | $\boxed{*3}$ | *3 | *2 | *1 | ☊ | ☊ | *3 | *4 | *1 | ☊ | *3 | *2 | *1 | $\boxed{*6}$ | ☊ | *3 |
| $n=$ | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 |
| | ☊ | *4 | *6 | *3 | *2 | *4 | ☊ | *2 | *3 | ☊ | *2 | *8 | $\boxed{*6}$ | ☊ | *4 | *1 | ☊ |
| $n=$ | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | … | | | |
| | *3 | *5 | *4 | ☊ | ☊ | ☊ | 0 | *1 | *7 | *3 | *5 | ☊ | $\boxed{*4}$ | … | | | |

为了帮助你认出有奖动作,我们在对应于完全平方数的值旁打上了方框. 我们是利用以下原则来求值的:

> 走到值 $*n$ 的局势的有奖动作实际上是走到 $*\bar{n}$ — $*0$, $*1$, … $*(n-1)$, $*(n+1)$→,即异于 $*n$ 的每一个拧数.

**有奖动作的互补效应**

因为在走出这样一步之后,对方的动作只能是撚弄他的大拇指,而留下值为 $*n$ 的局势. 我们的规则表明现在留给他的是一切 $*\bar{n}$值.

在图 13 中我们画出了用于全平方数游戏的格隆第滑尺,那是用来对付大小为 13 的一堆的,在尺子下面我们已经写下了各种选择的值. 由于走到 9+4 的动作可以奉送一步,就此一步

* 译者注:原文是"点与盒"游戏. 在我国又称为"造房子"游戏,详见译者所著的《中国民间杂棋》一书,中国少年儿童出版社 1992 年出版.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⊙ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | ⊙ |
| ⊙ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | ☽ | ⊙ |
| $*\bar{0}$ | ☽ | ☽ | $*0$ | $*0$ | ☽ | ☽ | $*\bar{0}$ |
| $*0$ | ☽ | ☽ | $*0$ | $*0$ | ☽ | ☽ | $*\bar{0}$ |
| $*0$ | ☽ | ☽ | $*1$ | $*1$ | ☽ | ☽ | $*\bar{0}$ |
| $*0$ | $*0$ | ☽ | $*1$ | $*1$ | ☽ | $*0$ | $*\bar{0}$ |
| $*\bar{0}$ | $*0$ | $*0$ | $*2$ | $*2$ | $*0$ | $*0$ | $*\bar{0}$ |
| $*\bar{1}$ | $*0$ | ☽ | $*2$ | $*2$ | ☽ | $*0$ | $*\bar{1}$ |
| $*\bar{1}$ | ☽ | $*1$ | $*1$ | $*1$ | $*1$ | ☽ | $*\bar{1}$ |
| $*\bar{2}$ | ☽ | ☽ | $*0$ | $*0$ | ☽ | ☽ | $*\bar{2}$ |
| $*\bar{0}$ | ☽ | $*2$ | $*0$ | $*0$ | $*2$ | ☽ | $*\bar{0}$ |
| $*\bar{0}$ | $*2$ | ☽ | $*1$ | $*1$ | ☽ | $*2$ | $*\bar{0}$ |
| $*\bar{0}$ | $*0$ | ☽ | $*1$ | $*1$ | ☽ | $*0$ | $*\bar{0}$ |
| $*0$ | $*0$ | $*0$ | $*2$ | $*2$ | $*0$ | $*0$ | $*\bar{0}$ |
| $*\bar{1}$ | $*0$ | ☽ | $*2$ | $*2$ | ☽ | $*0$ | $*1$ |
| $*\bar{1}$ | ☽ | $*1$ | $*1$ | $*1$ | $*1$ | ☽ | $*\bar{1}$ |
| $*\bar{2}$ | ☽ | ☽ | $*0$ | $*0$ | ☽ | ☽ | $*\bar{2}$ |
| $*\bar{0}$ | ☽ | $*2$ | $*0$ | $*0$ | $*2$ | ☽ | $*\bar{0}$ |
| $*\bar{0}$ | $*2$ | ☽ | $*1$ | $*1$ | ☽ | $*2$ | $*0$ |

**表 6.** 围栏赛马游戏的值.

进入此格的走法的即时值，如果在相应的叁送一步结束后马还留在围栏边，则可除去上面的一条小横杠以求出其值.*

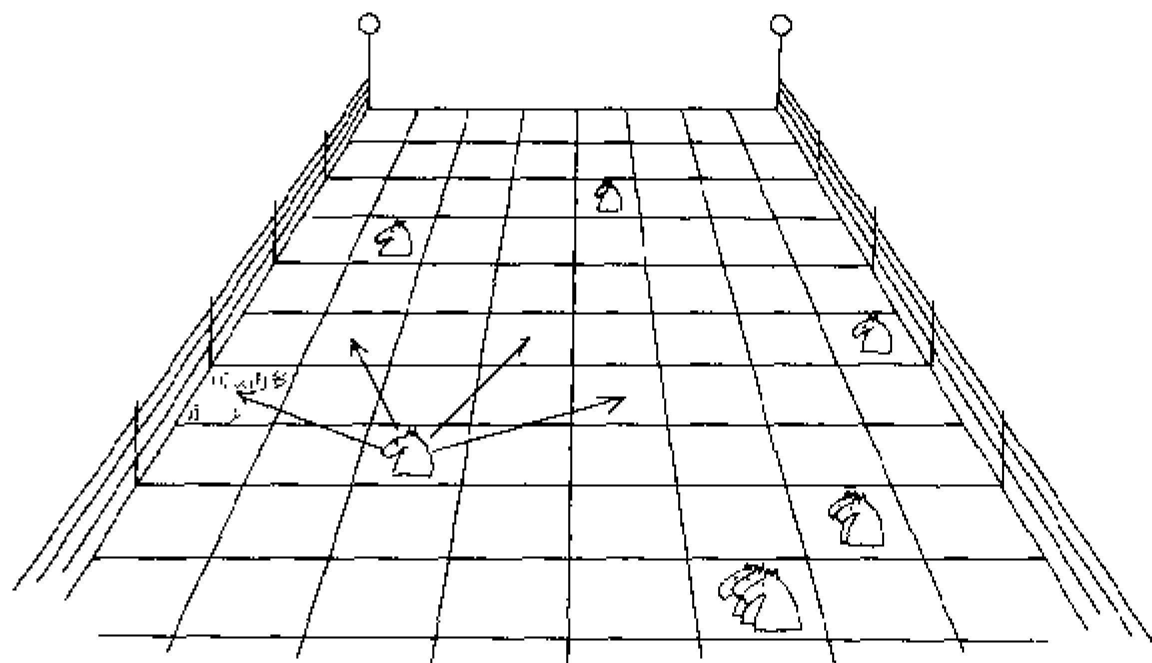


**图 14.** 围栏赛马游戏中马的走法.

---

* 译者注：指 $*\bar{2}$ 变成 $*2$ 之类.

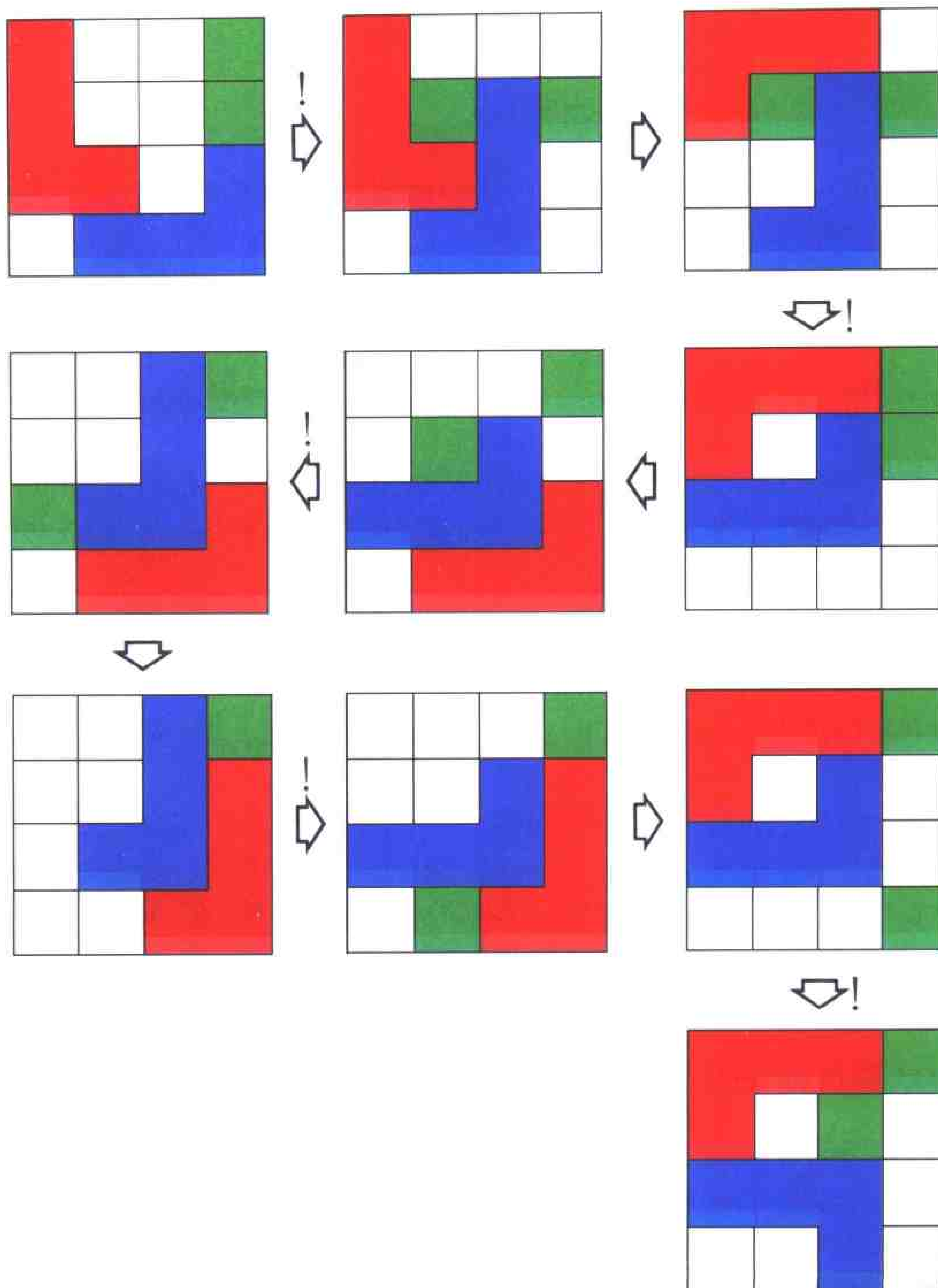



图 16. 一局最长、最明智的 *L* 块游戏对弈记录.

(i) $\infty_{abc\cdots}=*n$，但 $n$ 不是 $a,b,c,\cdots$ 中之一；

(ii) $\infty_{abc\cdots}=\infty_{\alpha\beta\gamma\cdots}=\cdots$.

由于我们还不知道它们究竟是开是闭，所以暂时把它们称为**半开的**. 我们只需证明这样一种局势具有一个选择而后者仍是半开的就行了.

对(i)，设 $m=\text{mex}(a,b,c,\cdots)$，并注意到 $n\geqslant m$，因为 $n$ 不是 $a,b,c,\cdots$ 中的一个. 若 $n>m$，则局势

$$\infty_{abc\cdots}+*m \text{ 是半开的.}$$

若 $n=m$，则值为 $\infty_{abc\cdots}$ 的局势将有一个成圈的选择 $\infty_{\alpha\beta\gamma\cdots}$，而它不能逆转为 $*n$，所以

$$\infty_{\alpha\beta\gamma\cdots}+*n \text{ 是半开的.}$$

我们可使类型(ii)的局势保持为半开状态，只要把它走到一个有圈分支的有圈选择即可.

故而若一局势为半开的，则任何一位局中人都能使它保持半开状态. 一扇永远半开着的门当然也可以叫做**敞开**的门.

## 公平分配与水平参差不齐的合伙者

如果在公平分配与大小结对游戏中，还可以准许你将三堆或更多堆硬壳果合为一堆，此时应将表 1 作出下列改动：

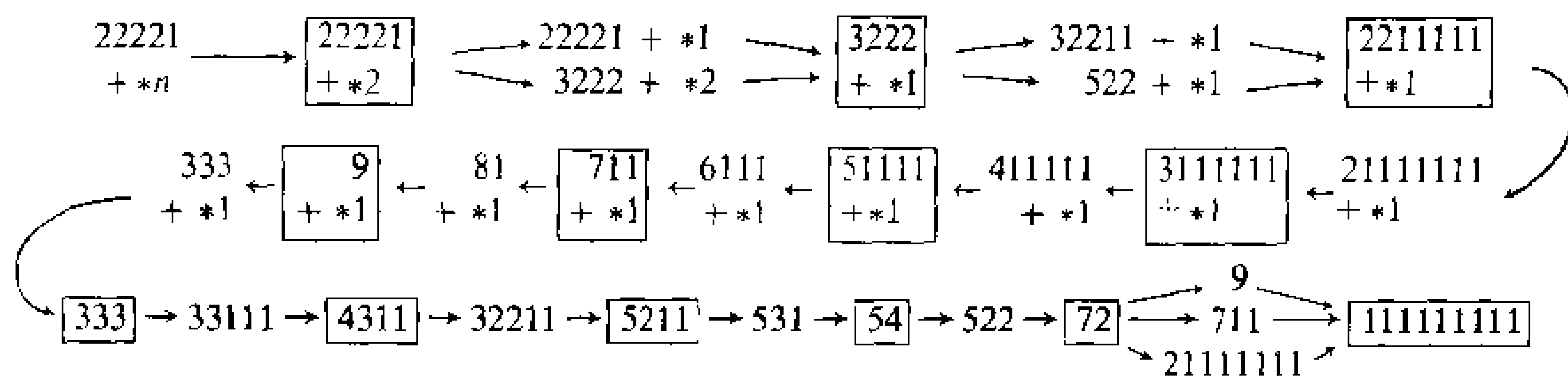
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 421 | 32111 | 3321 | 42111 | 4221 | 441 | 4321 | 532 | 541 | 631 | 721 |
| $*4_{@6}$ | $*4_{@11}$ | $*1_{@10}$ | $*4_{@12}$ | $*5_{@15}$ | $*1_{@11}$ | $\infty_{02}$ | $\infty_{02}$ | $\infty_{02}$ | $\infty_{02}$ | $\infty_{02}$. |

图 4 也将有两处改变：4221 与 4321 的遥远度将减少到 3，因为现在有了走到 72 与 73 的良好走法. 在公平分配与大小结对游戏中，4221 的遥远度是 14，从而将把一个 $\mathcal{P}$ 局势转变为 $\mathcal{N}$—局势.

## 你的办法赢得称心吗？

当然，你是能够欣然取得与异性约会日期的，这是因为表 1 中已将杏仁果局势 22221 标记为 $*2_{@12}$. 但是在你预期中的好日子很有可能遭到毁约或食言，因为在你第一步走出吞掉一切而剩下两块太妃糖时，整个游戏将可以拖沓至 25 步之多：

(这可是你尽快获胜的唯一办法). 倘若你不想过度炫耀你的“稳操胜券”，那么有的是时间！尽管慢慢来吧.




## 在游戏“虻”中，先走者是否有利？

你应当选择后走，尽量不要先走．因为不管那些“虻”如何行走，图 11 是一个 ☽ 局势．在图 17 中，方格中的值打印在格子中间．但如果你在其他地方用马步走到第二列或第五列，则应使用角上的值(最接近于来处者)．

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⊙ | | | ⊙ | | | ⊙ |
| 0 | ☽ | ☽ | 0 | ☽ | ☽ | 0 |
| 0 | ☽ | ☽ | 0 | ☽ | ☽ | 0 |
| 0 | *1 | *2 (*1) | 0 | *2 (*1) | *1 | 0 |
| 0 | *1 | (*1) ∞01 (*2) | 0 | (*1) ∞01 (*2) | *1 | 0 |
| 0 | *1 | (∞01) ∞012 (*3) | 0 | (∞01) ∞012 (*3) | *1 | 0 |
| 0 | *1 | (∞01) ∞013 (*2) | 0 | (∞01) ∞013 (*2) | *1 | 0 |

图 17．“虻”游戏的值．

我们将使用下列记号：

⊙表示三个获胜位置，

↺表示一步可走到⊙的格子，

然后按照后文的分析，依照下列顺序

$0, *1, *2, *3, \infty_{01}, \infty_{012}, \infty_{013}$,

逐行填满各个方格. 最后的两行是无限重复的. *

## 参考文献及进一步阅读材料

Edward de Bono, "The Five-day Course in Thinking—Introducing the L-game", Pelican, London 1969.

Edward de Bono, "The Use of Lateral Thinking", Pelican, London 1967; Basic Books, N. Y., 1968.

A. S. Fraenkel and U. Tassa, Strategy for a class of games with dynamic ties, Comput. Math. Appl. **1** (1975) 237—254; MR **54** #2220.

V. W. Gijlswijk, G. A. P. Kindervater, G. J. van Tubergen and J. J. O. O. Wiegerinck, Computer analysis of E. de Bono's L-game Report #76—18, Dept. of Maths., Univ. of Amsterdam, Nov. 1976.

Cedric A. B. Smith, Graphs and composite games, J. Combin. Theory, **1** (1966) 51—81; MR **33** #2572.

---

* 译者注：原文如此说，但最后两行本身有差异，$\infty_{012}$与$\infty_{013}$及其角上的值并不完全重复.

# 第13章

# 在迷失的世界中幸存下来

“这游戏不会输，直到走赢为止”，他说.

——乔治·克莱勃(George Crabbe)，《大厅的故事》，
第15章“格兰娜·格林”，334页

你们美国人的高明之处在于：你们从来不做彰明昭著的拙劣举动，即使拙劣，也要搞得很复杂，使我们引起怀疑，会不会遗漏掉了什么因素.

——加米尔·阿勃杜勒·纳赛尔*

宁可战败，不要不战而降.

——亚瑟·休·克劳(Arthur Hugh Clough)，《足部抽筋》

我们已经花费大量时间，教你怎样取得最后行动者能够获得的胜利. 但不妨设想你是一位看护婴孩的小杰米，他或她至少有时会想，最后能动者要算**输**. 这意味着，通常的游戏规则(规定谁不能走的是输家)要加以修改，转变为**反常的游戏规则**，谁不能走，他反

* 译者注：曾任埃及总统，现已去世.

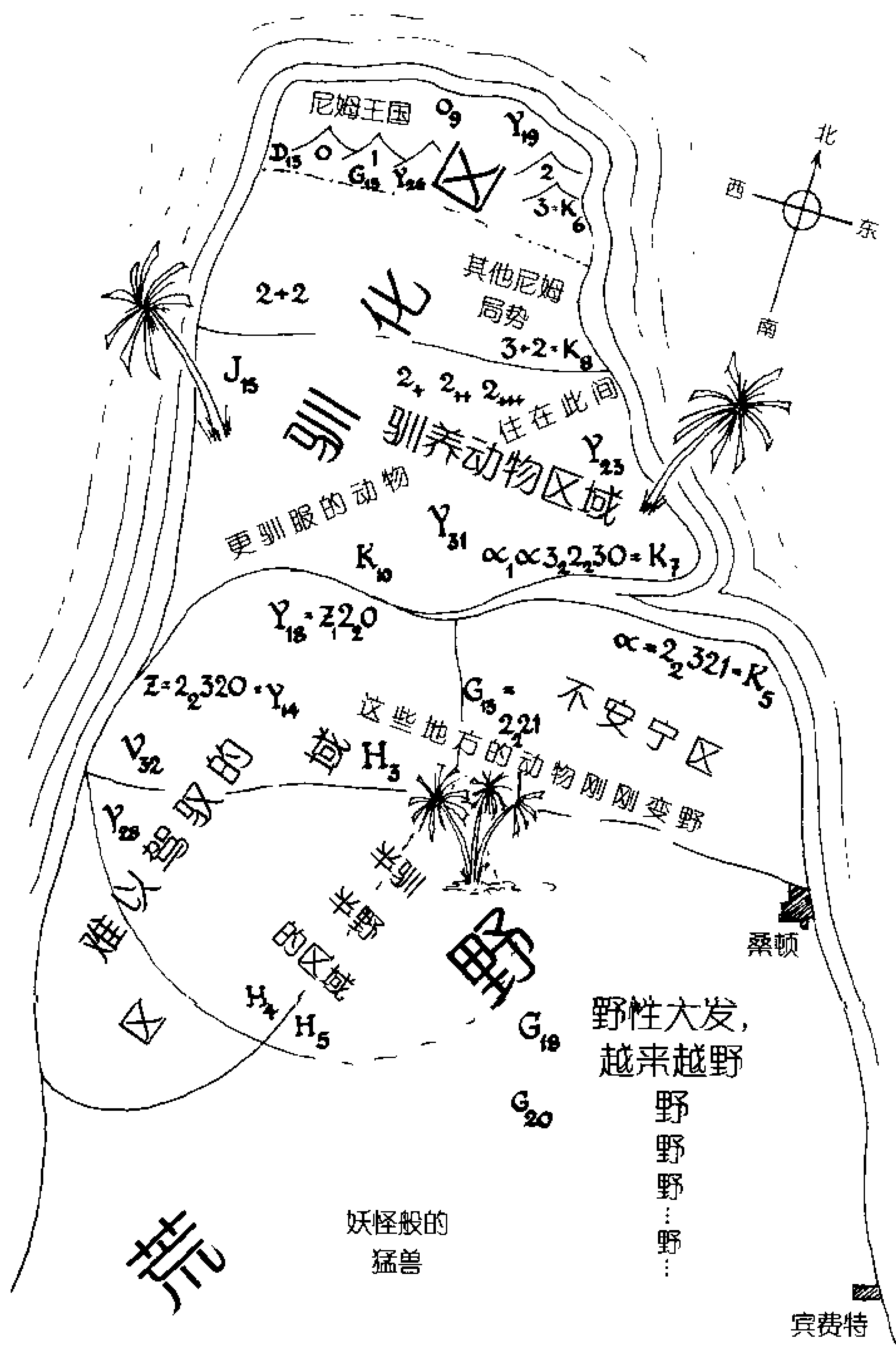



图 1. 迷失世界中的若干保留游戏.

而是**赢家**. 这样一改变,会不会造成重大差别呢? 情况并非**永远如此**……

## 反常尼姆游戏

在反常尼姆游戏中,你有着若干堆豆子,每步行动必须减少任一堆的豆子数,但谁拿光最后一堆者现在要作为**输家**. 当然它只能影响到一些**极其肤浅**局势的玩法,其时所有的非空堆都是**“单个”**或**“独苗”**(每堆只有一颗豆子),而游戏将变得乏味之至. 你将同杰米轮流地取走这些独苗,按照正常游戏规则,每次都留下偶数个“独苗”堆给他,你就能稳稳取胜. 但是,在反常游戏规则下,留给杰米的将是奇数个独苗堆,所有其他局势(豆子数≥2 的各堆)都是**坚实的**,它们在正常与反常游戏规则中,表现得完全一样.

第一个把最后一堆大小为 2(或 2 以上)减少为“独苗”的人将是使游戏变为肤浅情况的始作俑者. 然后他将在正常或反常尼姆中获胜,只要决定应否把该堆简化为独苗或者干脆把它全部取光.

> 可以像正常尼姆一样地来玩反常尼姆,除非你的行动将留下偶数堆“独苗”而没有其他的堆. 总之,你应留下奇数堆独苗.*

## 可逆行动

在反常游戏规则下,我们仍然可以丢开可逆动作,只要在抛开一切动作时多加小心就行. 在反常游戏规则下说明可逆性的图 2 恰如第 3 章中的图 3,但任一局中人都可以利用一切分支. 博弈 G 有着简化博弈 H 所有的一切选择 A,B,C,另外还有外加的选择 D,E,它们中的每一个都可以通过合法动作走到 H. 这时我们就说:D,E 是 G 的**可逆行动**.

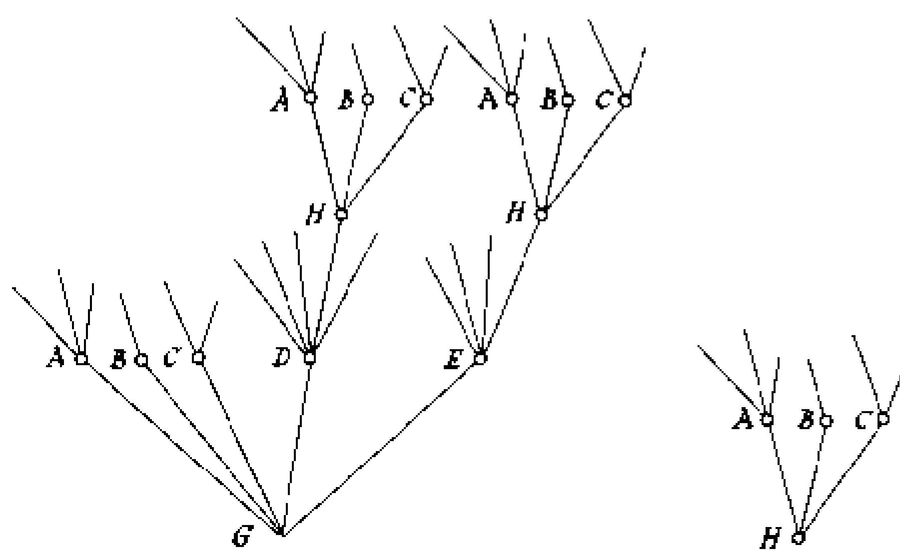


**图 2.** 反常游戏中的可逆行动.

我们可以断言,博弈和的结果决不会受到影

* 译者注:最后被拿走的“独苗”称为“大乌龟”. 在我国古代,麟、凤、龟、龙被视为祥瑞. 宋、元、明、清以后,龟却成为贬义词,唐朝则是一个过渡时期. 譬如说,仍有人以“龟”取名,著名的如李龟年.

响，如果我们用较 G 更为简单的 H 来取代 G，(当然得假定 H 至少要有一个选择)．

因为，不论谁在

H+X+Y+Z+…中有着取胜策略，那他就能用同样策略在 G+X+Y+Z+…中加以对付，他自己无需使用从 G 走到 D 或 E 的新的行动，但若他的对手利用时，他可以立即加以逆转，使之从

(D 或 E)+X+Y+Z+…

走回到

H+X+Y+Z+…

中去．

> 如果 G 可由 H 添加若干可逆行动而得出，则 G 必等价于 H，但要假定，若 H 连一个选择都不存在时，G 同 H 仍具有相同的结果．

**可逆行动的剪枝．**

故而我们可以在任意的博弈和中用 H 来代替 G，并简单地记为 G=H．例如，

$$\{0,1,2,5,6,9\}=\{0,1,2\}=3,$$

这是由于 5，6，9 都有着 3 作为一个选择，而 3 又不是 0 之故．

## 终端附款

然而当 H 没有合法选择，即当它是**终端** 0 时(见图 3)，这一剪枝过程需要特别小心．问题在于我们的论证甚至有可能悬在半空之中，落不到地面上来．

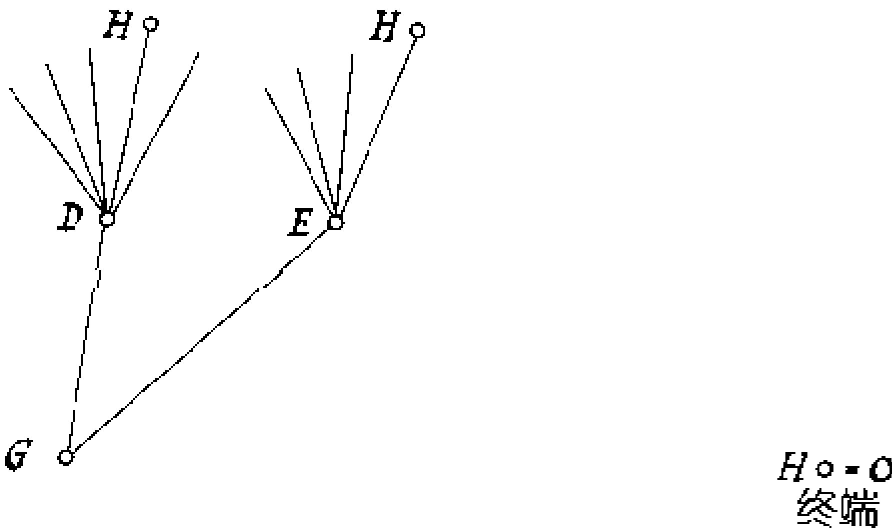



**图 3.** 终端附款．

因若 H,X,Y,Z,…的每一个都是终端,那么你已经赢了

$$H+X+Y+Z+\cdots(=0)$$

(根据定义),但这并不能帮助你去赢得

$$G+X+Y+Z+\cdots(=G).$$

所以在这种情形下,逼得我们要加上一个附款:当 H 为 0 时,G 必须要有同一结果,也非为 0 不可.

## 可怕的真相

由于在正常游戏规则下,一切无偏博弈均可化约为尼姆游戏,而反常游戏规则的尼姆游戏仅不过是正常尼姆的细枝末节的修改,所以人们往往认为反常无偏博弈大概也很简单.你在玩反常游戏规则的博弈和时,也许可以同正常情况一样,直到非常接近终端时才引起注意……情况真是这样的吗?

不幸的是,事实并非如此!

例如,在格隆第游戏(见第 4 章)的正常游戏规则下,少于 50 颗豆子的单堆 $\mathscr{P}$—局势为

$$G_1,G_2,G_4,G_7,G_{10},G_{20},G_{23},G_{26}.$$

可是它们之中没有一个是反常游戏规则下的 $\mathscr{P}$—局势,其时的前面若干个单堆 $\mathscr{P}$—局势为

$$G_3,G_6,G_9,G_{12},\cdots,G_{42},G_{45},$$

它们的下标正好是前十五个 3 的倍数. $G_{50}$ 在正常与反常两种情形下都是 $\mathscr{P}$—局势看来真是一种巧合.由于一往直前,不考虑反常游戏规则下博弈的微妙性,许多探索者在这个游戏与其他类似物中犯下了错误.

在 ONAG 书中已经作出了证明,化简反常博弈的唯一办法是消除可逆行动,适当注意终端附款.如果两个博弈没有可逆动作,看起来也不同,那么它们就真正是不同的,因为总会存在着别的什么博弈,它的加入将会得出不同结果.

这些复杂情况将在图 4 中有所说明,该图给出了七个木柱的开勒司游戏,并已尽可能作了简化.

格隆第与史密斯证明,如果第 0 天出生 1 个游戏,则第 1 天会出生 2 个,第 2 天 3 个,第 3 天 5 个,第 4 天 22 个,第 5 天 4 171 780 个,所以第 6 天出生的游戏可以多达

$$2^{4\,171\,780}$$

个.除掉可逆行动后能使这个庞大的数字稍许减小,但比重小得无足轻重,也就是说,它的 1 255 831个十进位数码中,前 625 140 位数字根本不受影响!确切的数字请看 ONAG 第 140 页.

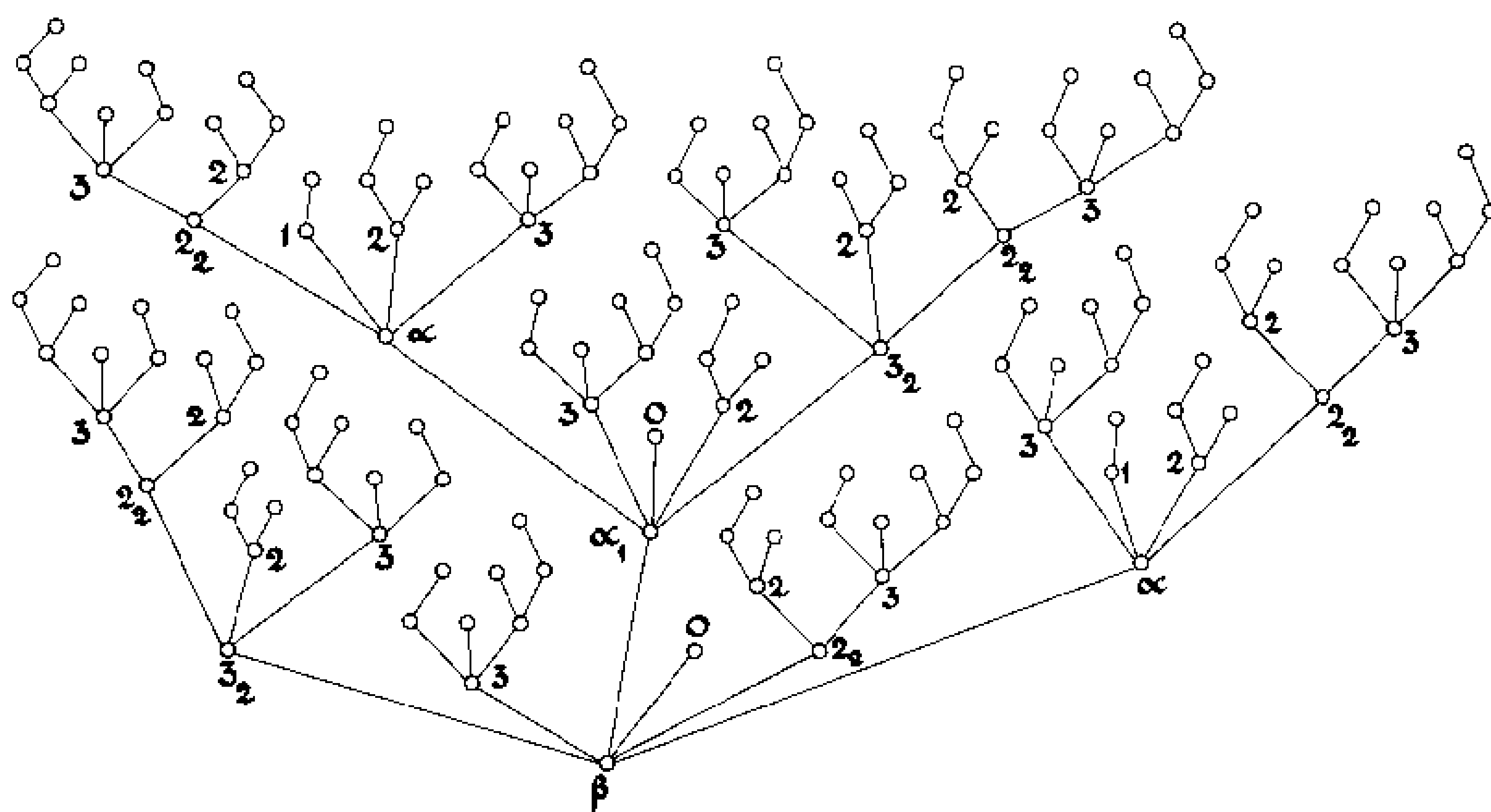


**图 4.** 开勒司游戏 $K_7$ 的局势，$\beta$ 的结构是 $\beta=\alpha_1\alpha 3_2 2_2 30$，其中 $\alpha=2_2 321$.

利用**驯服游戏**的概念，我们尽其所能地来作一些救援，但这不可能做得很多. 如果你们认为本章的剩余部分看上去非常复杂，那是因为它原本就是如此!

## 旧规则还剩下些什么?

从本节起直到本章结束，我们将省略掉尼姆堆记法中的星号，所以下文出现的数字一般是**指拧数**.

在正常游戏规则下，mex 法则可用来将每一个局势化简为一个尼姆堆，尽管我们刚刚已经看到今后将不会再有这样的事，然而法则还是有点力量的：

> 若 $m=\text{mex}(a,b,c,\cdots)$ 则 $\{a,b,c,\cdots\}=m$，
> 假定 $a,b,c,\cdots$ 中至少有一个是 0 或 1.

**反常 Mex 法则**

反常游戏规则下的尼姆加法为：

> 假定 $a,b$ 中有一为 0 或 1，则 $a+b=a\overset{*}{+}b$.

**反常尼姆法则**

反常 Mex 法则表明

$$\{0,2,5\}=\{0\}=1,$$

而

$$\{1,3,4\}=\{\quad\}=0.$$

两者都可化约到尼姆堆，但像

$$\{2,3\}$$

之类的局势则不能化约，因为它们虽有选择，但选择不是 0 或 1.

反常尼姆法则可用归纳法简单地证出. 例如

$$\begin{aligned}4+1&=\{0+1,1+1,2+1,3+1,4+0\}\\&=\{\ 1,\quad 0,\quad 3,\quad 2,\quad 4\ \}=5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5+1&=\{0+1,1+1,2+1,3+1,4+1,5+0\}\\&=\{\ 1,\quad 0,\quad 3,\quad 2,\quad 5\quad 5\ \}=4,\end{aligned}$$

这是用上了反常 Mex 规则的.

## 真像 2+2 那么容易吗?

2+2 会等于什么? 一般人认为它是 4，正常尼姆游戏的玩家说它是 0，而反常游戏的答案却说它是 [illegible]一局势

$$2+2=\{2+1,2+0\}=\{3,2\}.$$

它已无法进一步化简. 唯一为尼姆堆而又是反常 [illegible] 局势的为 1，然而

$$1+1\quad 同\quad (2+2)+(2+2)$$

却有着不同结果. 因此我们肯定不能将 2+2 简化为 1.

如果此类加法能取得更满意结果的话，反常尼姆的理论无疑会变得更容易一些，但它并非如此，从而博弈将变得极其复杂，因此需要使用我们拥有的专利记号(尽管它很不牢靠)去加以记录.

若某些局势已给出了专名，例如

$$a,b,c,\cdots$$

我们将用 $a_n$ 表示 $a+n$，如此等等.

例如，我们将用

$$a_m b_n c d$$

表示如下博弈

$$\{a+m, b+n, c, d\}.$$

但是，为了避免混淆，有单个选择时，我们将用

$$a \cdot \text{来代替}\{a\}.$$

## 格隆第游戏的反常形式

回忆第4章，格隆第游戏的走法是将任意一堆豆子分成大小不一样的两堆豆子.（任一堆都得有豆子，不准许空堆），现在让我们利用反常尼姆加法，mex规则来加以分析，下文的 $G_n$ 表示有着 $n$ 颗豆子的格隆第堆：

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{\quad\} = 0,\\
G_2 &= \{\quad\} = 0,\\
G_3 &= \{G_2+G_1\} = \{0\} = 1,\\
G_4 &= \{G_3+G_1\} = \{1\} = 0,\\
G_5 &= \{G_4+G_1, G_3+G_2\} = \{0,1\} = 2,\\
G_6 &= \{G_5+G_1, G_4+G_2\} = \{2,0\} = 1,\\
G_7 &= \{1+0, 2+0, 0+1\} = \{1,2,1\} = 0,\\
G_8 &= \{0+0, 1+0, 2+1\} = \{0,1,3\} = 2,\\
G_9 &= \{2+0, 0+0, 1+1, 2+0\} = \{2,0,0,2\} = 1,\\
G_{10} &= \{1+0, 2+0, 0+1, 1+0\} = \{1,2,1,1\} = 0,\\
G_{11} &= \{0+0, 1+0, 2+1, 0+0, 1+2\} = \{0,1,3,0,3\} = 2,\\
G_{12} &= \{2-0, 0+0, 1+1, 2+0, 0+2\} = \{2,0,0,2,2\} = 1.
\end{aligned}$$

然而13这个数却是不幸的！我们发现

$$G_{13} = \{1+0, 2+0, 0+1, 1+0, 2+2, 0-1\} = \{1,2,1,1,2+2,1\}$$

于是
$$G_{13} = \{2+2, 2, 1\},$$

或者利用上文介绍过的压缩记号*，记为

$$G_{13} = 2_2 21.$$

由于2+2不能简化为一个尼姆堆，这把我们卡住了！本书的三位作者甚至不知道怎样去玩 $G_{13}$ 再加上三个任意尼姆堆的反常博弈和. 从下面的表1中你们可以看到使

---

* 译者注：即上文说过的，使用下标的记号.

$$G_{13}+x+y+z$$

为一 $\mathscr{P}$—局势的尼姆三数组 $x,y,z$ 简直混乱不堪！你不要指望有什么神奇公式来驾御这类局势.

但你也许不愿意玩这种博弈和($G_{13}$加上几个尼姆堆)——毕竟,在格隆第游戏中,你需要去玩的,只是它同别的格隆第堆而已.即使 $G_{13}$不是一种尼姆局势,它仍是一种游戏;让我们称之为 $a$,并继续进行下去:

$$G_{14}=\{a+0,1+0,2+1,0+0,1+2,2+1\}=a310$$

它将简化为 $2=\{1,0\}$,因为 $a=2_2 21$ 与 $3=210$ 两者都是以它作为一种选择.由此可知,尽管 $G_{13}$不是一个尼姆堆,然而 $G_{14}$倒是的!

| x= / y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 4 | 5 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 | 12 | 13 | 10 | 11 | 16 | 17 | 14 | 15 | 20 | 21 | 18 | 19 | 24 | 25 |
| 1 | 0 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 9 | 8 | 7 | 6 | 13 | 12 | 11 | 10 | 17 | 16 | 15 | 14 | 21 | 20 | 19 | 18 | 25 | 24 |
| 2 | 4 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 7 | 6 | 9 | 8 | 11 | 10 | 13 | 12 | 15 | 14 | 17 | 16 | 19 | 18 | 21 | 20 | 23 | 22 |
| 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 1 | 0 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 4 | 2 | 3 | 0 | 1 | 4 | 5 | 10 | 11 | 15 | 14 | 6 | 7 | 16 | 17 | 9 | 8 | 12 | 13 | 24 | 25 | 22 | 23 | 20 | 21 |
| 5 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 4 | 11 | 10 | 14 | 15 | 7 | 6 | 17 | 16 | 8 | 9 | 13 | 12 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 |
| 6 | 8 | 9 | 7 | 6 | 10 | 11 | 3 | 2 | 0 | 1 | 4 | 5 | 14 | 15 | 12 | 13 | 18 | 19 | 16 | 17 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 7 | 9 | 8 | 6 | 7 | 11 | 10 | 2 | 3 | 1 | 0 | 5 | 4 | 15 | 14 | 13 | 12 | 19 | 18 | 17 | 16 | 25 | 24 | 27 | 26 |
| 8 | 6 | 7 | 9 | 8 | 15 | 14 | 0 | 1 | 3 | 2 | 16 | 17 | 18 | 19 | 5 | 4 | 10 | 11 | 12 | 13 | 26 | 27 | 29 | 28 |
| 9 | 7 | 6 | 8 | 9 | 14 | 15 | 1 | 0 | 2 | 3 | 17 | 16 | 19 | 18 | 4 | 5 | 11 | 10 | 13 | 12 | 27 | 26 | 28 | 29 |
| 10 | 12 | 13 | 11 | 10 | 6 | 7 | 4 | 5 | 16 | 17 | 3 | 2 | 0 | 1 | 18 | 19 | 8 | 9 | 14 | 15 | 29 | 28 | 31 | 30 |
| 11 | 13 | 12 | 10 | 11 | 7 | 6 | 5 | 4 | 17 | 16 | 2 | 3 | 1 | 0 | 19 | 18 | 9 | 8 | 15 | 14 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 12 | 10 | 11 | 13 | 12 | 16 | 17 | 14 | 15 | 18 | 19 | 0 | 1 | 3 | 2 | 6 | 7 | 4 | 5 | 8 | 9 | 30 | 31 | 32 | 33 |
| 13 | 11 | 10 | 12 | 13 | 17 | 16 | 15 | 14 | 19 | 18 | 1 | 0 | 2 | 3 | 7 | 6 | 5 | 4 | 9 | 8 | 31 | 30 | 33 | 32 |
| 14 | 16 | 17 | 15 | 14 | 9 | 8 | 12 | 13 | 5 | 4 | 18 | 19 | 6 | 7 | 3 | 2 | 0 | 1 | 10 | 11 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 15 | 17 | 16 | 14 | 15 | 8 | 9 | 13 | 12 | 4 | 5 | 19 | 18 | 7 | 6 | 2 | 3 | 1 | 0 | 11 | 10 | 33 | 32 | 35 | 34 |
| 16 | 14 | 15 | 17 | 16 | 12 | 13 | 18 | 19 | 10 | 11 | 8 | 9 | 4 | 5 | 0 | 1 | 3 | 2 | 6 | 7 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| 17 | 15 | 14 | 16 | 17 | 13 | 12 | 19 | 18 | 11 | 10 | 9 | 8 | 5 | 4 | 1 | 0 | 2 | 3 | 7 | 6 | 35 | 34 | 37 | 36 |
| 18 | 20 | 21 | 19 | 18 | 24 | 25 | 16 | 17 | 12 | 13 | 14 | 15 | 8 | 9 | 10 | 11 | 6 | 7 | 3 | 2 | 0 | 1 | 38 | 39 |
| 19 | 21 | 20 | 18 | 19 | 25 | 24 | 17 | 16 | 13 | 12 | 15 | 14 | 9 | 8 | 11 | 10 | 7 | 6 | 2 | 3 | 1 | 0 | 39 | 38 |

表 1. 能使 $G_{13}+x+y+z$ 为一 $\mathscr{P}$—局势的 $z$ 值.



继续往下进行时我们发现了两个尼姆堆，两个可以化简为 $a$ 的游戏，还有两个新的值：

$$G_{15}=\mathbf{a}20=1,$$
$$G_{16}=\mathbf{a}_1 2_2 21=a,$$
$$G_{17}=\mathbf{a}310=2,$$
$$G_{18}=a_2 a20=b,$$
$$G_{19}=\mathbf{ba}_1 2_2 21=a,$$
$$G_{20}=ba3=c,$$
$$G_{21}=\mathbf{cb}_1 a_2 a20=b,$$

此处可逆选择是用黑体字表示的. 从此开始，所有的局势都不一样了. 下一个是

$$G_{22}=cba_1 2_2 1=d,$$

尽管如此，$d$ 的大部分性态表现得同 $a$ 相似.

仅当格隆第堆具有下列大小

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,17.

时，格隆第游戏可以化约到尼姆游戏. 若假定 $a+a=0$，并利用下列规则：

> 若 $x,y,z,\cdots$ 是不大于 3 的尼姆堆，则 $a+x+y+z+\cdots$ 为一 $\mathscr{P}$- 局势，仅当 $x\overset{*}{+}y\overset{*}{+}z\overset{*}{+}\cdots=1$ 而且 2－或 3－堆的个数正好是 0 或 3 或 5 或 7 或 9 或…

那么大小为 13,16 或 19 的格隆第游戏尚可作些简化.

如果你还想多了解一些，请看本书最后一节.

# 动物及其属类

在后面几节中我们将说明反常尼姆策略可扩展到一大类我们称之为驯化的游戏，此外，对一些**烦躁的**游戏也可说上一大堆话，对极不安静、**骚动的**的游戏则知之甚少. **类属**的概念将有助于它们之间的划分.

先回忆一下，通常的尼姆值 $\mathscr{G}^+(G)$ 指的是唯一的尼姆堆的大小，以使得正常游戏规则下 $G+n$ 为一 $\mathscr{P}$—局势，现在我们将定义**反常尼姆值** $\mathscr{G}^-(G)$ 为唯一的 $n$，而能使 $G+n$ 在反常游戏规则下为一 $\mathscr{P}$— 局势. 你们可根据下面的法则来求出这些值.

| 若 $G$ 没有选择,则 $\mathcal{G}^+(G)=0$,否则,$\mathcal{G}^+(G)=\operatorname{mex}\mathcal{G}^+(G')$ | 若 $G$ 没有选择,则 $\mathcal{G}^-(G)=1$,否则,$\mathcal{G}^-(G)=\operatorname{mex}\mathcal{G}^-(G')$ |
|---|---|

这处的 $G'$ 应遍历 $G$ 的一切选择.

不幸的是 $\mathcal{G}^-(G)$ 并无能耐帮助我们计算 $\mathcal{G}^-(G+2)$. 因而我们必须定义一种更加复杂的符号,即 $G$ 的**类属特征数**(以下简称类数)

$$g^{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots}.$$

此处

$$g=\mathcal{G}^+(G),$$

$$\gamma_0=\mathcal{G}^-(G),\ \gamma_1=\mathcal{G}^-(G+2),\ \gamma_2=\mathcal{G}^-(G+2+2),\ \gamma_3=\mathcal{G}^-(G+2+2+2),$$

……

我们还将在各种情况下使用这个记号以作为缩略手段:

$g$　　代表大小为 $g$ 的一个尼姆堆.

$g^\gamma$　　代表一个已驯服或烦躁的游戏.

(在这些情况下,它们的完整类数可由表 2 查出)

$g^{\alpha\beta\cdots\lambda\mu}$ 是类数 $g^{\alpha\beta\cdots\lambda\mu\lambda\mu\lambda\mu\cdots}$ 的缩略,这时,每一个类数在结尾处作 $\lambda\mu\lambda\mu\lambda\mu\cdots$ 的不断重复.

| 尼姆堆 | 与 | 驯化游戏 | 烦躁的游戏 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $g^\gamma$ | 类数 | $g^\gamma$ | 类数 | $g^\gamma$ | 类数 |
| 0 | $0^1$ | $0^{12020\cdots}$ | | | | |
| 1 | $1^0$ | $1^{03131\cdots}$ | | | | |
| | $0^0$ | $0^{12020\cdots}$ | | | | |
| | $1^1$ | $1^{13131\cdots}$ | | | | |
| 2 | $2^2$ | $2^{20202\cdots}$ | $0^2$ | $0^{20202\cdots}$ | $1^2$ | $1^{20202\cdots}$ |
| 3 | $3^3$ | $3^{31313\cdots}$ | $0^3$ | $0^{31313\cdots}$ | $1^3$ | $1^{31313\cdots}$ |
| 4 | $4^4$ | $4^{46464\cdots}$ | $0^4$ | $0^{42020\cdots}$ | $1^4$ | $1^{43131\cdots}$ |
| 5 | $5^5$ | $5^{57575\cdots}$ | $0^5$ | $0^{52020\cdots}$ | $1^5$ | $1^{53131\cdots}$ |
| 6 | $6^6$ | $6^{64646\cdots}$ | $0^6$ | $0^{62020\cdots}$ | $1^6$ | $1^{63131\cdots}$ |
| 7 | $7^7$ | $7^{75757\cdots}$ | $0^7$ | $0^{72020\cdots}$ | $1^7$ | $1^{73131\cdots}$ |

**表 2.** 某些游戏中类数之缩略.

譬如说,采用这些缩略记号之后,格隆第游戏的类数序列便是

$$.0\ 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ 2\ 1\ 3^{1431}\ 2\ 1\ 3^{1431}\ 2\ 4^{0564}\ 3^{1431}\ 0^{20}\ 4^{0564}\ 3^{1431}\cdots$$

而开勒司游戏的记法为

| $K_0$ | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $K_5$ | $K_6$ | $K_7$ | $K_8$ | $K_9$ | $K_{10}$ | $K_{11}$ | $K_{12}$ | $K_{13}$ | $K_{14}$ | $K_{15}$ | $K_{16}$ | $K_{17}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0.$ | $1$ | $2$ | $3$ | $1$ | $4^{146}$ | $3$ | $2^2$ | $1^1$ | $4^{016}$ | $2^2$ | $6^{16}$ | $4^{045}$ | $1^1$ | $2^2$ | $7^{57}$ | $1^{13}$ | $4^{64}$ | $\cdots$ |

单一上标的形式是为驯化或烦躁游戏保留的. $K_{13}$ 与 $K_{16}$ 有着同样的类数

$$1^{1313\cdots}.$$

但上面已给出的缩略记号法则表示得有所不同,因为只有前者是驯化游戏,而后者不是.

## 利用类数,我们能干点啥?

在反常游戏计算中,类数是一个极其有用的工具,我们将会逐步理解,它有以下一些作用:

1. 我们能求出单一游戏的反常结果. 当且仅当第一上标为 0 时,结果为 $\mathscr{P}$.

2. 如果每一个分支博弈都是驯化的而且其类数为已知,则我们能算出这些分支博弈的和之类数(从而算出了结果),当然它也是驯化的.

3. 若 $a,b,c,\cdots\cdots$ 表示大小为 0,1,2,3 的尼姆堆,则由任一博弈 $G$ 的类数出发,我们可以求出

$$G+a+b+c\cdots\cdots$$

的类数与结果.

4. 上述尼姆堆中的一个,其大小可以放宽到 4 或更多,而仍能算出其结果.

5. 若 $a,b,c,\cdots$ 为任意尼姆堆,$R$ 为类数已知的**烦躁**游戏,则我们能求出

$$R+a+b+c+\cdots$$

的类数与结果.

6. 对许多烦躁游戏 $R$ 来说,我们的**挪亚方舟定理** * 将表明

$$R+R, R+R+R,\cdots$$

也是驯化的,并具有已知的类数与结果.

7. 还有许多**半驯化**游戏 $H$,而 $H+H$ 是驯化的,它们亦有已知的类数与结果.

8. 再次应用挪亚方舟定理可知,对一个适当限制的(骚动)游戏 $R$ 而言,在合适情况下,偶数份 $R$ 的复制品将不影响类数或结果.

---

* 译者注:详见下文,此处出现得非常突兀,西方作者经常如此,同我们的习惯写法有很大差异.

## 坚实，轻浮与驯化

在尼姆游戏中只出现以下各种组合情况：

$0^1, 1^0$　　（轻浮单位）

$0^0, 1^1$　　（坚实单位）

$2^2, 3^3, 4^4, 5^5, \cdots$　　（大牧场*）

它们可按下列规则进行组合，此规则对一切驯化游戏全都管用：

> 若任一分支博弈是坚实的，则其和亦然，且有
>
> $$a^{\alpha}+b^{\beta}+\cdots=(a\overset{*}{+}b\overset{*}{+}\cdots)^{a\overset{*}{+}b\overset{*}{+}\cdots}.$$
>
> 若所有分支博弈全都轻浮，则其和亦然，且有
>
> $$a^{\alpha}+b^{\beta}+\cdots=(a\overset{*}{+}b\overset{*}{+}\cdots)^{1\overset{*}{+}a\overset{*}{+}b\overset{*}{+}\cdots}.$$

**驯化游戏的组合**

据此可知

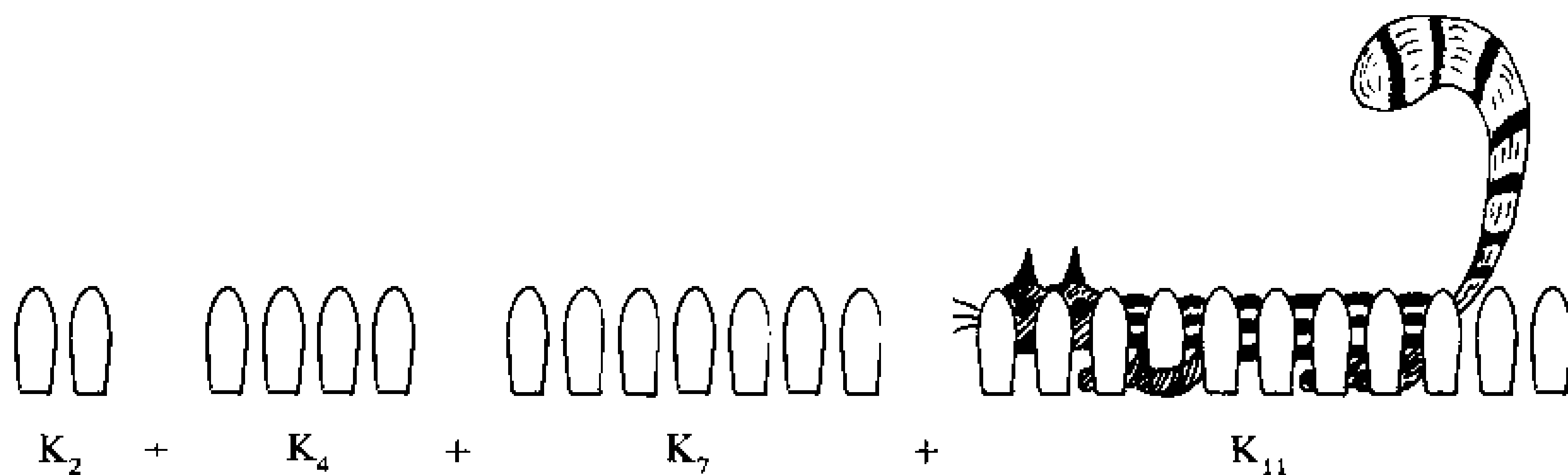
$$0^1+2^2+7^7=5^?,$$

由于它具有两个坚实分支，所以必为类数 $5^5$，然而

$$0^1+1^0+1^0=0^?,$$

由于其和完全是轻飘飘的东西，所以类数一定是 $0^1$.

下面让我们来看看开勒司局势




* 译者注：本书作者将各种游戏划分为三类，并以野兽或动物来作譬喻.

我们的序列表明 $K_2$, $K_4$ 与 $K_7$ 是驯化的；实际上，$K_2$ 与 $K_4$ 已经极其驯化，它们都已是尼姆堆了. 三个驯化分支合在一起，得出了一个类数为 $1^1$ 的驯化游戏，

$$2^2+1^0+2^2=1^1.$$

可是 $K_{11}$ 却是货真价实的一头凶恶猛兽，其类数为 $6^{4646\cdots}$. 我们怎么办呢？幸而我们看出 $K_{11}$ 的驯化选择

$$K_3+K_7$$

有着类数

$$3^3+2^2=1^1$$

从而导致

$$K_2+K_4+K_7+K_3+K_7,$$

其类数是

$$2+1+2^2+3+2^2=0^0$$

表明它是一个 $\mathscr{P}$—局势.

## 哪种动物是驯服的……

粗略地说，我们可视为尼姆局势的游戏都是驯服的. 在本书中，"驯服"这个概念要比 ONAG 书中广泛得多，后者只涉及"遗传的驯服". 在本章附录里，可驯服的游戏家族甚至可以更为庞大.

所谓博弈 $G$ 是驯服的，它的尼姆值 $g^\gamma$ 必须是下列驯性配对(来自尼姆局势)

$$0^0,1^1,2^2,3^3,4^4,\cdots\text{或 }0^1,1^0$$

中的一个. 若 $G$ 的一切选择都是驯服的，那就没有其他条件了. $G$ 的野性选择甚至也可默许，只要在决定 $G$ 的尼姆值时不需要用到它们，而且它们中的每一个都可通过可逆转动作回到尼姆值为 $g^\gamma$ 与 $?^\gamma$ 的驯服游戏.

说得更确切些，如果驯服选择的类数为

$$a^\alpha,b^\beta,\cdots$$

则必须有

$$g=\text{mex}(a,b,\cdots)$$
$$\gamma=\text{mex}(\alpha,\beta,\cdots)$$

而对任一野性选择，必定有着一些行动使之回到两个(有可能彼此相等)类数为

$$g^{\gamma}\ 与 ?^{\gamma}$$

的驯服游戏上去.

例如,开勒司游戏的一个局势

$$K_7=\{K_6,\ K_5+K_1,K_4+K_2,K_3+K_3,K_5,K_4+K_1,K_3+K_2\}$$
$$=\{3,\quad K_5+1,\ 1+2,\ 3+3,K_5,\ 1+1,\ 3+2\}$$

有着驯性选择

$$3^3,\qquad 3^3,\qquad 0^0,\qquad 0^1,\qquad 1^1$$

已足以确定类数 $2^2$. 而两个野性选择则可通过可逆动作使之回到具有这一类数的驯服游戏.

$$K_5+1\to K_3+1,\qquad 类数\ 2^2,$$
$$K_5\to K_3+K_1,\qquad 类数\ 2^2.$$

所以 $K_7$ 本身即可视为类数 $2^2$ 的驯服游戏.

要想在驯服游戏之和中取胜,在你的每步动作之后必须使得每一个分支都是驯服的,并使总的类数为

$0^0$　如果有一分支为**坚实**的,

$1^0$　如果每一分支都是**轻浮**的.

在你的对手打出一张野牌时,你总有一种合适的逆转走法来对付他. 除此之外,策略同反常尼姆游戏完全一样.

## ……哪种动物是烦躁的?

我们再次拥有一个比 ONAG 书中更广的类. 如果 $G$ 是**烦躁**的游戏,则它的尼姆值必须是以下各个**烦躁对**(其中 $g$ 为 0 或 1,而 $\gamma\geqslant 2$):

$$0^2,0^3,0^4,0^5,\cdots\quad 或\quad 1^2,1^3,1^4,1^5,\cdots$$

中之一. 倘若 $G$ 的一切选择都是驯服的,那就没有进一步的条件了,野性选择也可允许,只要它们不需用来求 $G$ 的尼姆值,并存在着**可逆转**动作,将每一个野性选择返回到类数为

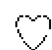
$$g^{\gamma}\quad 与\quad ?^{\gamma}$$

的**驯服或烦躁**游戏. 这里的? 必须是

$$0,1,\gamma,\gamma\pm 1.$$

中的一个.

说得更确切一些,若驯服选择的类数是

$$a^{\alpha}, b^{\beta}, \cdots$$

则我们必有

$$g = \mathrm{mex}(a, b, \cdots) = 0 \text{ 或 } 1,$$
$$\gamma = \mathrm{mex}(\alpha, \beta, \cdots) \geqslant 2,$$

而对任一野性选择必定存在着能把它们逆转到两个(有可能彼此相等)驯服或烦躁的游戏,其类数为

$$g^{?} \text{ 与 } ?^{\gamma} (\text{每一个}? \text{ 表示 } 0, 1, \gamma \text{ 或 } \gamma \overset{*}{+} 1).$$

不过,若将许多桀傲不驯的动物*放在一起,情况有可能恶化.当一头脾气倔强的动物放到某些驯服动物中去时,情况将会如何?我们甚至不想作出预测.但有一点则是肯定的,若它与尼姆局势放在一起时,性态是很好的.

**问题:** 设 $R$ 为一个类数 $g^{\gamma}$ 的烦躁游戏,$m, n, \cdots$ 为尼姆堆;试问:什么情况下,$R + m + n + \cdots$ 是 $\mathscr{P}$ 局势?

**答案:** 下列两种情况时会发生,或者是 $m \overset{*}{+} n \overset{*}{+} \cdots = \gamma$ 而每个 $m, n, \cdots$ 是 $0, 1, \gamma$ 或 $\gamma \overset{*}{+} 1$;或者是 $m \overset{*}{+} n \overset{*}{+} \cdots = g$

**烦躁游戏是有矛盾心理的尼姆堆**

另外,

若

$$0, 1 < n < \gamma, \gamma \overset{*}{-} 1,$$

则

$$R + n$$

是驯服的,其类数为 $(g \overset{*}{+} n)^{g \overset{*}{+} n}$.

**中间值定理**

* 译者注:此处的所谓动物即指"游戏",作者将无生命的游戏加以"有情化"了,以下同,不再一一加注.

# 好孩子动物园里的某些驯良动物

## 反常惠德皇后游戏

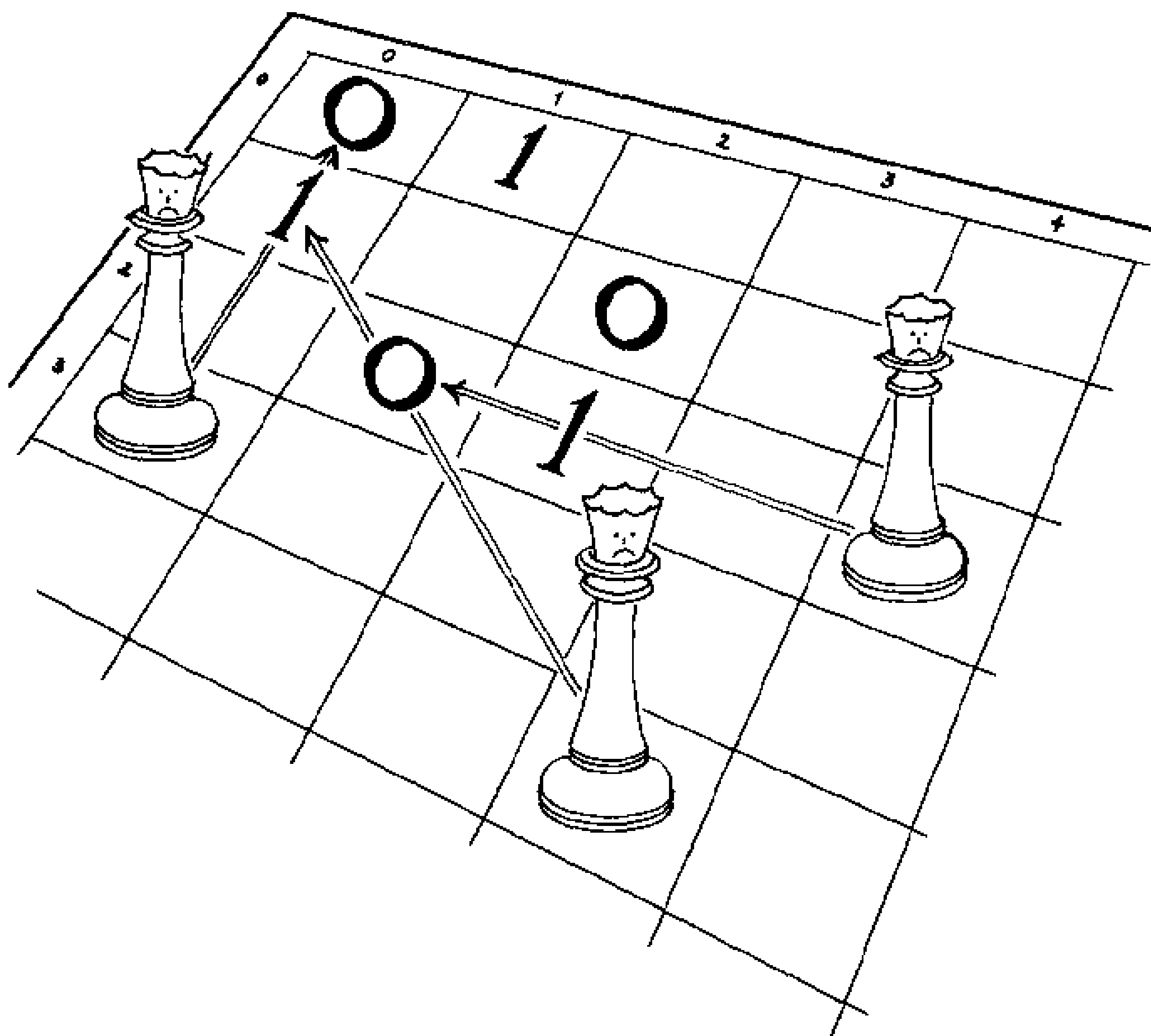



**图 5.** 为什么惠德皇后游戏是驯良动物?

我们已在第3章中遇到过正常惠德皇后游戏，通过反复试验，你们可以得出反常惠德皇后游戏的一张完整类数表格(见表3)，这张表已足以说明它是完全驯服的. 图5表明在主导九宫格(3×3棋盘)外面的任一只皇后既能看到一个0或1，又能看到别的. 由此事实，我们得以证明，在九宫格外面的任一方格既是坚实的，又是驯服的. 威尔德游戏与摩尔尼姆(下标带有 $k$)也是驯服的(见第15章). 日本学者山崎(Yamasaki)独立给出了所有这些游戏的反常形态分析. 惠德霍夫游戏也叫中国尼姆游戏或"捡石子"，而威尔德游戏的别名为宫本游戏.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 | 7 | 8 | 6 | 10 | 11 | 9 | 13 | 14 | 12 | |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 | 8 | 6 | 7 | 11 | 9 | 10 | 14 | 12 | 13 | |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 2 | $0^{0}$ | $1^{1}$ | $9^{9}$ | $10^{10}$ | $12^{12}$ | $8^{8}$ | $7^{7}$ | $15^{15}$ | $11^{11}$ | $16^{16}$ | |
| 4 | 4 | 5 | 3 | 2 | 7 | 6 | $9^{9}$ | $0^{0}$ | $1^{1}$ | $8^{8}$ | $13^{13}$ | $12^{12}$ | $11^{11}$ | $16^{16}$ | $15^{15}$ | |
| 5 | 5 | 3 | 4 | $0^{0}$ | 6 | $8^{8}$ | $10^{10}$ | $1^{1}$ | $2^{2}$ | $7^{7}$ | $12^{12}$ | $14^{14}$ | $9^{9}$ | $15^{15}$ | $17^{17}$ | |
| 6 | 6 | 7 | 8 | $1^{1}$ | $9^{9}$ | $10^{10}$ | 3 | 4 | $5^{5}$ | $13^{13}$ | $0^{0}$ | $2^{2}$ | $16^{16}$ | $17^{17}$ | $18^{18}$ | |
| 7 | 7 | 8 | 6 | $9^{9}$ | $0^{0}$ | $1^{1}$ | 4 | 5 | 3 | $14^{14}$ | $15^{15}$ | $13^{13}$ | $17^{17}$ | $2^{2}$ | 10 | |
| 8 | 8 | 6 | 7 | $10^{10}$ | $1^{1}$ | $2^{2}$ | $5^{5}$ | 3 | 4 | $15^{15}$ | $16^{16}$ | $17^{17}$ | $18^{18}$ | $0^{0}$ | $9^{9}$ | |
| 9 | 9 | 10 | 11 | $12^{12}$ | $8^{8}$ | $7^{7}$ | $13^{13}$ | $14^{14}$ | $15^{15}$ | $16^{16}$ | $17^{17}$ | $6^{6}$ | $19^{19}$ | $5^{5}$ | 1 | |
| 10 | 10 | 11 | 9 | $8^{8}$ | $13^{13}$ | $12^{12}$ | $0^{0}$ | $15^{15}$ | $16^{16}$ | $17^{17}$ | $14^{14}$ | $18^{18}$ | $7^{7}$ | $6^{6}$ | $2^{2}$ | |
| 11 | 11 | 9 | 10 | $7^{7}$ | $12^{12}$ | $14^{14}$ | $2^{2}$ | $13^{13}$ | $17^{17}$ | $6^{6}$ | $18^{18}$ | $15^{15}$ | $8^{8}$ | $19^{19}$ | $20^{20}$ | |
| 12 | 12 | 13 | 14 | $15^{15}$ | $11^{11}$ | $9^{9}$ | $16^{16}$ | $17^{17}$ | $18^{18}$ | $19^{19}$ | $7^{7}$ | $8^{8}$ | $10^{10}$ | $20^{20}$ | $21^{21}$ | |
| 13 | 13 | 14 | 12 | $11^{11}$ | $16^{16}$ | $15^{15}$ | $17^{17}$ | $2^{2}$ | $0^{0}$ | $5^{5}$ | $6^{6}$ | $19^{19}$ | $20^{20}$ | $9^{9}$ | $7^{7}$ | |
| 14 | 14 | 12 | 13 | $16^{16}$ | $15^{15}$ | $17^{17}$ | $18^{18}$ | $10^{10}$ | $9^{9}$ | $1^{1}$ | $2^{2}$ | $20^{20}$ | $21^{21}$ | $7^{7}$ | $11^{11}$ | |

**表 3.** 惠德皇后游戏的类数.

# 桔子冻与柠檬糖

**桔子冻**游戏，即 **·52** 游戏的道具是几行桔子胶糖，我们可在排成一列的糖果中任意取走其内部的一粒糖，或者在一行只有一粒糖时将该行全部取走；在与以上情况正相对立时，我们也可取走相邻的两粒糖，即它们是在某行的头或尾部，但不是此行的全部. 若用 $J_n$ 表示有 $n$ 粒桔子冻胶糖的行，我们可以求出

$$J_1=1,\ J_2=0,\ J_3=2,\ J_4=2,\ J_5=1,$$
$$J_6=\{2,3\}=2_2(\text{类数 } 0^0),\ J_7=3,$$
$$J_8=3_2 2_2 1(\text{类数 } 2^2),J_9=2_2 32(1^1).$$

继续计算下去，

$$J_{10}=\{J_8+J_1,\quad J_7+J_2,\quad J_6+J_3,\quad J_5+J_4,\quad J_8\},$$
$$\text{类数}\{\quad 3^3,\qquad 3^3,\qquad 2^2,\qquad 3^3,\qquad 2^2\}=0^0.$$
$$J_{11}=\{J_9+J_1,\quad J_8+J_2,\quad J_7+J_3,\quad J_6+J_4,\quad J_5+J_5,\quad J_9\},$$
$$\text{类数}\{\quad 0^0,\qquad 2^2,\qquad 1^1,\qquad 2^2,\qquad 0^1,\qquad 1^1\}=3^3$$

这是有着轻浮选择 $J_5+J_5=0^1$ 的最后情形. 从此以后,由于它的每个选择都是既坚实而又驯服,所以每个 $J_n$ 也都是坚而驯的,而类数序列

$$.1\ 0\ 2\ 2\ 1;0^0\ 3\ 2^2\ 1^1\ 0^0\ 3^3\ 2^2\ 1^1\ 0^0\ 3^3\cdots$$

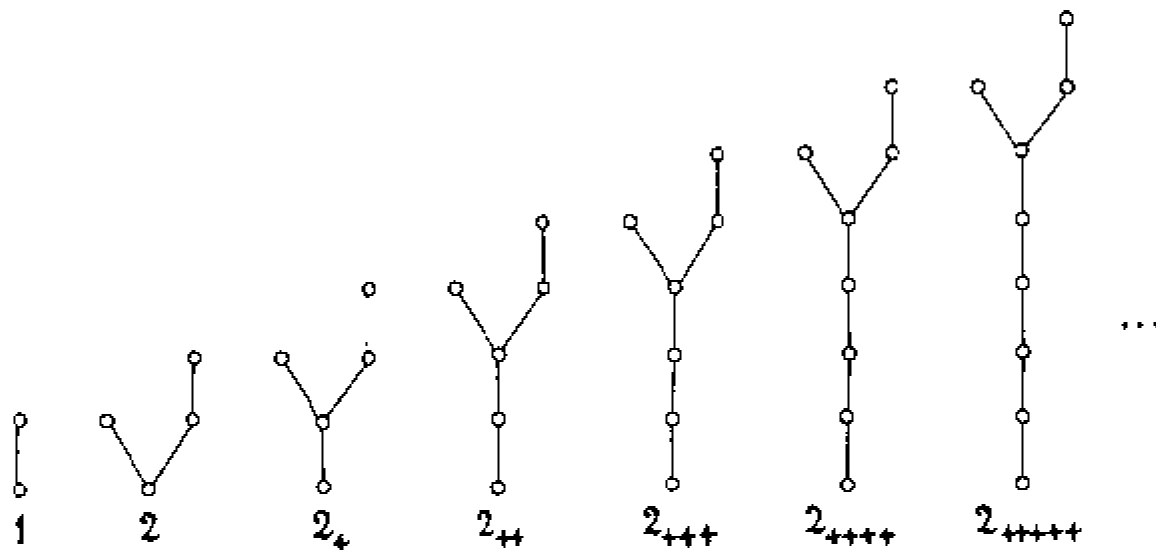
在分号之后出现了 4 的周期.

如果我们也准许在较长一列糖豆的**内部**取走两颗相邻糖果,这样就得出了所谓的**柠檬糖游戏**,**·56**,其典型局势可记为 $L_n$. 正常 **·56** 游戏的全面分析迄今仍未能掌握,尽管人们已算到50,000颗糖豆的一行. 不过,至少可以说,玩反常柠檬糖游戏已无多大困难. 因为在 $L_6=1$ 以后,每一个局势都是坚实而驯服的:

$$.1\ 0\ 2\ 2\ 4\ 1\ 1\ 1^1\ 3\ 2\ 4^4\ 4^4\ 6^6\ 6^6\ 2^2\ 1^1\ 1^1\ 7^7\ 6^6\ 8^8\ 4^4\ 1^1\ 1^1\cdots$$

## 昂首阔步的蝰蛇与取平方游戏

对**昂首阔步**,即 **·31** 游戏而言,化约形式为




从而表明游戏是驯服的,而类数序列是

$$.1\ 2\ 0^0\ 1^1\ 0^0\ 1^1\ 0^0\ 1^1\ 0^0\cdots$$

而对**蝰蛇**游戏,即 **·73** 游戏而言,化约形式为

$$1\quad 2\quad 3\quad 2_2\quad 3_2\quad 2_{22}\quad 3_{22}\quad 2_{222}\quad 3_{222}\quad 2_{2222}\quad 3_{2222}\quad\cdots$$

它们再次是驯良的,类数序列为

$$.1\quad 2\quad 3\quad 0^0\quad 1^1\quad 2^2\quad 3^3\quad 0^0\quad 1^1\quad 2^2\quad 3^3\quad\cdots$$

当然,$2_{++}$ 与 $3_{22}$ 仅仅是埘缩记号,其实际意思是

$$(2_+)_+=\{\{2\}\},(3_2)_2=3+2+2$$



**取平方**是另一种堆中取豆的游戏.每个局中人轮流行走，选择一堆并从中取出

1或4或9或16或……

颗豆子.若 $S_n$ 表示大小是 $n$ 的一堆，则

$$S_n=\{S_{n-1},S_{n-4},S_{n-9},\cdots\}$$

而前面的一些 $S_n$ 可以化约为尼姆堆：

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | … |

尽管出现了2与3，可是我们从未能得出诸如{2,3}的局势，因为那是不能化约为尼姆堆的.在本章增补材料中，我们将给出T·S·福格森的证明，即一切相减游戏都能化约为尼姆游戏，从而是驯服的.日本学者山崎也独立地得出了同样的结论.他所使用的术语“扁平”与“射影”，两者都蕴含了我们所用的字眼“驯服”的意思.

## 坏孩子问道："如果它们野性难驯，怎么办呢？"

她必须懂得怎样去计算类数：

> 对一非空游戏 $G=\{A,B,\cdots\}$
>
> 其中　$A$ 的类数为 $a^{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots}$
>
> 　　　$B$ 的类数为 $b^{\beta_0\beta_1\beta_2\cdots}$
>
> 　　　……………………
>
> 则　类数　　$g^{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\cdots}$
>
> 可由以下办法算出：
>
> $$g=\text{mex}(a,b,\cdots),$$
> $$\gamma_0=\text{mex}(\alpha_0,\beta_0,\cdots),$$
> $$\gamma_1=\text{mex}(\gamma_0,\gamma_0\overset{*}{+}1,\alpha_1,\beta_1,\cdots),$$
> $$\gamma_2=\text{mex}(\gamma_1,\gamma_1\overset{*}{+}1,\alpha_2,\beta_2,\cdots),$$
> ……………………………………
> $$\gamma_{n+1}=\text{mex}(\gamma_n,\gamma_n\overset{*}{+}1,\alpha_{n+1},\beta_{n+1},\cdots).$$

怎样把较小的尼姆堆相加起来：

若　$G$ 有类数 $g^{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots}$

则　$G+1$ 有类数$(g\overset{*}{+}1)^{\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3\cdots}$

　　$G+2$ 有类数$(g\overset{*}{+}2)^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots}$

　　$G+3$ 有类数$(g\overset{*}{+}3)^{\delta_1\delta_2\delta_3\cdots}$

　　$G+2+2$ 有类数 $g^{\gamma_2\gamma_3\cdots}$

　　$G+3+2$ 有类数$(g\overset{*}{+}1)^{\delta_2\delta_3\cdots}$

　　………………………………

其中　$\delta_0=\gamma_0\overset{*}{+}1,\delta_1=\gamma_1\overset{*}{+}1,\delta_2=\gamma_2\overset{*}{+}1,\cdots$

下面是我们怎样求出四种格隆第野生动物类数的办法（其中 $a=2_221,b=a_2a20,c=ba3,d=cba_12_21$）：

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $c$ | $0^{2020\cdots}$ |
| | | $a_2$ | $1^{4313\cdots}$ | | | $b$ | $4^{0564\cdots}$ |
| $2_2$ | $0^{0202\cdots}$ | $a$ | $3^{1431\cdots}$ | $b$ | $4^{0564\cdots}$ | $a_1$ | $2^{0520\cdots}$ |
| $2$ | $2^{2020\cdots}$ | $2$ | $2^{2020\cdots}$ | $a$ | $3^{1431\cdots}$ | $2_2$ | $0^{0202\cdots}$ |
| $1$ | $1^{0313\cdots}$ | $0$ | $0^{1202\cdots}$ | $3$ | $3^{3131\cdots}$ | $1$ | $1^{0313\cdots}$ |
| $a$ | $3^{1431\cdots}$ | $b$ | $4^{0564\cdots}$ | $c$ | $0^{2020\cdots}$ | $d$ | $3^{1431\cdots}$ |

由于格隆第游戏已在 ONAG 书中专门分析过，我们将把它的进一步分析搁在后边，而用开勒司游戏作为我们的下一个例子.

## 反常开勒司游戏

对好孩子动物园里的驯良动物来说，我们无须应用可逆动作，因为没有什么野生动物横穿我们的道路. 不过，开勒司游戏中虽也不同驯服游戏（见第 4 章），但在那里充斥着野性难驯的家伙，我们必须用上全部谋略才能加以对付. 在表 4 中，我们已把类数分析推进到大小为 20 的各堆，尽管困



难越来越大,我们又继续算出了以下几项:

| $K_{21}$ | $K_{22}$ | $K_{23}$ | $K_{24}$ | $K_{25}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $4^{61}$ | $6^{46}$ | $7^{57}$ | $4^{61}$ | $1^{731}$ | … |

每一种游戏的选择是从表的前两行看出的. 譬如说

$$K_{10}=\delta=\{\gamma,\beta+2,\beta+1,\alpha+3,\alpha+1,3+2,2+2,0\},$$

驯服选择为: ↓ $0^0$, $3^3$, ↓ ↓ $1^1$, $0^0$, $0^1$ 产生出 $2^2$,

而其他选择可逆转为: 2, 2, 2,

从而证明了 $K_{10}$ 是驯服的,其类数为 $2^2$. 在正常开勒司游戏中,除 0 之外,没有一个单独的行可以是 P 局势(取出中间的一根或二根木柱),但此表格告诉我们,在反常开勒司游戏中,

$$K_1, K_4, K_9, K_{12}, K_{20}$$

| $n$ | $K_n$ | $K_{n-1}+K_1$ | $K_{n-2}+K_2$ | $K_{n-3}+K_3$ | $K_{n-4}+K_4$ | $K_{n-5}+K_5$ | $K_{n-6}+K_6$ | $K_{n-7}+K_7$ | $K_{n-8}+K_8$ | $K_{n-9}+K_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | | 0 | | | | | | | |
| 3 | 3 | | 3 | | | | | | | |
| 4 | 1 | | 2 | $0^0(2_2)$ | | | | | | |
| 5 | $4^{146}(\alpha)$ | 0 | $1^1(3_2)$ | | | | | | | |
| 6 | 3 | $5^{057}(\alpha_1)$ | 3 | $0^0(2_2)$ | | | | | | |
| 7 | $2^2(\beta)$ | 2 | $6^{16}(\alpha_2)$ | 2 | | | | | | |
| 8 | $1^1(3_2)$ | $3^3(\beta_1)$ | $1^1(3_2)$ | $7^{57}(\alpha_3)$ | 0 | | | | | |
| 9 | $4^{016}(\gamma)$ | $0^0$ | $0^0$ | $0^0$ | $5^{057}$ | | | | | |
| 10 | $2^2(\delta)$ | $5^{157}$ | $3^3$ | $1^1$ | 2 | $0^{120}$ | | | | |
| 11 | $6^{46}$ | $3^3$ | $6^{46}$ | $2^2$ | $3^3$ | $7^{57}$ | | | | |
| 12 | $4^{016}$ | $7^{57}$ | $0^0$ | $7^{57}$ | $0^0$ | $6^{16}$ | $0^0$ | | | |
| 13 | $1^{\cdot}$ | $5^{157}$ | $4^{61}$ | $1^1$ | $5^{157}$ | $5^{75}$ | $1^1$ | | | |
| 14 | $2^2$ | $0^0$ | $6^{46}$ | $5^{75}$ | $3^3$ | $0^{02}$ | $2^2$ | $0^0$ | | |
| 15 | $7^{57}$ | $3^3$ | $3^3$ | $7^{57}$ | $7^{57}$ | $6^{16}$ | $7^{57}$ | $3^3$ | | |
| 16 | $1^{13}$ | $6^{46}$ | $0^0$ | $2^2$ | $5^{157}$ | $2^{20}$ | $1^1$ | $6^{46}$ | $0^0$ | |
| 17 | $4^{61}$ | $0^{02}$ | $5^{75}$ | $1^1$ | $0^0$ | $0^{02}$ | $5^{75}$ | $0^0$ | $5^{75}$ | |
| 18 | $3^{31}$ | $5^{75}$ | $3^{31}$ | $4^{61}$ | $3^3$ | $5^{75}$ | $7^{57}$ | $4^{64}$ | $3^3$ | $0^{120}$ |
| 19 | $2^{20}$ | $2^{20}$ | $6^{16}$ | $2^{20}$ | $6^{16}$ | $6^{16}$ | $2^2$ | $6^{47}$ | $7^{57}$ | $6^{46}$ |
| 20 | $1^{431}$ | | | | | | | | | |

$\alpha=2_2321$

$\beta=\alpha_1\alpha3_22_230$

$\gamma=\beta_1\beta\alpha_3\beta_23_220$

$\delta=\gamma\beta_2\beta_1\alpha_3\alpha_13_22_20$

表 4. 反常开勒司游戏的类数分析.

都是 $\mathcal{P}$-局势. 也不难验证有着足够多的 $\mathcal{P}$ 局势：

$$K_{20}, K_{11}+K_{11}, K_8+K_{16}, K_{13}+K_{13}, K_{14}+K_{14}, K_{15}+K_{15}, K_{16}+K_{16},$$

以便为

$K_{21}, K_{22}$，　$K_{23}, K_{24}$，　$K_{25}, K_{26}$，　$K_{27}, K_{28}$，　$K_{29}, K_{30}$，　$K_{31}, K_{32}$，　$K_{33}, K_{34}$. 提供好的回答.

现在要问你：究竟有没有更大的单行 $\mathcal{P}$-局势呢?

## 挪亚方舟定理

任何一种刚刚变“野”的游戏(它们只拥有驯服的选择)，在其选择中只能拥有两种轻浮单位($0^1, 1^0$)中的一个，而不能两者全有，对坚实单位来说，也只能拥有两者($0^0, 1^1$)之一，而不能两者皆有.

如果选择中包括两种 0 或两种 1：

$$0^1, 0^0, a^a, b^b, \cdots \text{或 } 1^0, 1^1, a^a, b^b, \cdots \quad (2 \leqslant a, b, \cdots),$$

则游戏是烦躁的.

如果每种只有一个：

$$1^0, 0^0, a^a, b^b, \cdots \text{或 } 0^1, 1^1, a^a, b^b, \cdots \quad (2 \leqslant a, b, \cdots)$$

则游戏是骚动的.

通常是，一个烦躁游戏的两份拷贝可以形成一个坚实的零，而骚动游戏的两份拷贝可作为一个轻浮的零来处理. 所以我们可以将某些烦躁动物与蠢蠢欲动的家伙(只要它们成双结对，并加以适当限制)像驯良动物一样，带上我们的挪亚方舟(请参看附图 6)：
听起来似乎非常复杂的条件通常能够自动满足，因为条件(ii)中的选择 $a^a$ 一般是尼姆堆 $a$，而我们很少看到不是 0 或 1 的轻浮而驯服的局势.

在本章附录中将加以解释，何以在上述策略中要说 R+R 可以省略，它还证明，当满足(i)，(ii)时，

$$T_1+T_2+\cdots+(R_1+R_1)+(R_2+R_2)+\cdots+(R+R)+\cdots+(R+R)+R$$

与

$$T_1+T_2+\cdots+(R_1+R_1)+(R_2+R_2)+\cdots+R$$

有着同样的结果. 特别，R 的一切偶数倍都具有类数

$$0^{1202\cdots}$$

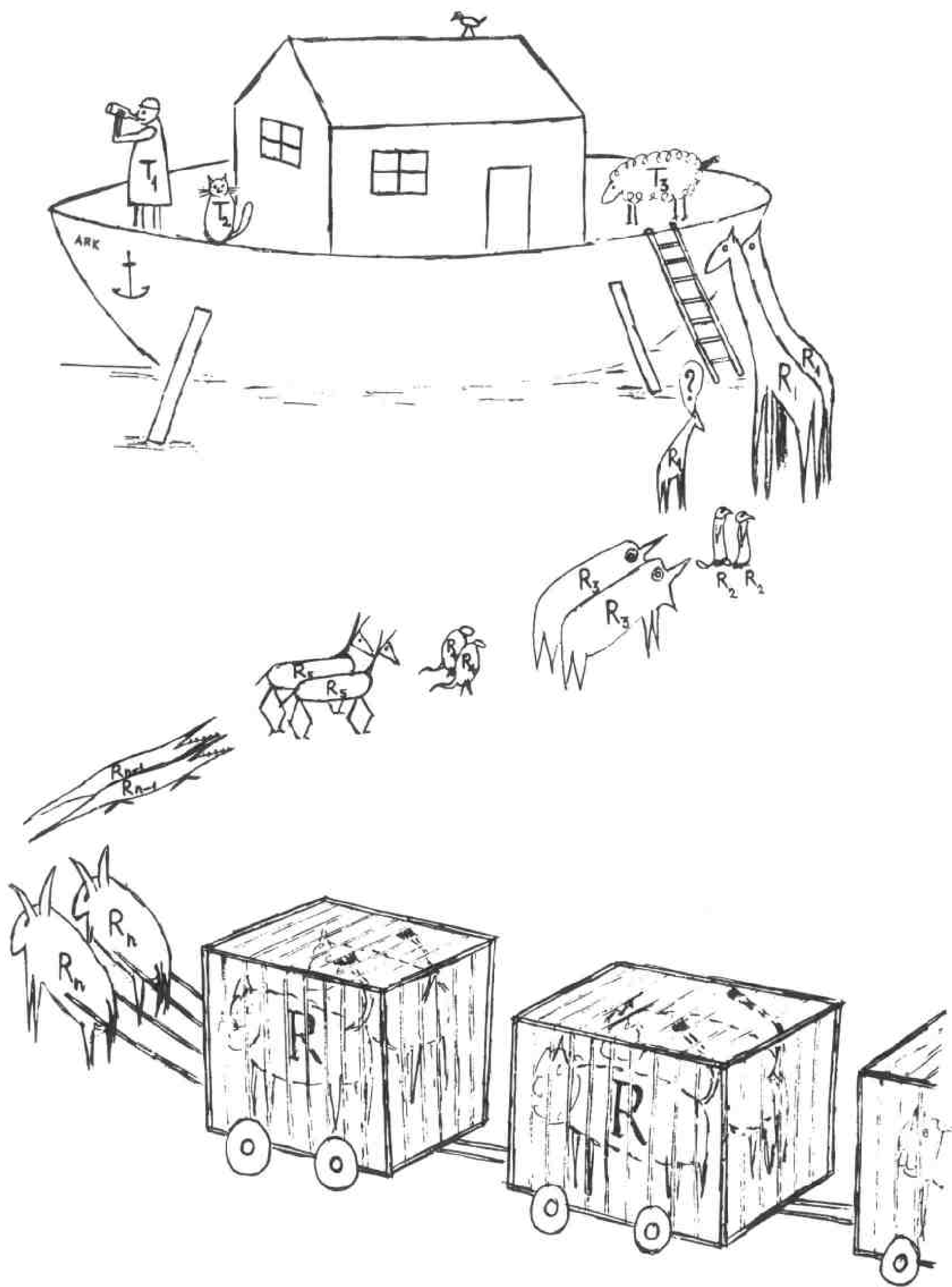



图 6. 挪亚方舟定理.

假设

$T_1, T_2, \cdots$是驯服的，

$R_1, R_2, \cdots$是烦躁的，

R是骚动的，其类数为$g^{\gamma\cdots}$，

$R_1, R_2, \cdots, R$刚刚变"野".

则可求出

$$T_1+T_2+\cdots+(R_1+R_1)+(R_2+R_2)+\cdots+(R+R)+(R+R)+\cdots$$

的结果，只须注意到每一对

$$R_1+R_1, R_2+R_2, \cdots$$

都是类数为$0^0$的驯服游戏，并可略去每一对

$$R+R,$$

假使它们满足以下条件：

(i) 唯一轻浮而驯服的选择

$$T_1, T_2, \cdots, R_1, R_2, \cdots, R \text{ 是 } 0 \text{ 与 } 1,$$

(ii) 对R的每一个选择$a^a (a \geqslant 2)$，

要末是$a^a$有一选择$\gamma \overset{*}{+} 1$，

要末$R$有一选择$(a \overset{*}{+} 1)^{a \overset{*}{+} 1}$.

**挪亚方舟定理**

而R的一切奇数倍则与R一样，有着相同的类数.

从而得知，格隆第游戏在$G_{13}=2_2 21$时开始变"野"，它是类数为$3^{1431}$的骚动者，$G_{13}$的任意奇数份拷贝有着同样的类数，而任意偶数倍则具有同样的类数$0^{120}$，像0一样. 在开勒司游戏中，对类数为$4^{146}$的$K_5=2_2 321$，也可说上类似的一些话.

为了说明$R_1+R_1$是类数为$0^0$的驯服游戏，我们要指出，从任一选择，都有一个到$0^0$的可逆走法：

$$R_1+R_1 \nearrow R_1+n^n \to n^n+n^n=0^0,$$

$$R_1+R_1 \searrow \begin{cases} R_1+0^1 \to 0^0+0^1=0^0, \\ \text{或} \\ R_1+1^0 \to 1^1+1^0=0^0. \end{cases}$$

另外，若 $n^a$ 是 $\mathrm{R}_1$ 的类数，则 $\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_1$ 是类数为 $n'$ 的驯服游戏，因为一切选择是

$$R_1-R_1-R_1\begin{cases}\nearrow R_1+R_1+n^a=n^a,\\ \searrow \left\{\begin{array}{l}\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_1+0^1=0^0,\\ \quad\text{或}\\ \mathrm{R}_1+\mathrm{R}_1+1^0=1^1.\end{array}\right.\end{cases}$$

这意味着我们可以让一对对烦躁动物带着它们的孩子登上挪亚方舟逃难.

## 半驯定理

若 $H+H$ 是类数为 $0^0$ 的驯服动物，则我们将把有野性的动物 $H$ 称做半驯的. 我们用来证明 $R_1-R_1$ 是驯服的论证经推广后可证出：

> 一种野性难驯的游戏是半驯的，如果满足以下条件的话：$H$ 的一切选择是驯服或者半驯服的，而且
> 若 $H$ 有一选择 $0^1$，它有一选择 $0^0$，
> 若 $H$ 有一选择 $1^0$，它有一选择 $1^1$.

**半驯定理**

为了证明挪亚方舟定理的正确性，并不真正需要每种烦躁或骚动的各对动物是完全一模一样的，只要它们的种属相同就足够了. 下列运算操作不会改变种属：

(a) 将一驯良选择代之以同一类数的另一驯服游戏（在骚动情况下，注意挪亚方舟定理的条件(i)及(ii)).

(b) 添加一个新的动作，但存在着一个可逆动作，使之返回到已知为同一种属的游戏中去.

## 基尔司游戏

是一种八进码游戏·**15**，在 $n$ 颗豆子的行 $\mathrm{Y}_n$ 上进行，每次可以取走两颗相邻的豆子，只要它们不是该行的头或尾；若一行只有 1 或 2 颗豆子，则也可把该行完全拿光.

它的类数序列因出现周期性重复而引人注意：

$$0.110112212211101^{1}1^{1}221^{2}22^{1420}1^{1}1^{1}0^{1}1^{1}1^{1}22^{1120}1^{2}2^{1120}2^{1120}1^{1}1^{631}\cdots$$

所有出现的 $1^4$ 都是指同一烦躁游戏

$Y_{14}=Y_{15}=Y_{21}=Y_{22}=Y_{24}$　$Y_{27}=2_2 320$，我们可记为 $z$，在许多其他游戏中（例如 **·57，·72、·75**与 **4·7**）它也频频出现．用它来表记时则有

$Y_{18}=z_1 2_2 0$；　烦躁的，类数 $1^2$，

$Y_{20}=z_1 z 2_2 31$；　狂野的，类数 $2^{1420}$，

$Y_{23}=\{Y_{20}+1, Y_{18}, z+2, 3, 1\}$；驯服的，类数 $0^1$．

$Y_{19}$ 与 $Y_{26}$ 都可化简为大小是 2 的尼姆堆！

$Y_{28}=\{Y_{23}, Y_{20}+2, Y_{18}+1, z+1, 2+2, 0\}$ 为什么是烦躁的呢？

它的驯良选择　$Y_{23}$，　$2+2$，　$0$

的值

$$0^1,\quad 0^0,\quad 0^1$$

是足够用来计算值 $1^2$ 的．

由 $Y_{20}+2$，存在着可逆动作，到达 $3+2(1^1)$ 与 $2+2+2(2^2)$．

由 $Y_{18}+1$，存在一可逆动作到 $Y_{18}(1^2)$．

由 $z+1$，　存在着可逆动作，到达 $0+1(1^0)$ 与 $3+1(2^2)$．

$Y_{31}$ 是类数为 $1^1$ 的驯服游戏，它有着 $3+2$ 的一切选择

$$2+2, 3, 2$$

对 $z+z$（由挪亚方舟定理可知，它是类数为 $0^0$ 的驯服动物）之外的任一选择，都存在着走到 $3+2$ 的可逆动作．所以说，$Y_{31}$ 是**"几乎等于"**$3+2$ 的．

# 除数尺

我们的下一个游戏之所以有此名称，因为局势（见图 7）的反复很像**直尺游戏**（见第 14 章的图 7）．本游戏的走法是要将一堆豆子分成两个较小的堆，或将任一偶数堆的大小减为一半．用 $R_n$ 表示大小为 $n$ 的一堆，则当 $n=2^k d$，而 $d$ 是奇数时，则

$$R_n=H_k，其中 H_0=0, H_1=1, H_2=2, H_3=2_2 20.$$

一般有

$$H_{k+1}=\{H_0+H_0, H_1+H_1, H_2+H_2, \cdots, H_k+H_k, H_k\}.$$

$$H_4=\{H_0+H_0, H_1+H_1, H_2+H_2, H_3+H_3, H_3\}$$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | $H_3-2_220$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | $H_4$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | $H_3$ | 0 |

图 7. 除数尺游戏中的各种局势.

这是因为 $R_n$ 的选择具有如下形式

$$R_{2^{k-1}d} \qquad R_{2^ja}+R_{2^jb} \qquad R_{2^ka}+R_{2^lb}$$

其中 $a,b$ 为奇数,而且 $j<k<l$. 由数学归纳法可知,它们是

$$H_{k-1} \qquad H_j+H_j \qquad H_k+H_l.$$

前两种情形是定义 $H_k$ 的选择,而从第三种情形出发,存在着一个可到达 $H_k+H_0+H_0=H_k$ 的可逆动作.

由于 $H_3$ 是烦躁游戏,它刚刚变野,而我们已知其一切倍数的类数

| | $H_3$ | $H_3+H_3$ | $H_3+H_3+H_3$ | $H_3+H_3+H_3+H_3$ | $H_3+H_3+H_3+H_3+H_3$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 类数 | $1^3$ | $0^0$ | $1^1$ | $0^0$ | $1^1$ | … |

于是我们可以预测其一切局势的结局,只要任一堆的大小均不能为 16 整除. 另外,由于 $H_3$, $H_4$,…是半驯的,所以易于求出它们的类数:

$$H_3, H_5, H_7, \cdots \quad \text{的类数为 } 1^{31},$$

$$H_4, H_6, H_8, \cdots \quad \text{的类数为 } 2^{20}.$$

但不以偶数形式出现的局势可能非常复杂;例如

$$H_3+H_4 \qquad \text{的类数为 } 3^{46}$$

然而　　　　　　　　$H_3+H_3+H_3+H_1$　的类数却是 $3^{31}$.

本游戏另有一种变异形式,即不准把一堆豆子分成两个大小相等的堆,如以 $V_n$ 表示大小为 $n$ 的这一变异形式,我们发现,学说的一部分依然可以通行无阻:

$$V_d=0,\quad V_{2d}=1,\quad V_{4d}=2,\quad \text{若 } d \text{ 为奇数时},$$

可是 $V_8,V_{16},V_{24},\cdots\cdots$就完全不同了:

| $n$ | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 | 104 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_n$ | 1 | 2 | $z$ | $y$ | $x$ | $w$ | $v$ | $u$ | $t$ | $s$ | $r$ | $q$ | $p$ | … |
| 类数 | 1 | 2 | $1^4$ | $1^3$ | $1^4$ | $2^{20}$ | $1^4$ | $2^{20}$ | $1^4$ | $2^{20}$ | $1^4$ | $1^{31}$ | $1^4$ | … |

实际上 $z=2_2320$ 就是我们在基尔司游戏中遇到过的烦躁游戏,而此后逐项相间的 $x,v,t\cdots$ 是同一种属的烦躁动物.现在让我们指出 $t$ 的一些驯服选择与可逆动作

$$t=\{u+1,\ v+2,\ w+z,\ x+y,\ 2+2,\ 0,\ 2\}$$

驯服选择:　　　　$3^3$　　　　$0^0$, $0^1$, $2^2$.

可逆动作:　　　　$(v+1)+1$,　$0+z$, $x+0$.

驯服选择同 $z$ 的那些选择一样,有着同样的类数(由中间值定理可知,$v+2$ 是类数为 $3^3$ 的驯服游戏),而 $v,z,x$ 则已知为同种属.两个或更大偶数的拷贝,其和将是类数为 $0^0$ 的驯服游戏,而三个或更大奇数的拷贝之和将是类数为 $1^1$ 的驯服游戏.

$V_{32}=y=z_12_220$ 游戏也是烦躁的,但有着一个不同的类数 $1^3$.这些游戏 $z,y,x,w,\cdots$仍是半驯的,但它们的分析要比第一种变异形式困难得多:

| | | |
|---|---|---|
| | $y+z,y+x,y+v$ | 有着类数 $0^{20}$, |
| | $z+w,z+u$ | 有着类数 $3^{31}$, |
| | $y+w,y+u$ | 有着类数 $3^{13}$, |
| | $z+y+z,z+y+x$ | 有着类数 $1^{31}$, |
| 而 | $z+y+y$ | 是类数 $1^1$ 的驯服动物. |

## 道森,僚属,格隆第等游戏

对于这三只著名的野狗,我们已作了广泛的计算,并可向你们提供算出来的 D,O,G 序列.覆盖全部两位数八进制代码的较短表格可在本章增补材料中找到.

对**道森开勒司**游戏来说,有 $n$ 个木柱的局势 $D_n$,其类数序列如下:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | $3^{1431}$ | 3 | $2^{0520}$ | 2 | $4^{146}$ |
| $D_{n+14}$ | 0 | $5^{057}$ | $2^{0520}$ | 2 | $3^{1431}$ | 3 | $0^{02}$ | $1^{031}$ | $1^{13}$ | $3^{1431}$ | $0^{31}$ | $2^{0520}$ | [illegible]$^{431}$ | $1^{13}$ |
| $D_{n+28}$ | $0^{120}$ | $4^{0564}$ | $5^{057}$ | $2^{20}$ | $7^{11875}$ | $4^{57}$ | $0^{02}$ | $1^{031}$ | $1^{13}$ | $2^{1420}$ | $0^{31}$ | $3^{0631}$ | $1^{431}$ | $1^{13}$ |

下面给出这两种局势之和的较短表格：

| + | A | B | C | D | $D_{21}$ | $D_{22}$ | $D_{23}$ | $D_{24}$ | $D_{25}$ | $D_{26}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_{10}=D_{17}+1=2_2 21=A$ | $0^{120}$ | $1^{031}$ | $7^{175}$ | $6^{064}$ | $3^{31}$ | $2^{0520}$ | $2^{20}$ | $0^{120}$ | $3^{564}$ | $1^{031}$ |
| $D_{12}=D_{19}+1=A3_2 0=B$ | $1^{031}$ | $0^{120}$ | $6^{064}$ | $7^{175}$ | $2^{20}$ | $3^{1131}$ | $3^{31}$ | $1^{021}$ | $2^{431}$ | $0^{120}$ |
| $D_{14}=\quad BA_1 2_2 31\quad =C$ | $7^{175}$ | $6^{064}$ | $0^{120}$ | $1^{031}$ | $4^{5861}$ | $5^{057}$ | $5^{4975}$ | $7^{175}$ | $4^{5861}$ | $6^{064}$ |
| $D_{16}=\quad CB_1 A_2 20\quad =D$ | $6^{061}$ | $7^{175}$ | $1^{031}$ | $0^{120}$ | $5^{4975}$ | $4^{146}$ | $4^{5861}$ | $6^{064}$ | $5^{20}$ | |

如假定

$$A+A=B+B=C+C=D+D=0,$$
$$A+1=B, C+1=D.$$

则项 A,B,C,D 的各种和的类数均可准确地算出.

道森游戏，它的原始面貌便是以反常形式出现的. 在 $D_n$ 的各个结果中，它表现出周期为 14 的倾向，对此，我们的表格已作了验证，一直到 $n=42$ 为止. 但是(与 $D_2$，$D_{16}$，$D_{30}$ 不一样)，$D_{14}$ 是一个反常 $A$—局势，因为存在着一个走到 $D_{21}+D_{21}$ 的动作，而其类数为 $0^{02}$，而每个选择都有一个转入此类数的可逆动作：

$$D_{21}+D_{21}=\{D_{21}+D+1, D_{21}+C, D_{21}+B+1, D_{21}+A, D_{21}+3+2, D_{21}+2\}$$

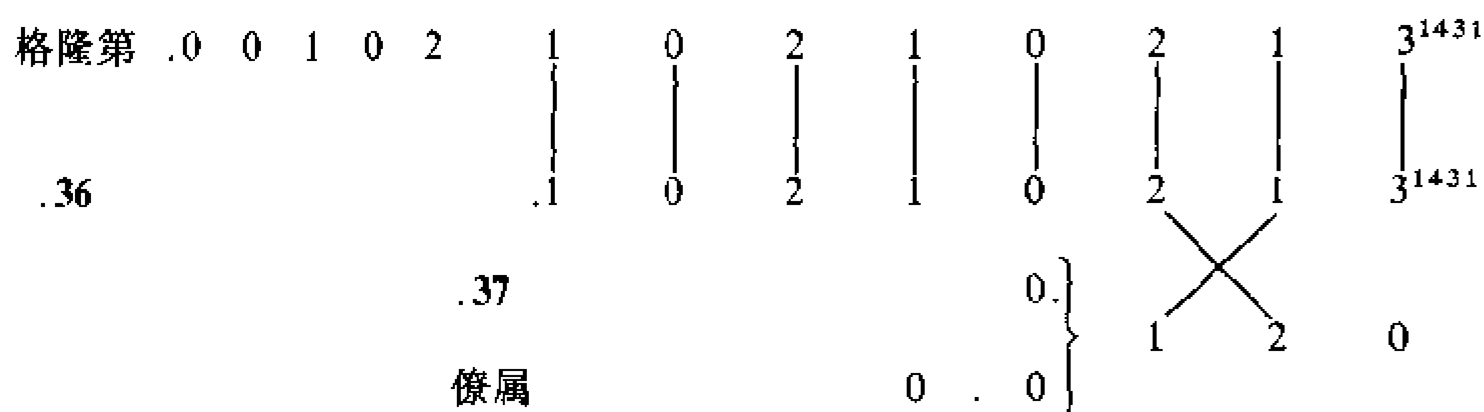
$$D_{21}+A+3 \qquad D_{21}+2+2 \qquad 2+2.$$

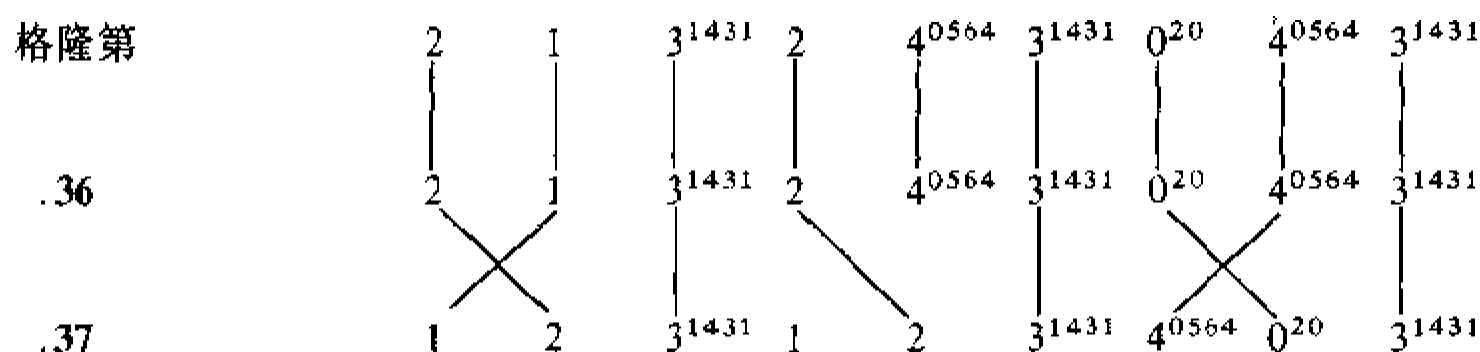
对僚属游戏(即·6游戏，见第 4 章)来说，官阶为 $n$. 直接对 $n-2$ 个其他官吏与平民负责的 $O_n$，其类数序列见下表：

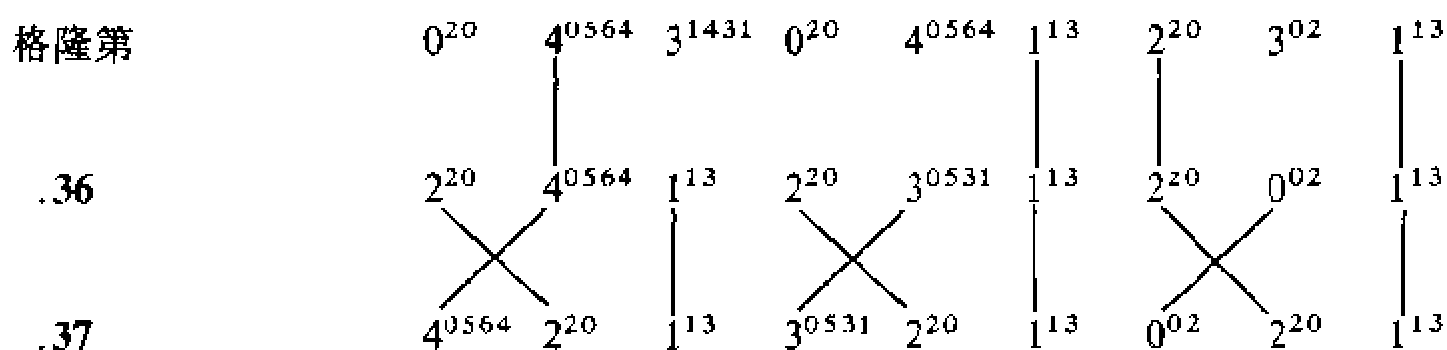
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_n$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | $3^{1431}$ | 1 | 2 | $3^{1431}$ | $4^{0564}$ |
| $O_{n+12}$ | $0^{20}$ | $3^{1431}$ | $4^{0564}$ | $2^{20}$ | $1^{13}$ | $3^{0531}$ | $2^{20}$ | $1^{13}$ | $0^{02}$ | $2^{20}$ | $1^{13}$ | $4^{0564}$ |
| $O_{n+24}$ | $5^{475}$ | $1^{13}$ | $4^{0564}$ | $5^{475}$ | $1^{13}$ | $2^{20}$ | $0^{02}$ | $1^{13}$ | … | | | |

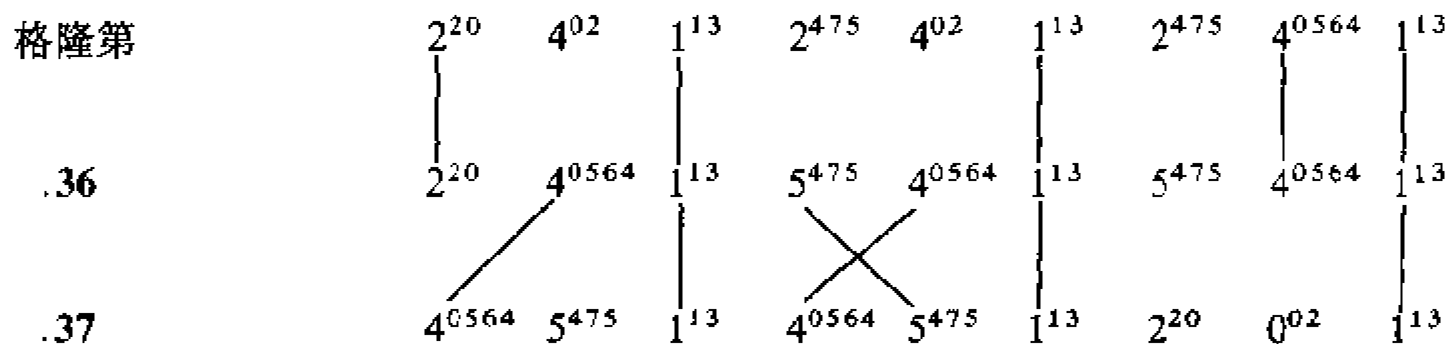
对**格隆第游戏**的单堆局势 $G_n$，在 ONAG 书中已把它的类数序列算到了五十项：

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_n$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| $G_{n+10}$ | 2 | 1 | $3^{1431}$ | 2 | 1 | $3^{1431}$ | 2 | $4^{0564}$ | $3^{1431}$ | $0^{20}$ |
| $G_{n+20}$ | $4^{0564}$ | $3^{1431}$ | $0^{20}$ | $4^{0564}$ | $3^{1431}$ | $0^{20}$ | $4^{0564}$ | $1^{13}$ | $2^{20}$ | $3^{02}$ |
| $G_{n+30}$ | $1^{13}$ | $2^{20}$ | $4^{02}$ | $1^{13}$ | $2^{475}$ | $4^{02}$ | $1^{13}$ | $2^{475}$ | $4^{0564}$ | $1^{13}$ |
| $G_{n+40}$ | $5^{475}$ | $4^{0564}$ | $1^{13}$ | $5^{475}$ | $4^{0520}$ | $1^{13}$ | $5^{475}$ | $4^{20}$ | $1^{13}$ | $0^{0431}$… |





在没有 28 或更大的堆时，我们可以约定使用下列记号

$$G_{13}=G_{16}=G_{19}=G_{22}=G_{25}=a,$$
$$G_{18}=G_{21}=G_{24}=G_{27}=b,$$
$$G_{20}=G_{23}=G_{26}=c,$$

以及

$$a+a=b+b=0,\ c+c+c=c+c.$$

把这些东西相加时，可以利用下面的表格：

| $c$ 的拷贝数：<br>再加上： | 无 | 一个 | 二个或更多个 |
|---|---|---|---|
| 0 | $0^{120}$ | $0^{20}$ | $0^{02}$ |
| $a$ | $3^{1431}$ | $3^{431}$ | $3^{31}$ |
| $b$ | $4^{0564}$ | $4^{564}$ | $4^{46}$ |
| $a+b$ | $7^{05875}$ | $7^{5875}$ | $7^{75}$ |

以下等式表明，玩僚属游戏时，这张表格也是有用的：

$$G_{13}=G_{16}=G_{19}=a=O_{7}=O_{10},$$
$$G_{18}=G_{21}=b=O_{11},$$
$$G_{20}=c=O_{12},$$
$$G_{22}=d=O_{13}.$$

按照第 4 章增补材料的说法，僚属游戏是**·37** 游戏的叔伯兄弟．**·36** 游戏同格隆第游戏的关系甚至更为亲近，你们可在对页的图解 * 中看得出来．

在前面两块中表示类数等式的实线指明它们是恒等式．

---

无偏博弈的反常游戏理论是本书的最后与最复杂的学说．谢谢你跟随我们走得如此之远．在本书的第二部分，要讲述一些特殊游戏，你将会感到轻松一点了．

---

* 译者注：在原书中，图解与正文相对，现已改排到上页．

# 增　　补

## 一切相减游戏都可以归结为尼姆游戏

好孩子动物园里的最后一个游戏"取平方"，是对应于集合

$$\{1,4,9,16,\cdots\}$$

的相减游戏. 尽管它的值从未出现周期性，然而我们的确知道它总是可以化约为尼姆堆的.

T·S·福格森从他的配对性质证明了，相减游戏中大小为 $n$ 的一堆(对应于任意减数集合

$$\{s_0,s_1,s_2,\cdots\}\quad(0<s_0<s_1<s_2<\cdots)$$

均可以化约为一个大小为 $\mathcal{G}(n)$(它的正常尼姆值)的尼姆堆.

肯定有下列关系式

$$\mathcal{G}(n)=\operatorname{mex}(\mathcal{G}(n-s_0),\mathcal{G}(n-s_1),\mathcal{G}(n-s_2),\cdots)$$

所以我们只须证明，若 $\mathcal{G}(n)=0$，则对某些 $s_k$，有 $\mathcal{G}(n-s_k)=1$. 但若 $\mathcal{G}(n)=0$ 而有任意合法动作时，则取最小数 $s_0$ 肯定是合法的，故而有 $\mathcal{G}(n-s_0)>0$. 从而存在着能使 $\mathcal{G}(n-s_0-s_k)=0$ 的某些 $s_k$. 但我们已在第4章的增补材料中证明过，相减游戏中任一尼姆值0必在其后 $s_0$ 位伴随着一个尼姆值1，故而有

$$\mathcal{G}(n-s_0-s_k+s_0)=\mathcal{G}(n-s_k)=1,$$

正如所需要的.

现在你可以利用第4章中的表格去玩一切反常形态的相减游戏了.

## PRIM(互质取子)与DIM(除数取子)

来自第4章的这些游戏真有点像相减游戏. 对 Prim$^+$，Prim$^-$，与 Dim$^+$ 来说，每一堆均有选择0或1，从而可以化约为一个尼姆堆. 但对于 Dim$^1$(从 $n$ 中拿走一个小于 $n$ 的除数)来说，类数



序列为

$$.0\ 1\ 0\ 2\ 0^0\ 1^3\ 0^0\ 3^{13}\ 0^0\ 1^{20}\ 0^0\ 1^{46}\ 0^0\ 2^3\ 0^0\cdots$$

$n>5$ 时可证明，类数为

$$g^{\gamma 0 \delta \gamma \delta}\cdots$$

其中 $n=2^g d$（$d$ 是奇数）且有

$$\begin{aligned}
\gamma &= g-2 && \text{若 } d=1, \\
\gamma &= g-2 && \text{若 } d=3, \\
\gamma &= g+1 && \text{若 } d=5, \\
\gamma &= g && \text{若 } d\geqslant 7,
\end{aligned}$$

以及

$$\delta=\gamma \overset{*}{+} 2.$$

## 挪亚方舟定理的证明

需要证明的是，在定理的条件下，若

$$\mathrm{R}=\{\gamma,\delta^{\delta},a^{a},b^{b},\cdots\}$$

是一个类数为 $g^{\gamma}\cdots$（其中 $\gamma,\delta$ 为依某种顺序出现的 0，1，而 $2\leqslant a<b<\cdots$）的骚动游戏，则在计算

$$\mathrm{R}+\mathrm{R}+\mathrm{R}+\cdots+\mathrm{T}$$

（其中 T 为一驯服游戏）的结果时，成对的 R+R 可以省略．我们用数学归纳法来证此结果．若 R 的拷贝数是奇数，我们注意到 $(2n+1).\mathrm{R}+\mathrm{T}$ 的选择

$$2n.\mathrm{R}+\mathrm{R}'+\mathrm{T} \text{ 与 } (2n+1).\mathrm{R}+\mathrm{T}'$$

有着 R+T 的选择

$$\mathrm{R}'+\mathrm{T} \text{ 与 } \mathrm{R}+\mathrm{T}'$$

同样的结果．特别，$(2n+1).\mathrm{R}+\gamma$ 是一个 $\mathscr{P}$－局势．

若 R 的拷贝数是偶数，只须证明当 T 是 $\mathscr{P}$ 局势时 $(2n+2).\mathrm{R}+\mathrm{T}$ 也是 $\mathscr{P}$—局势即已足够．若 T 有类数 $1^0$，则它必然为 1，而 $(2n+2).\mathrm{R}+1$ 的选择可逆转到 $\mathscr{P}$ 局势：

$$(2n+2).\mathrm{R}+1 \begin{cases}
\nearrow (2n+2).\mathrm{R} \longrightarrow (2n+1).\mathrm{R}+\gamma, \\
\nearrow (2n+1).\mathrm{R}+\gamma+1 \longrightarrow (2n+1).\mathrm{R}+\gamma, \\
\searrow (2n+1).\mathrm{R}+\delta^{\delta}+1 \longrightarrow 2n.\mathrm{R}+\gamma+\delta^{\delta}+1=2n.\mathrm{R}+0^0, \\
\searrow (2n+1).\mathrm{R}+a^{a}+1 \searrow \left\{ \text{或} \begin{array}{l} (2n+1).\mathrm{R}+\delta+1=(2n+1).\mathrm{R}+\gamma, \\ 2n.\mathrm{R}+a^{a}+(a\overset{*}{+}1)^{a\overset{*}{+}1}+1=2n.\mathrm{R}+0^0, \end{array} \right.
\end{cases}$$

自应根据定理中条件(ii)的哪一部分得到满足而作相应处理.

$(2n+2).R+T$(其中 T 的类数为 $0^0$)的选择也可作类似之逆转:

$$(2n+2).R+T \begin{cases} \longrightarrow (2n+1).R+R'+T \longrightarrow 2n.R+R'+R'+T=2n.R+0^0, \\ \longrightarrow (2n+2).R+T' \longrightarrow (2n+2).R+T'', \end{cases}$$

其中 T″为一 $\mathcal{P}$ 局势.

## 反常八进代码游戏

表 5 给出了一些 2 位八进制代码游戏的类数序列. 先利用下面的导引表格,检索到在主表(记为 $M$)中不出现的游戏. 于是在索引表中查出出现在主表中的等价游戏(下标 1 表示"叔伯兄弟"),或者在所有局势为尼姆堆时,给出其完整的值序列.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·0 | $.\dot{0}$ | $.01\dot{0}$ | $.\dot{0}01\dot{1}$ | $.\dot{0}11\dot{0}$ | M | $.\dot{0}\dot{1}$ | M | M |
| ·1 | $.1\dot{0}$ | $.11\dot{0}$ | $.\dot{1}00\dot{1}$ | $.\dot{1}10\dot{0}$ | M | M | M | M |
| ·2 | $.\dot{0}\dot{1}$ | $.\dot{0}\dot{1}$ | $.\dot{0}1\dot{2}$ | $.\dot{0}1\dot{2}$ | $.\dot{0}\dot{1}$ | $.\dot{0}\dot{1}$ | M | **·26** |
| ·3 | $.\dot{1}\dot{0}$ | M | $.\dot{1}0\dot{2}$ | $.\dot{1}2\dot{0}$ | M | M | M | M |
| ·4 | **·07**$_1$ | **·17**$_1$ | **·07**$_1$ | **·17**$_1$ | M | M | **·44** | **·45** |
| ·5 | $.\dot{1}\dot{0}$ | $.\dot{1}$ | M | M | M | $.\dot{1}$ | M | M |
| ·6 | **·37**$_1$ | **·37**$_1$ | **·37**$_1$ | **·37**$_1$ | M | **·64** | **·64** | **·64** |
| ·7 | $.\dot{1}\dot{0}$ | M | M | M | M | M | M | M |
| 4· | $.\dot{0}\dot{1}$ | $.\dot{1}$ | $.\dot{0}\dot{1}$ | M | **·77**$_1$ | $.\dot{1}$ | **·77**$_1$ | M |

表 5 的导引

在表 5 中,$a,b,c,\cdots$代表不是单个数码的第一,第二,第三,…项. 表中最后一列 A,D,T,H,F 等代号的意思如下:

**表 5 的注解**

A　在本书正文中可查到下列各游戏的补充材料



•**07** ＝道森开勒司，　•**15** 一基尔司　•**31** ＝昂首阔步，

•**36**（参看格隆第游戏）　•**37** ＝僚属游戏　•**52** ＝桔冻胶糖，

•**56** -柠檬糖　•**73** ＝蝰蛇，　•**77** ＝开勒司

D　每一款都要重复. 对•**44** 来说，重复值就是开勒司的值.

T　每一个局势都是驯服的. 对•**73** 与 **4•3**来说，每一个局势都是一种尼姆局势. T•S•福格森注意到•**73** 与•**333** 并不具有同样的反常走法（参看第 4 章表 6(b)中的•**26**）.

H　每一个局势都是半驯的. •**26**，•**57** 与 **4•7**这三个游戏的前面一些值联系得非常紧密，并在落定之前含有个数越来越多的类数上标. 这种情况能一直继续下去吗？

F　杰姆•弗兰尼根（Jim Flanigan）已作出一个完整分析：

在它的前面 6 个值之后. •**34** 游戏有着八项的完整周期

$$0\quad 5\quad 1\quad 2_21\quad 1\quad 2\quad 0\quad (2_21)+1$$

根据挪亚方舟定理，$2_21$ 的两份拷贝可以省略.

在前两项之后，•**71** 游戏的类数序列显示出周期 6：

$$1\quad 0\quad 1^{20}\quad 0\quad 1\quad 0^{1420}.$$

尽管类数为 $1^{20}$ 与 $0^{1420}$ 的各种游戏并不一样，但若假定它们等价于 $r,s$，并应用下表：

| + | 0 | $r$ | $2r$ | $3r,5r,7r,\cdots$ | $4r,6r,8r,\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0,2s,4s,\cdots$ | $0^{120}$ | $1^{20}$ | $0^{02}$ | $1^{13}$ | $0^{02}$ |
| $s,3s,5s,\cdots$ | $0^{1420}$ | $1^{02}$ | $0^{02}$ | $1^{13}$ | $0^{32}$ |

我们即能得出正确的解析.

| 游戏名称 | 类数序列 | | 附注 |
|---|---|---|---|
| •**04** | $.00011\ 12203\ 31110\ 4^{146}3^{1431}332^{0520}\ 224^{146}4^{146}0^{120}$ | $a=2_2321\ b-2_221$ | |
| •**06** | $.00112\ 20311\ 22^{1120}3^{1431}34^{0564}1^{0564}0^{20}5^{1175}3^{1431}$ | $a=2_231\ b=2_221$ | |
| •**07** | $.01120\ 31103^{1431}\ 32^{0520}24^{146}0\ 5^{057}2^{0520}23^{1431}3\ 0^{02}$ | $a=2_221\ b=a3_20$ | A |
| •**14** | $.10010\ 21221\ 0414^{146}4\ 1^{3}2^{1120}21^{3}2^{1720}\ 0^{620}1^{631}0^{120}$ | $a=2_2321\ b=2_2420$ | |
| •**15** | $.11011\ 22122\ 1101^{4}1^{1}\ 221^{2}22^{2}22^{1120}\ 1^{4}1^{1}0^{1}1^{4}1^{4}$ | $a=b=2_2320\ c=a_12_20$ | A |
| •**16** | $.10012\ 21401\ 42^{1120}1^{2}4^{2016}0^{1}\ 1^{4}4^{031}2^{1457}2^{31}4^{20}$ | $a=2_2431\ b=2_240$ | |
| •**17** | $.11021\ 30113^{1431}\ 22^{0520}34^{146}1\ 5^{057}3^{1431}22^{0520}3\ 1^{13}$ | $a=2_221\ b=a3_20$ | |
| •**26** | $.01230\ 1230^{4}1^{7}\ 2^{0120}3^{31}0^{20120}1^{531}2^{02042}\ 3^{1431}$ | $a=3_2321\ b=a+1\ c=a_1a3$ | H |
| •**31** | $.120^{0}1^{1}0^{0}\ 1^{1}0^{0}1^{1}0^{0}1^{1}\ 0^{0}1^{1}0\ 1^{1}0^{0}$ | $a=2.\ b=2.\ ;$ | AT |
| •**34** | $.10120\ 10312^{1420}\ 1203^{0531}0\ 312^{1420}12\ 03^{0531}$ | $a=c=2_21\ b=d=a+1$ | F |

续表

| 游戏名称 | 类数序列 | | 附注 |
|---|---|---|---|
| ·35 | $.120^{0}1^{2}0^{0}\ 2^{2}1^{32}2^{2}0^{0}1^{2}\ 0^{0}2^{2}1^{32}2^{2}0^{0}\ 1^{2}0^{0}2^{2}$ | $a=2_{+}\ b=2.0$ | H |
| ·36 | $.10210\ 213^{1131}21\ 3^{1431}24^{0561}3^{1131}0^{20}\ 4^{0561}3^{1131}2^{20}$ | $a=b=d=2_{2}21\ c=f=a_{2}a20$ | A |
| ·37 | $.12012\ 3^{1131}123^{1131}4^{0561}\ 0^{20}3^{1431}4^{0561}2^{20}1^{13}\ 3^{1531}$ | $a=b=2_{2}21\ c=a_{2}a20$ | A |
| ·44 | $.00112\ 2331\ 4^{146}4^{146}332^{2}\ 2^{2}1^{1}1^{1}4^{146}4^{146}$ | $a=b=2_{2}321\ c=d=a_{1}a3_{2}2_{2}30$ | D |
| ·45 | $.01122\ 3114^{116}4^{4}\ 32^{2}2^{2}1^{1}1^{1}\ 4^{477}2^{2}$ | $a=2_{2}321\ b=2_{2}3210$ | |
| ·52 | $.10221\ 0^{0}32^{2}1^{1}0^{0}\ 3^{3}2^{2}1^{1}0^{0}\ 3^{3}\ 2^{2}1^{1}0^{0}$ | $a=2_{2}\ b=3_{2}2_{2}1\ c=3_{2}\ d=b_{1}b2_{22}3$ | AT |
| ·53 | $.11221\ 0^{0}22^{2}4^{1}0^{0}\ 1^{1}2^{2}2^{2}1^{031}1^{1}\ 2^{2}2^{2}4^{4}1^{1}1^{631}$ | $a=2_{2}\ b=3_{2}2_{2}0\ c=3_{2}2_{2}32$ | H |
| ·54 | $.10122\ 2411^{1}1^{5}\ 222^{2}4^{157}1^{1}\ 1^{1}1^{531}2^{2}2^{2}$ | $a=2_{2}532\ b=2_{2}54320$ | H |
| ·56 | $.10224\ 11^{1}324^{4}\ 4^{4}6^{6}6^{6}2^{2}1^{1}\ 1^{1}7^{7}6^{6}8^{8}4^{4}\ 1^{1}1^{1}$ | $a=2_{2}5432\ b=a_{1}a4_{2}2_{2}321$ | AT |
| ·57 | $.11221\ 1221^{4}1^{1}\ 2^{20}2^{20}1^{131}1^{131}2^{1120}\ 2^{1120}1^{20131}$ | $a=b=2_{2}320\ c=d=a_{1}a2_{2}30$ | DH |
| ·64 | $.01234\ 15^{146}3^{3}21^{431}\ 5^{146}4^{657}2^{786}6^{4657}$ | $a=2_{2}4321\ b=a3_{2}2_{2}5421$ | |
| ·71 | $.12101^{2}010^{1420}10\ 1^{20}010^{1420}\ 1\ 01^{20}010^{1420}$ | $a=2_{2}0\ b=a_{2}1$ | F |
| ·72 | $.10231\ 0231^{4}0^{0}\ 2^{20}3^{31}1^{431}0^{0}2^{20}$ | $a=2_{2}320\ b=2_{2}\ c=a_{2}a2_{2}30$ | H |
| ·73 | $.1230^{0}1^{1}\ 2^{2}3^{3}0^{0}1^{1}2^{2}\ 3^{3}0^{0}1^{1}2^{2}3^{3}\ 0^{0}1^{1}2^{2}$ | $a=2_{2}\ b=3_{2}\ c=2_{22}\ d=3_{22}$ | AT |
| ·74 | $.10123\ 2414^{146}6^{657}\ 232^{2}1^{1}5^{857}\ 1^{1}7^{857}$ | $a=2_{2}5321\ b=a3_{2}2_{2}54320$ | |
| ·75 | $.12121^{4}\ 2^{20}1^{431}2^{20}1^{1}2^{20}\ 1^{13}2^{20}1^{13}2^{20}$ | $a=2_{2}320\ b=a2_{2}30$ | H |
| ·76 | $.10234\ 16^{16}234^{46}\ 1^{531}6^{146}7^{657}3^{3}2^{20}\ 1^{531}6^{61}$ | $a=2_{2}54321\ b=a_{1}a4_{3}4_{2}2_{2}321$ | |
| ·77 | $.12314^{146}\ 32^{2}1^{1}4^{646}2^{2}\ 6^{46}4^{046}1^{1}2^{2}7^{57}\ 1^{13}4^{64}3^{31}2^{20}$ | $a=2_{2}321\ b=a_{1}a3_{2}2_{2}30$ | A |
| 4·3 | $.120^{0}2^{2}0^{0}\ 2^{2}0^{0}2^{2}0^{0}2^{2}\ 0^{0}2^{2}0^{0}2^{2}0^{0}\ 2^{2}$ | $a=2_{2}\ b=2_{22}\ c=2_{222}$ | T |
| 4·7 | $.12121^{4}\ 2^{20}1^{431}2^{1120}1^{20431}2^{131420}\ 1^{20201431}2^{13131420}$ | $a=2_{2}320\ b=a_{1}a2_{2}30$ | H |

**表 5.** 两位八进制代码游戏的类数序列.

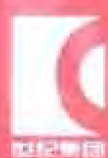
# 最新消息：更多的游戏可以驯化！

按照通常规则，一个单独的可驯化游戏可以添加到任意个数的驯化游戏中去.

若
$$G=\{T_1,T_2,\cdots,U_1,U_2,\cdots\}$$
其中 $T_1,T_2,\cdots$ 是我们已知为驯服的游戏，而 $U_1,U_2,\cdots$ 可能是狂野的，则 $G$ 为**可驯游戏**的三个条件是：

(i) 它的尼姆值 $g^{\gamma}$ 必须是下列驯化对

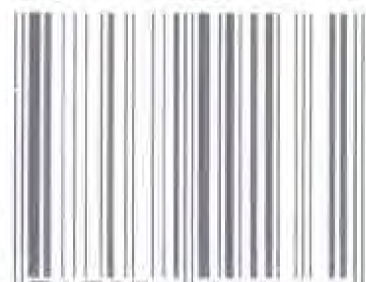
$$0^{0},1^{1},2^{2},3^{3},4^{4},\cdots \text{或 } 0^{1} \text{ 或 } 1^{0} \quad \text{中的一个.}$$



责任编辑　叶中豪
封面设计　陆　弦



ISBN 7-5320-9136-8




易文网：www.ewen.cc
定　价：65.00元

(ii) $g^{\gamma}$ 必须也是**化约游戏**

$$H-\{T_1,T_2,\cdots\}$$

的尼姆值(除非 $H$ 为空集,$g^{\gamma}$ 可为 $0^1$ 或 $0^0$).

(iii) 由每个狂野或情况尚未判明的选择 $U_1$,$U_2$,…出发,必有可逆动作使之到达两个(有可能彼此相等)可驯游戏,其类数分别是

$$g^{?} \text{ 与} ?^{\gamma}$$

例如,表 4 中开勒司游戏的各个局势

$$0^{02},1^{13}.2^{20},3^{31},0^{120}.1^{031}$$

都是可驯化游戏,其类数相应地为

$$0^{0/},1^{1/},2^{2},3^{3/},0^{1/},1^{1/}$$

("/"记号表示"可以驯化",它同"驯服"是有区别的).

于是得知,可驯化+驯服=可驯化,然而可驯化+可驯化却有可能得出"狂野"来.实际上,驯服游戏是最大的一类游戏,它可以像尼姆游戏那样来添加,而其中一位局中人拥有一种永远得以回归本类的获胜策略.

## 参考文献及进一步阅读材料


Charles L. Bouton, Nim a game with a complete mathematical theory, Ann. of Math., Princeton(2), **3**(1901—02)35—39.

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapter 12.

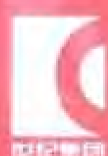
T. S. Ferguson, On sums of graph games with the last player losing, Internat. J. Game Theory, **3**(1974)159—167; MR **52**≠5046.

P. M. Grundy and C. A. B. Smith, Disjunctive games with the last player losing, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52**(1956)527—533; MR **18**, 546.

T. H. O'Berine, "Puzzles and Paradoxes", Oxford University Press, London, 1965, pp. 131—150.

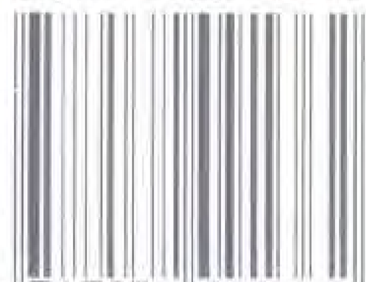
Yohei Yamasaki, On misère Nim-type games, J. Math. Soc. Japan, **32**(1980)461—475.

Yōhei Yamasaki, The projectivity of Y-games, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **17**(1981)245—248.



责任编辑 叶中豪
封面设计 陆 弦





ISBN 7-5320-9136-8
9 787532 091362 >
易文网：www.ewen.cc
定 价：65.00元